объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-81-302

Р.М.Ямалеев

РАСШИРЕННАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ УРАВНЕНИЯМ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ СПИНА 1/2

Направлено в ТМФ

1981

Классическая механика по сути построена на четырех законах сохранения - законах сохранения энергии, импульса, момента импульса, а также скорости центра масс. Первые два из них обусловлены однородностью, а последние - изотропностью пространственно-временного континуума. Существует несколько формулировок классической механики, среди которых видное место занимает теория Гамильтона-Якоби /Г-Я/, сыгравшая в свое время весьма важную роль в построении квантовой механики. Теория Г-Я служит мостом, соединяющим классическую механику с квантовой. В своей конструкции она в основном опирается на первые две сохраняющиеся величины - энергию и импульс. Теория Г-Я соответствует квантовой механике спина 0. В работах [1,4] показано, что эту теорию можно развить, включая в ее рамки две последние сохраняющиеся величины: момент импульса и специальный вектор, отвечающий закону сохранения скорости центра масс /по аналогии с моментом импульса этот вектор будем называть моментом энергии/. Момент импульса и момент энергии выражаются через вектор-функцию действия, а на основе соотношений между ними составляются уравнения на данную вектор-функцию. Такой вариант теории Г-Я соответствует квантовой механике спина I.

Данная постановка проблемы естественным образом порождает следующий вопрос: каким путем необходимо видоизменить или обобщить обычную классическую механику, чтобы привести ее в соответствие с квантовой механикой спина 1/2?

В квантовой механике получены уравнения движения частиц со спином 1/2, позволяющие с огромной точностью описать существующие в настоящее время экспериментальные факты. Если верить принципу соответствия в целом и быть логически последовательным, то необходимо признать также существование обобщенного варианта классической механики, который теоретически индуцируется квантовой механикой спина 1/2.

Одно из решений проблемы соответствия классической и квантовой механики спина 1/2 путем введения в качестве новых степеней свободы антикоммутирующих переменных было предложено в работе [2]. В настоящей работе предлагается решение данной проблемы в рамках расширенной системы пространственно-временных координат в духе работ [3]. Расширение системы пространственно-временных координат обусловлено требованием полноты базиса, в котором осуществляется факторизация основного соотношения классической механики. Как известно, представление физических величин в полном базисе пространственно-временных векторов является одним из основных требований современной физики. Физическая интерпретация подобного рода расширения пространства измерений предполагает интересное обобщение известных классических положений.

1. Алгебраические соотношения между сохраняющимися величинами классической механики. Уравнение Паули для спина 1

Соответствие между классической и квантовой механикой можно, как известно, провести формально, не углубляясь в теорию Г-Я, заменяя энергию и импульс в классических уравнениях соответствующими операторами согласно рецепту

$$E \to \pi_0 \equiv i h\frac{\partial}{\partial t} - e\phi , \qquad /1.1/$$
$$\vec{p} \to \vec{\pi} \equiv -ih\frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \frac{e}{c}\vec{A},$$

где $(\phi, \vec{A})$ - потенциалы электромагнитного поля.

Например, если замену /1.1/ произвести в основном соотношении классической механики

$$E = \vec{p}^{\,2}/2m , \qquad /1.2/$$

то получим уравнение Шредингера для спина 0. Таким же путем из классических алгебраических соотношений между сохраняющимися величинами можно получить квантово-механическое уравнение для спина 1. Рассмотрим выражение для момента импульса

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}]. \qquad /1.3/$$

Умножим /1.3/ векторно на $\vec{p}$ и воспользуемся соотношением /1.2/. Получим

$$2mE\vec{r} = [\vec{p} \times \vec{M}] + \vec{p}(\vec{p}\vec{r}). \qquad /1.4/$$

Объединяя /1.3/ с /1.4/, получим следующую систему уравнений:

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}],$$
$$2mE\vec{r} = [\vec{p} \times \vec{M}] + \vec{p}s, \qquad /1.5/$$
$$s = (\vec{p}\vec{r}).$$

Второе из уравнений /1.5/ можно рассматривать как определение вектора момента энергии, который имеет вид [4]

$$\vec{T} = \frac{1}{2m}[\vec{p} \times \vec{M}].$$

Система /1.5/ представляет собой однородную алгебраическую систему уравнений относительно $s, \vec{r}, \vec{M}$. Она имеет определитель $D \equiv 2mE - \vec{p}^{\,2} = 0$.

