объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-81-249

В.К.Мельников

СИММЕТРИИ, ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Направлено в ТМФ

1981

Как известно[1-3], ряд важных с прикладной точки зрения уравнений допускает представление

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} - [u, \mathfrak{A}] + \eta[\Lambda, \mathfrak{A}] = 0, \qquad /1/$$

где $u = u(x, t)$ – квадратная матрица порядка r_0 с равными нулю диагональными элементами, Λ – диагональная матрица с различными диагональными элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r_0} \in \mathbf{C}$, а $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(x,t,\eta)$ – квадратная матрица порядка r_0, элементы которой зависят рационально от параметра η. Соотношение /1/ является необходимым и достаточным условием существования совместного решения ϕ уравнений

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + u\phi = \eta\Lambda\phi, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathfrak{A}\phi = 0,$$

удовлетворяющего в некоторой точке $x = x_0$, $t = t_0$ условию $\phi = E$.

Получаемые с помощью соотношения /1/ уравнения обладают рядом замечательных свойств. Среди них важную роль играют симметрии и как их следствие – законы сохранения и инвариантные решения этих уравнений. Начало изучению симметрий этого класса уравнений положено работой[4], в которой рассмотрена группа симметрий sine–Gordon -уравнения. В последовавших затем работах[5-7] исследованы группы симметрий уравнения КдВ, нелинейного уравнения Шредингера и ряда других.

В настоящей работе найдена бесконечномерная коммутативная группа, относительно которой инвариантно любое из уравнений, получаемых с помощью соотношения /1/. Далее показано, что найденные ранее локальные законы сохранения[3] являются следствием именно этих симметрий. Наконец, рассмотрены уравнения для инвариантных решений. Для этих уравнений также найдена группа симметрий и первые интегралы.

§1. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ

Положим

$$\mathfrak{A} = \sum_{m=0}^{n} A_m \eta^{n-m} + \sum_{s=0}^{s_0} \sum_{p=0}^{p_s} \frac{a_p^{(s)}}{(\eta - \eta_s)^{p_s - p + 1}}, \qquad /2/$$

где матрицы A_m и $a_p^{(s)}$ не зависят от η. Тогда согласно /1/ находим, что матрица A_0 удовлетворяет условию

$$[\Lambda, A_0] = 0, \qquad /3/$$

а при $m=1,\dots, n+1$ справедливо равенство

$$[\Lambda, A_m] - [u, A_{m-1}] - \frac{\partial}{\partial x} A_{m-1} = 0. \qquad /3'/$$

Далее, в силу /1/ матрица $\alpha_0^{(s)}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \alpha_0^{(s)}}{\partial x} + [u, \alpha_0^{(s)}] = \eta_s [\Lambda, \alpha_0^{(s)}], \qquad /4/$$

а при $p = 1,\dots, p_s$ справедливо рекуррентное соотношение

$$\frac{\partial \alpha_p^{(s)}}{\partial x} + [u, \alpha_p^{(s)}] = \eta_s [\Lambda, \alpha_p^{(s)}] + [\Lambda, \alpha_{p-1}^{(s)}]. \qquad /4'/$$

Наконец, вытекающее из /1/ нелинейное эволюционное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - [\Lambda, A_{n+1}] + \sum_{s=0}^{s_0} [\Lambda, \alpha_{p_s}^{(s)}] = 0. \qquad /5/$$

Полагая

$$A_0 = \mathrm{diag}(a_1,\dots, a_{r_0}),$$

из соотношения /3'/ при $m=1$ легко находим, что величины a_r не зависят от x. Далее, нетрудно видеть, что соотношение /3'/ определяет диагональные элементы матрицы A_{m-1} с точностью до не зависящих от x величин, а элементы матрицы A_m, стоящие вне главной диагонали, соотношение /3'/ определяет однозначно. Наконец, известно [3], что элементы матриц A_m, удовлетворяющих соотношениям /3/ и /3'/, при любом $m>0$ являются полиномами от элементов матрицы u и ее производных по x до $(m-1)$ -го порядка. Исходя из этого факта, положим

$$A_m = \sum_{\mu=0}^{m} A_{m,\mu} , \qquad /6/$$

где матрицы $A_{m,\mu}$ определены так, чтобы их элементы либо равнялись нулю, либо являлись квазиоднородными полиномами ранга μ от элементов матрицы u и ее производных по x соответствующего порядка *. Тогда нетрудно видеть, что элементы матриц

