объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-81-262

В.К.Мельников

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Направлено в журнал "Функциональный анализ"

1981

Полученные в работе[1] законы сохранения обладают следующим примечательным свойством. Пусть L - дифференциальный оператор вида

$$L = \partial^{k_0+1} + \sum_{k=0}^{k_0-1} u_k \partial^k , \qquad k_0 > 0, \qquad /1/$$

где ∂ - оператор дифференцирования по пространственной переменной x. С оператором L вида /1/ тесно связано уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial x} + [U, F] = [\Gamma, F], \qquad /2/$$

где

$$U = \left| \begin{array}{c} 0 \\ \\ u_0 \dots u_{k_0-1} \quad 0 \end{array} \right|, \quad \Gamma = \left| \begin{array}{c|c} 0 & E_{k_0} \\ \hline \zeta^{k_0+1} & 0 \end{array} \right|. \qquad /3/$$

Уравнение /2/ имеет формальное решение вида

$$F - \sum_{m=-k_0}^{\infty} F_m \zeta^{-m}, \qquad /4/$$

причем, как показано в[1], элементы матриц F_m являются полиномами от функций $u_0, \dots, u_{k_0-1}$ и их производных по x. Кроме того, матрицы F_m могут быть подчинены условию: элемент $F_{m,\mu,\nu}$ матрицы F_m, стоящий на пересечении $(\mu+1)$ -й строки и $(\nu+1)$ -го столбца, $\mu, \nu = 0, 1, \dots, k_0$, является квазиоднородным многочленом ранга $m+\mu-\nu$ от функций $u_0, \dots, u_{k_0-1}$ и их производных по x. Это значит, что

$$F_{m,\mu,\nu} \equiv 0 \quad \text{при} \quad m+\mu-\nu < 0, \qquad /5/$$

а при $m+\mu-\nu = 0$ элемент $F_{m,\mu,\nu}$ является не зависящей от x константой. Более того, найдутся константы c_m, такие, что справедливо равенство

$$F_{m,\mu,m+\mu} = c_m \quad \text{при} \quad \max(0,-m) \le \mu \le \min(k_0, k_0-m). \qquad /6/$$

Далее, при $m+\mu-\nu>0$ каждый одночлен $F_{m,\mu,\nu,\alpha}$, входящий в $F_{m,\mu,\nu}$, при замене функций $u_k^{(s)}=\frac{\partial^s u_k}{\partial x^s}$ соответственно величинами $\lambda^{k_0-k+s+1}$ принимает вид $C_{m,\mu,\nu,\alpha}\lambda^{m+\mu-\nu}$, где $C_{m,\mu,\nu,\alpha}$ - отличная от нуля константа. Отсюда следует, что если $m+\mu-\nu>0$, то справедливо равенство

$$F_{m,\mu,\nu}\equiv 0 \qquad \text{при} \qquad u_0=\dots=u_{k_0-1}\equiv 0. \tag{7}$$

Определяемые с помощью матриц F_m операторы

$$a_m=\sum_{k=0}^{k_0} F_{m,0,k}\,\partial^k,$$

$$a_m^*=\sum_{k=0}^{k_0}\partial^{k_0-k}\cdot F_{m,k,k_0}+\sum_{k=1}^{k_0-1} u_k\sum_{k'=0}^{k-1}\partial^{k-k'-1}\cdot F_{m,k',k_0} \tag{8}$$

в силу /2/ и /4/ удовлетворяют операторному соотношению

$$a_m-a_m^*=L\,a_{m-k_0-1}-a^*_{m-k_0-1}\,L, \quad m>0. \tag{9}$$

Из равенств /8/ в силу /5/ и /6/ следует, что

$$a_0=a_0^*=c_0, \tag{10}$$

где c_0 - не зависящая от x константа. Отсюда по индукции легко доказывается равенство

$$a_{(k_0+1)n}=a^*_{(k_0+1)n}=0, \qquad n>0. \tag{11}$$

Действительно, в силу /8/ порядок оператора

$$\Delta_n=a_{(k_0+1)n}-a^*_{(k_0+1)n} \tag{12}$$

не превосходит k_0-1. С другой стороны, согласно /9/ и /12/, при $\Delta_n=0$ имеем

$$\Delta_{n+1}=[L,\ a_{(k_0+1)n}]. \tag{13}$$

С учетом сказанного выше отсюда следует, что оператор $a_{(k_0+1)n}$ имеет нулевой порядок, т.е.