Независимыми решениями являются компоненты вектора $\vec{r}$ или s и $\vec{M}$.

Система классических уравнений /1.5/ трансформируется в уравнения квантовой механики, если величины E и $\vec{p}$ заменить на соответствующие операторы согласно /1.1/. При этом величины s, $\vec{r}$, $\vec{M}$ переходят в соответствующие волновые функции U_s, $\vec{U}$, , $\vec{U}_M$. В результате получим следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\vec{U}_M = [\vec{\pi} \times \vec{U}] ,$$
$$2m\pi_0 \vec{U} = [\vec{\pi} \times \vec{U}_M] + \vec{\pi} U_s , \qquad /1.6/$$
$$U_s = (\vec{\pi}\vec{U}) .$$

Чтобы показать соответствие данной системы спину 1, запишем ее в виде уравнения второго порядка:

$$\vec{\pi}_0 \vec{U} = \frac{1}{2m}\vec{\pi}^2 \vec{U} - \frac{ieh}{2mc}[\vec{H} \times \vec{U}], \qquad /1.7/$$

$\vec{H}$ - вектор напряженности магнитного поля.

Последнее слагаемое в /1.7/ характеризует взаимодействие спина 1 с магнитным полем. Действительно, выражение в квадратных скобках можно переписать в виде

$$[\vec{H} \times \vec{U}] = (\hat{r}\vec{H})\vec{U},$$

где компоненты оператора $\hat{r}$ представляются трехрядными матрицами вида

$$\hat{r}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{r}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{r}_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем $\hat{r}_x^2 + \hat{r}_y^2 + \hat{r}_z^2 = -2$. Как известно, матрица $\hat{r}$ соответствует спину 1. Таким образом, уравнение /1.7/ есть не что иное, как уравнение Паули для спина 1. В квазиклассическом пределе система уравнений /1.6/ переходит в систему классических уравнений /1.5/.

Итак, установлено однозначное соответствие между алгебраическими уравнениями для сохраняющихся величин классической механики /1.5/ и дифференциальными уравнениями квантовой механики /1.6/. Уравнения /1.6/ описывают движение частиц со спином 1; они определяют 3-компонентную векторную волновую функцию $\vec{U}$. В нерелятивистском случае волновая функция частицы со спином 1/2 представляется в виде спинора, т.е. имеет 4 независимые компоненты. Таким образом, если поставить целью установление подобного соответствия классической механики квантовой механике спина 1/2, то необходимо расширить классическую систему уравнений /1.5/.

2. Система классических уравнений в базисе кватернионов. Уравнение Паули для спина 1/2

Расширение системы уравнений /1.5/ можно осуществить весьма естественным способом, а направление расширения легко обнаружится, если перепишем /1.5/, используя матричное представление. В качестве базисных матриц возьмем матрицы Паули σ. В этом представлении система /1.5/ примет вид

$$s + i(\hat{\sigma}\vec{M}) = (\hat{\sigma}\vec{p})(\hat{\sigma}\vec{r}),$$
$$2mE(\hat{\sigma}\vec{r}) = (\hat{\sigma}\vec{p})\{s + i(\hat{\sigma}\vec{M})\}. \qquad /2.1/$$