---

* Полином Q от элементов матрицы u и ее производных по x называется квазиоднородным ранга m, если при подстановке в Q величины λ^{k+1} вместо элементов матрицы $u^{(k)} = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}$ каждый одночлен Q_α принимает вид $c_\alpha \lambda^m$, где c_α - отличная от нуля константа.

$$A^*_m = A_{m,m} \tag{7}$$

зависят линейно от диагональных элементов a_r матрицы A_0, причем справедливы равенства

$$A^*_m = \sum_{r=1}^{r_0} a_r \frac{\partial A^*_m}{\partial a_r}, \quad A_m = A^*_m + \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{r=1}^{r_0} a_{m-\mu,r} \frac{\partial A^*_\mu}{\partial a_r}, \tag{8}$$

где величины $a_{m-\mu,r}$ не зависят от x. Очевидно, что матрицы A^*_m и $\frac{\partial A^*_m}{\partial a_r}$ удовлетворяют равенствам /3/ и /3'/.

Положим теперь

$$\alpha_0^{(s)} = \phi_s C_0^{(s)} \phi_s^{-1}, \tag{9}$$

где $\phi_s = \phi_s(x)$ - решение уравнения

$$\phi'_x + u\phi = \eta_s \Lambda\phi,$$

удовлетворяющее условию $\phi_s = E$ при некотором $x = x_0$, а матрица $C_0^{(s)}$ не зависит от x. Нетрудно видеть, что так определенная матрица $\alpha_0^{(s)}$ удовлетворяет уравнению /4/ и условию $\alpha_0^{(s)} = C_0^{(s)}$ при $x = x_0$. Далее, положим $\beta_0^{(s)} = C_0^{(s)}$, а при $p > 0$ определим $\beta_p^{(s)}$ с помощью равенства

$$\beta_p^{(s)} = C_p^{(s)} + \int_{x_0}^{x} [\phi_s^{-1}(z)\Lambda\phi_s(z), \ \beta_{p-1}^{(s)}(z)]dz,$$

где матрица $C_p^{(s)}$ не зависит от x. Тогда нетрудно убедиться, что матрицы

$$\alpha_p^{(s)} = \phi_s \beta_p^{(s)} \phi_s^{-1} \tag{9'}$$

удовлетворяют соотношению /4'/ и условию $\alpha_p^{(s)} = C_p^{(s)}$ при $x = x_0$, $p = 1, \dots, p_s$.

Пусть теперь

$$\sigma = \prod_{s=0}^{s_0} (\eta - \eta_s)^{p_s+1}, \qquad \sigma_s = \frac{\sigma}{(\eta - \eta_s)^{p_s+1}},$$

$$C = \sum_{s=0}^{s_0} \frac{\sigma_s(\eta)}{\sigma_s(\eta_s)} \sum_{p=0}^{p_s} \hat{C}_p^{(s)} (\eta - \eta_s)^p, \tag{10}$$

где матрицы $\hat{C}_p^{(s)}$ связаны с матрицами $C_p^{(s)}$ равенством

$$C_p^{(s)} = \frac{1}{\sigma_s(\eta_s)} \sum_{q=0}^{p} \frac{1}{q!} \hat{C}_{p-q}^{(s)} \frac{\partial^q \sigma_s(\eta)}{\partial \eta^q} \Big|_{\eta=\eta_s},$$

позволяющим однозначно определить матрицы $\hat{C}_p^{(s)}$ по данным матрицам $C_p^{(s)}$. Возьмем теперь матрицу

$$A = \phi C \phi^{-1} \ , \qquad /11/$$

где $\phi = \phi(x, \eta)$ – решение уравнения

$$\phi'_x + u\phi = \eta\Lambda\phi \ , \qquad /12/$$

удовлетворяющее условию $\phi = E$ при $x = x_0$ и любом $\eta \in \mathbf{C}$, а матрица C определена согласно /10/. Положим теперь

$$A = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p^{(s)} (\eta - \eta_s)^p \ . \qquad /13/$$

Матрица A в силу /11/ и /12/ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial A}{\partial x} + [u, A] = \eta[\Lambda, A] \ . \qquad /14/$$

Отсюда легко следует, что коэффициенты $\alpha_p^{(s)}$ разложения /13/ удовлетворяют уравнениям /4/ и /4'/ и условиям $\alpha_p^{(s)} = C_p^{(s)}$ при $x = x_0$, $p = 0, 1, \dots, p_s$, т.е. совпадают с найденными ранее решениями /9/ и /9'/ этих уравнений.