$$a_{(k_0+1)n}=C_n, \tag{14}$$

причем константа C_n не зависит от x. Значит, из равенства $\Delta_n=0$ в силу /12/ и /14/ следует, что

$$a^*_{(k_0+1)n} = C_n ,$$ /15/

а согласно /13/ и /14/ - что $\Delta_{n+1} = 0$. Поскольку, согласно /10/, имеем $\Lambda_0 = 0$, то из приведенных рассуждений следует, что $\Lambda_n = 0$ при любом $n > 0$. Далее, из /14/, /15/ в силу /7/ и /8/ следует справедливость равенства /11/. Наконец, из /11/ в силу /8/ следует равенство

$$F_{(k_0+1)n,k,k_0} = 0, \quad n > 0, \qquad 0 \le k \le k_0 .$$ /16/

Пусть теперь

$$\Theta = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \zeta & \zeta\epsilon_1 & \dots & \zeta\epsilon_{k_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \zeta^{k_0} & \zeta^{k_0}\epsilon_1^{k_0} & \dots & \zeta^{k_0}\epsilon_{k_0}^{k_0} \end{Vmatrix} .$$ /17/

где $\epsilon_k = \exp(i\frac{2\pi k}{k_0+1})$, $k = 1,\dots, k_0$. Тогда матрица $G = \Theta^{-1}F\Theta$ в силу /2/ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial x} + [V, G] = \zeta[\Lambda, G],$$ /18/

где $V = \Theta^{-1}U\Theta$, а $\Lambda = \mathrm{diag}(1, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{k_0})$. Уравнение /18/ имеет формальное решение вида

$$G \sim \sum_{m=0}^{\infty} G_m \zeta^{-m},$$

где $G_0 = \mathrm{diag}(a_0, a_1, \dots, a_{k_0})$, а матрицы G_m при $m > 0$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$[\Lambda, G_m] - [V, G_{m-1}] - \frac{\partial}{\partial x} G_{m-1} = 0$$ /19/

и условию $G_m = 0$ при $V = 0$. Согласно /2/ элементы матриц G_m будут квазиоднородными многочленами ранга m от элементов матрицы V и ее производных по x. В силу /3/ и /17/ имеем

$$V = \sum_{k=0}^{k_0-1} V_k \zeta^{k-k_0} .$$

Отсюда согласно /19/ следует равенство

$$G_m = \sum_{k=0}^{mk_0-1} G_{m,k} \zeta^{k-mk_0},$$

где матрицы $G_{m,k}$ не зависят от ζ. Положим теперь при $m > k_0 + 1$

$$I_m = \sum_{\mu=\mu_m}^{m} \frac{1}{\mu - 1} Sp(\Lambda G_{\mu,(k_0+1)\mu-m}), \quad \mu_m = \left[\frac{m + k_0}{k_0 + 1}\right],$$

и рассмотрим величины

$$T_{m,r} = \frac{\partial I_m}{\partial a_r},$$

где a_r - диагональные элементы матрицы G_0. В работе[1] доказано равенство

$$\frac{\delta T_{m,r}}{\delta u_k} = \frac{\partial F_{m-1,k,k_0}}{\partial a_r}.$$

Отсюда на основе /16/ следует, что при $0 \leq k < k_0$, $0 \leq r \leq k_0$ справедливо равенство

$$\frac{\delta}{\delta u_k} T_{(k_0+1)n+1,\, r} \equiv 0, \quad n > 0. \qquad /20/$$

Согласно результатам работы[3], в силу /20/ найдутся полиномы $P_{n,r}$ от функций $u_0, \ldots, u_{k_0-1}$ и их производных по x, такие, что

$$T_{(k_0+1)n+1,r} = \frac{d}{dx} P_{n,r} \quad . \qquad /21/$$

Это значит, что определенные в[1] с помощью величин $T_{m,r}$ законы сохранения при $m = (k_0+1)n+1$ будут тривиальными.

В заключение отмечу, что равенство /11/ уже упоминалось мною ранее[4], а равенства /20/ и /21/ являются его очевидными следствиями. Неоднократные известные мне попытки переоткрывать эти факты вынудили меня опубликовать подробные доказательства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мельников В.К. Функциональный анализ, 1981, 15, №1, с.43-60.
2. Мельников В.К. Матем.сб., 1979, 108, с.378-392.
3. Гельфанд И.М., Дикий Л.А. УМН, 1975, XXX, вып.5, с.67-100.
4. Мельников В.К. ОИЯИ, Р5-12060, Дубна, 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 апреля 1981 года.