Соответствующие системе /1.5/ дифференциальные уравнения /1.6/ также можно переписать, используя матрицы Паули σ:

$$U_s + i(\hat{\sigma}\vec{U}_M) = (\hat{\sigma}\vec{\pi})(\hat{\sigma}\vec{U}),$$
$$2m\pi_0(\hat{\sigma}\vec{U}) = (\hat{\sigma}\vec{\pi})\{U_s + i(\hat{\sigma}\vec{U}_M)\}. \qquad /2.2/$$

Однако уравнения /2.2/, записанные в такой форме, будут справедливы только в отсутствие внешнего поля $(\phi, \vec{A})$ или при выполнении дополнительного условия $(\vec{H}\vec{U}) = 0$. Действительно, подставляя первое уравнение системы /2.2/ во второе, получим

$$2m\pi_0(\hat{\sigma}\vec{U}) = \{\pi^2 - \frac{eh}{c}(\hat{\sigma}\vec{H})\}(\hat{\sigma}\vec{U}). \qquad /2.3/$$

Приравнивая в /2.3/ выражения перед базисными матрицами $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$ получим, что

$$(\vec{H}\vec{U}) = 0. \qquad /2.4/$$

Запись уравнений /1.6/ в виде /2.2/ замечательна тем, что в уравнениях /2.3/ вместо оператора $(\vec{H}\hat{r})$ появляется оператор взаимодействия вида $(\vec{H}\hat{\sigma})$, характерный для спина 1/2. Таким образом, для перехода из уравнений /2.3/ к уравнениям Паули для спина 1/2 остается решить две проблемы. Первая из них – это избавиться от условия /2.4/, вторая – увеличить число независимых компонент волновой функции до четырех.

Вернемся к системе классических уравнений /2.2/. Из нее видно, что оператор $(\hat{\sigma}\vec{p})$ переводит $(\hat{\sigma}\vec{r})$ в $s + i(\hat{\sigma}\vec{M})$ и обратно, действуя на $s + i(\hat{\sigma}\vec{M})$, переводит в $(\hat{\sigma}\vec{r})$. Выражение $s + i(\hat{\sigma}\vec{M})$ соответствует представлению пары $(s, \vec{M})$ в виде кватерниона. Выражение $(\hat{\sigma}\vec{r})$ представляет собой усеченный кватернион или кватернион без единицы. Нетрудно видеть, что неполнота выражения $(\hat{\sigma}\vec{r})$ приводит к условию типа /2.4/. Дополним выражение $(\hat{\sigma}\vec{r})$ до полного кватерниона, присоединяя к нему скалярную переменную L, так что

$$(\hat{\sigma}\vec{r}) \to (L, \vec{r}) \equiv L + i(\hat{\sigma}\vec{r}).$$

Тогда вместо системы /2.1/ получим следующую расширенную систему уравнений:

$$s + i(\hat{\sigma}\vec{M}) = -i(\hat{\sigma}\vec{p})\{L + i(\hat{\sigma}\vec{r})\},$$
$$2mE\{L + i(\hat{\sigma}\vec{r})\} = i(\hat{\sigma}\vec{p})\{s + i(\hat{\sigma}\vec{M})\}. \qquad /2.5/$$

Соответствующие классической системе /2.5/ квантовые уравнения будут иметь вид

$$U_s + i(\hat{\sigma}\vec{U}_M) = -i(\hat{\sigma}\vec{\pi})\{U_\ell + i(\hat{\sigma}\vec{U})\},$$
$$2m\pi_0\{U_\ell + i(\hat{\sigma}\vec{U})\} = i(\hat{\sigma}\pi)\{U_s + i(\hat{\sigma}\vec{U}_M)\}. \qquad /2.6/$$

В уравнении второго порядка условие /2.4/ теряет силу, и мы получим уравнение Паули для спина 1/2 в кватернионном представлении:

$$2m\pi_0\{U_\ell + i(\hat{\sigma}\vec{U})\} = \{\vec{\pi}^2 - \frac{eh}{c}(\hat{\sigma}\vec{H})\}\{U_\ell + i(\hat{\sigma}\vec{U})\}. \qquad /2.7/$$

Перепишем классические уравнения /2.5/ в прежней форме, используя векторное и скалярное произведения. В такой записи они примут вид

$$2mEL = (\vec{p}\vec{M}),$$
$$\vec{M} = [\vec{r}\times\vec{p}] + \vec{p}L, \qquad /2.8/$$
$$2mE\vec{r} = [\vec{p}\times\vec{M}] + \vec{p}s,$$
$$s = (\vec{p}\vec{r}).$$

Выделяя векторную и скалярную части волновой функции, уравнения /2.7/ можно преобразовать к виду

$$2m\pi_0 U_\ell = \vec{\pi}^2 U_\ell - \frac{ieh}{c}(\vec{H}\vec{U}),$$
$$2m\pi_0\vec{U} = \vec{\pi}^2\vec{U} - \frac{ieh}{c}[\vec{H}\times\vec{U}] + \frac{ieh}{c}\vec{H}U_\ell. \qquad /2.9/$$

Записанная система уравнений совпадает с нерелятивистскими уравнениями работы [5].

Таким образом, процесс установления соответствия уравнений квантовой механики уравнениям классической механики потребовал введения новой скалярной переменной путем расширения радиуса-вектора до кватерниона. Данное расширение мы будем рассматривать как действительное расширение пространства измерений в классической механике. Однако, коль скоро мы ввели в классическую механику новую степень свободы, необходимо ввести и сопряженную ей величину - импульс. Таким образом, вектор импульса также дополняется до кватерниона. Применяя обозначения

$$Q_p = p_\ell + i(\hat{\sigma}\vec{p}), \quad \bar{Q}_p = p_\ell - i(\hat{\sigma}\vec{p}),$$
$$Q_M = s + i(\hat{\sigma}\vec{M}), \quad Q_r = L + i(\hat{\sigma}\vec{r}), \qquad /2.10/$$

систему классических уравнений можно записать в компактном виде:

$$Q_M = \bar{Q}_p Q_r,$$
$$2mEQ_r = Q_p Q_M. \qquad /2.11/$$

Уравнения /2.11/ факторизуют классическое соотношение

$$2mE = p_\ell^2 + \vec{p}^{\,2} \qquad /2.12/$$

в базисе кватернионов.

3. Релятивистские системы классических и волновых уравнений, соответствующие спину 1/2

В релятивистском случае систему алгебраических уравнений на сохраняющиеся величины, обобщающую уравнения /1.5/, получим, факторизуя основное релятивистское соотношение классической механики

$$p^\ell p_\ell = m^2 c^2, \quad (p_0^2 = E^2/c^2, \quad p_1^2 = -p_x^2) \qquad /3.1/$$

в пространстве функции s, x_i, M_{ij}. В результате получим следующую систему однородных алгебраических уравнений:

$$M_{ij} = x_i p_j - x_j p_i,$$
$$m^2 c^2 x_i = p^\ell M_{i\ell} + p_i s, \qquad /3.2/$$
$$s = p^\ell x_\ell.$$

Здесь M_{ij} - тензор момента импульса. Пространственные компоненты M_{ij} совпадают с компонентами 3-мерного вектора [1.3]: $M^{23} = M_x$, $-M^{13} = M_y$, $M^{12} = M_z$.
Компоненты же M^{01}, M^{02}, M^{03} составляют вектор

$$\vec{T} = t\vec{p} - E\vec{r}/c. \qquad /3.3/$$

Как видно, /3.3/ есть обобщение вектора момента энергии на релятивистский случай. Определитель системы /3.2/ равен

$$D = p^\ell p_\ell - m^2 c^2 = 0.$$

Независимыми решениями являются компоненты вектора x_i $(i=0,1,2,3)$. Релятивистские волновые уравнения, обобщающие уравнения Прока [6], получим, если в /3.2/ произведем замену p_i на соответствующие операторы:

$$p_i \to \pi_i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{e}{c}A_i, \quad A_i = \{c\phi, \vec{A}\}. \qquad /3.4/$$

В результате имеем систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$U_{ij} = \pi_j U_i - \pi_i U_j,$$
$$m^2c^2 U = \pi^\ell U_{i\ell} + \pi_i U, \qquad /3.5/$$
$$U = \pi^\ell U_\ell.$$

Они представляют обобщение уравнений Прока в рамках модифицированного формализма Штюкельберга и описывают частицы со спином /0,1/ [7]. Интересно, что подобные обобщения уравнений Прока предпринимались с целью устранения трудностей, возникающих при описании движения векторных частиц в электромагнитном поле.

Чтобы сравнить уравнения /3.5/ с уравнениями для спина 1/2, запишем их в матричной форме, используя базис матриц Дирака:

$$\gamma_i \ (i = 0,1,2,3),$$
$$\gamma_0^2 = 1, \quad \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = -1,$$
$$\gamma_i\gamma_k + \gamma_k\gamma_i = g_{ik}.$$

Обозначим через $M^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu}$ сумму вида

$$M^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu} = M^{01}\gamma_0\gamma_1 + M^{02}\gamma_0\gamma_2 + M^{03}\gamma_0\gamma_3 + $$
$$+ M^{12}\gamma_1\gamma_2 + M^{13}\gamma_1\gamma_3 + M^{23}\gamma_2\gamma_3. \qquad /3.6/$$

Уравнения /3.5/ в этих обозначениях примут следующий вид:

$$U + U^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu} = (\pi^{\mu}\gamma_{\mu})(U^{\mu}\gamma_{\mu}),$$
$$c^2 m^2 U^{\mu}\gamma_{\mu} = (\pi^{\mu}\gamma_{\mu})(U + U^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu}). \qquad /3.7/$$

Далее будем повторять тот же ход рассуждений, что и в нерелятивистском случае.

Запишем /3.7/ в виде системы уравнений второго порядка. Получим

$$c^2 m^2 U^{\mu}\gamma_{\mu} = (\pi^{\mu}\pi_{\mu} + \frac{ieh}{c}F^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu})(U^{\mu}\gamma_{\mu}). \qquad /3.8/$$

Здесь $F^{\mu\nu}$ - тензор напряженностей магнитного поля. Левая часть /3.8/ содержит линейную комбинацию базисных матриц вида γ_{μ}, правая - линейную комбинацию матриц вида γ_{μ} и $\tilde{\gamma}_{\mu}$, где $\tilde{\gamma}_{\mu}$ - матрица с компонентами

$$\tilde{\gamma}_0 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3, \quad \tilde{\gamma}_1 = \gamma_0\gamma_2\gamma_3, \quad \tilde{\gamma}_2 = \gamma_0\gamma_3\gamma_1, \quad \tilde{\gamma}_3 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2.$$

Приравнивая выражения при различных базисных матрицах, получим, что запись уравнений /3.5/ в форме /3.8/ справедлива только при выполнении условия

$$F^{\mu\nu}U^{n} = 0, \quad (\mu \neq \nu \neq n). \qquad /3.9/$$

Причина появления условия /3.9/ ясна: оно возникло из-за неполноты базиса, в котором производилась факторизация соотношения /3.1/. Полный базис образует совокупность матриц

$$\gamma_{\mu}, \gamma_{\mu\nu}, \tilde{\gamma}_{\mu}, \gamma_5, \quad (\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3). \qquad /3.10/$$

Факторизуя /3.1/ в базисе /3.10/, получим следующую систему классических уравнений, обобщающих уравнения /3.2/:

$$s + M^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu} + M_5\gamma_5 = (p^{\mu}\gamma_{\mu})(x^{\mu}\gamma_{\mu} + \tilde{x}^{\mu}\tilde{\gamma}_{\mu}),$$
$$c^2 m^2 (x^{\mu}\gamma_{\mu} + \tilde{x}^{\mu}\gamma_{\mu}) = (p^{\mu}\gamma_{\mu})(s + M^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu} + M_5\gamma_5). \qquad /3.11/$$

Таким образом, факторизация основного соотношения классической механики /3.1/ в полном базисе /3.10/ может быть осуществлена ценой введения дополнительных степеней свободы, а именно - псевдовектора $\tilde{x}^{\mu}$ в 4-мерном пространстве Минковского. Расширенная система классических уравнений /3.11/ в квантовом случае дает уравнения, описывающие частицы со спином 1/2. Заменяя p^{μ} в /3.11/ на соответствующие операторы согласно /3.4/, получим систему волновых уравнений первого порядка:

$$U + U^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu} + U_5\gamma_5 = (\pi^{\mu}\gamma_{\mu})(U^{\mu}\gamma_{\mu} + \tilde{U}^{\mu}\tilde{\gamma}_{\mu}),$$
$$c^2 m^2 (U^{\mu}\gamma_{\mu} + \tilde{U}^{\mu}\tilde{\gamma}_{\mu}) = (\pi^{\mu}\gamma_{\mu})(U + U^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu} + U_5\gamma_5). \qquad /3.12/$$

Если эти уравнения переписать в виде уравнения второго порядка относительно волновой функции

$$\Phi(U^{\mu}, \tilde{U}^{\mu}) \equiv U^{\mu}\gamma_{\mu} + \tilde{U}^{\mu}\tilde{\gamma}_{\mu},$$

то оператор второго порядка будет иметь вид

$$\hat{P} = (\pi^{\mu}\gamma_{\mu})(\pi^{\mu}\gamma_{\mu}).$$

Уравнения /3.12/ обстоятельно изучены в работах [8-10]. Там же установлена связь уравнений /3.12/ с уравнениями Дирака.

Расширение системы пространственных переменных требует введения соответствующего обобщенного импульса как генератора преобразования трансляции по этим переменным. Системе координат, записанной через базисные матрицы γ_{μ}, $\tilde{\gamma}_{\mu}$:

$$\hat{X} = x^{\mu}\gamma_{\mu} + \tilde{x}^{\mu}\tilde{\gamma}_{\mu}, \qquad /3.13/$$

отвечает вектор импульса

$$\hat{P} = p^{\mu}\gamma_{\mu} + \tilde{p}^{\mu}\tilde{\gamma}_{\mu}. \qquad /3.14/$$

Теперь естественно попытаться переписать уравнения /3.11/ с учетом /3.14/. Тогда мы должны были бы записать следующую систему уравнений

$$S + M^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu} + M_5\gamma_5 = (p^{\mu}\gamma_{\mu} + \tilde{p}^{\mu}\tilde{\gamma}_{\mu})(x^{\mu}\gamma_{\mu} + \tilde{x}^{\mu}\tilde{\gamma}_{\mu}),$$
$$c^2 m^2 (x^{\mu}\gamma_{\mu} + \tilde{x}^{\mu}\tilde{\gamma}_{\mu}) = (p^{\mu}\gamma_{\mu} + \tilde{p}^{\mu}\tilde{\gamma}_{\mu})(S + M^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu} + M_5\gamma_5). \qquad /3.15/$$

Однако эти уравнения уже нельзя считать справедливыми, ибо они не соответствуют основному соотношению классической механики в расширенном пространстве-времени

$$p^{\mu}p_{\mu} + \tilde{p}^{\mu}\tilde{p}_{\mu} = m^2 c^2, \qquad /3.16/$$

поскольку

$$(p^{\mu}\gamma_{\mu} + \tilde{p}^{\mu}\tilde{\gamma}_{\mu})^2 \neq p^{\mu}p_{\mu} + \tilde{p}^{\mu}\tilde{p}_{\mu}.$$

Таким образом, последовательное увеличение числа компонент как пространственного, так и импульсного векторов приводит к тому, что эти векторы уже невозможно представить в матричной форме. В этом случае базисные матрицы γ_μ и $\tilde{\gamma}_\mu$, а следовательно, и матрицы I, $\gamma_{\mu\nu}$, γ_5 претерпевают качественные изменения и превращаются в базисные единицы октавы. Такое превращение представляется естественным, поскольку как сумму вида

$$Q_0 = S + M^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu} + M_5\gamma_5$$

/так называемые четные d-числа/, так и сумму вида

$$Q_0\gamma_0 = x^\mu\gamma_\mu + \tilde{x}^\mu\tilde{\gamma}_\mu$$

/нечетные d-числа/ можно записать в форме бикватерниона [11]

$$Q_0 = q_1 + iq_2 . \qquad /3.17/$$

q_1, q_2 - гамильтоновы кватернионы, i - мнимая единица. Октава же отличается от /3.17/ тем, что мнимая единица i становится одним из базисных единиц октавы. Квадрат такой октавы будет иметь вид

$$Q\bar{Q} = q_1\bar{q}_1 - q_2\bar{q}_2 . \qquad /3.18/$$

Октаву с данной сигнатурой квадрата еще называют "расщепленной" октавой.

Рассмотрим более подробно квадрат пространственной октавы

$$Q_x^2 = x^2 + y^2 + z^2 + L^2 - c^2(t^2 + t_x^2 + t_y^2 + t_z^2) \qquad /3.19/$$

или

$$Q_x^2 = q_x\bar{q}_x - c^2 q_t\bar{q}_t .$$

Кватернион q_x представлен через x, y, z, L, так что

$$q_x = L + xi + yj + zk , \qquad /3.20/$$

где i, j, k - кватернионные базисные единицы, которые будем называть пространственным кватернионом, а кватернион

$$q_t = t + t_x i + t_y j + t_z k \qquad /3.21/$$

- временным кватернионом.

Выражая импульс через октаву, запишем основное соотношение классической механики в виде:

$$Q_p\bar{Q}_p = q_E\bar{q}_E - q_p\bar{q}_p = m^2c^2 . \qquad /3.22/$$

Факторизуя /3.22/ в базисе октав вместо /3.15/, получим следующую систему уравнений

$$Q_M = \bar{Q}_p Q_x ,$$
$$m^2c^2 Q_x = Q_p Q_M , \qquad /3.23/$$

где Q_M - октава момента импульса.

Подробный анализ и физическая интерпретация величин Q_x, Q_M, Q_p - предмет дальнейших исследований.

Автор выражает признательность акад. БАН И.Тодорову, проф. В.Г.Кадышевскому и А.Б.Пестову за стимулирующее обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р2-80-619, Дубна, 1980.
2. Березин Ф.А., Маринов М.С. Письма в ЖЭТФ, 1975, т.21, с.678-680.
3. Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р2-80-731, Дубна, 1980; ОИЯИ, Р2-80-732, Дубна, 1980.
4. Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р4-12774, Дубна, 1979.
5. Пестов А.Б. ОИЯИ, Р2-12557, Дубна, 1979.
6. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Релятивистская квантовая теория. "Наука", М., 1968, ч.1.
7. Young J.A., Bludman S.A. Phys.Rev., 1963, v.131, No.5, p.2326.
8. Lanezos C.Z. J.Math.Phys., 1965, v.8, No.3, p.417.
9. Пестов А.Б. ТМФ, 1978, т.34, №1, с.48.
10. Пестов А.Б. ОИЯИ, Р2-12886, Дубна, 1979.
11. Казакова Г. Векторная алгебра. "Мир", М., 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 мая 1981 года.