Исходя из равенства /2/, положим

$$\sum_{s=0}^{s_0} \sum_{p=0}^{p_s} \frac{\alpha_p^{(s)}}{(\eta - \eta_s)^{p_s - p + 1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \eta^{-k} \ . \qquad /15/$$

Тогда справедливо равенство

$$\alpha_{k+1} = \sum_{s=0}^{s_0} \sum_{p=p_{s,k}}^{p_s} \frac{k!}{(p_s - p)!(k + p - p_s)!} \eta_s^{k+p-p_s} \alpha_p^{(s)} \ , \qquad /16/$$

где $p_{s,k} = \max(0, p_s - k)$. Далее, с помощью /1/ нетрудно убедиться, что при $k > 0$ справедливо рекуррентное соотношение

$$[\Lambda, \alpha_{k+1}] - [u, \alpha_k] - \frac{\partial}{\partial x}\alpha_k = 0 \ . \qquad /17/$$

Наконец, с учетом /16/ уравнение /5/ может быть записано в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [\Lambda, A_{n+1}] - [\Lambda, \alpha_1] \ . \qquad /18/$$

§2. СИММЕТРИИ

Уравнение /18/ инвариантно относительно преобразований из некоторой бесконечномерной коммутативной группы. Именно, мы покажем, что при замене

$$u \to u + \epsilon[\Lambda, \frac{\partial A^*_m}{\partial a_r}], \quad m > 0, \quad r = 1, \dots, r_0, \qquad /19/$$

уравнение /18/ сохраняет свой вид с точностью до членов порядка ϵ^2. Это означает, что решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = [\Lambda, \frac{\partial A^*_m}{\partial a_r}] \qquad /20/$$

будет при любом τ удовлетворять уравнению /18/, если это имеет место при каком-нибудь $\tau = \tau_0$. Таким образом, уравнение/20/ при любых $m > 0$ и $r = 1, \dots, r_0$ определяет однопараметрическую группу преобразований уравнения /18/. Как будет ясно из последующего, эти группы коммутируют между собой и, следовательно, являются однопараметрическими подгруппами некоторой бесконечномерной коммутативной группы. При этом необходимо отметить, что замена /19/ еще не определяет однозначно преобразование матрицы α_1, входящей в правую часть уравнения /18/.Как будет показано ниже, матрицу α_1 необходимо подвергнуть преобразованию

$$\alpha_1 \to \alpha_1 + \epsilon \sum_{k=1}^{m} [\alpha_k, \frac{\partial A^*_{m-k}}{\partial a_r}], \qquad /21/$$

где матрицы α_k связаны с матрицами $\alpha_p^{(s)}$ равенствами /15/ и /16/, а матрицы $\frac{\partial A^*_{m-k}}{\partial a_r}$ связаны с матрицами A_m равенствами /6/-/8/.

Для достижения намеченной цели выясним прежде всего, как меняются со временем элементы матриц $\partial A^*_m/\partial a_r$ в силу уравнения /18/. С этой целью положим

$$\frac{\partial \dot{A}^*_m}{\partial a_r} = P_{m,n,r} + Q_{m,r}, \qquad /22/$$

где точка означает дифференцирование по времени, а матрицы $P_{m,n,r}$ и $Q_{m,r}$ согласно /3'/ удовлетворяют соотношениям

$$[\Lambda, P_{m,n,r}] - [u, P_{m-1,n,r}] - \frac{\partial}{\partial x} P_{m-1,n,r} = [[\Lambda, A_{n+1}], \frac{\partial A^*_{m-1}}{\partial a_r}], \qquad /23/$$

$$[\Lambda, Q_{m,r}] - [u, Q_{m-1,r}] - \frac{\partial}{\partial x} Q_{m-1,r} = -[[\Lambda, \alpha_1], \frac{\partial A^*_{m-1}}{\partial a_r}]. \qquad /24/$$

На основании /3/ и /3'/ справедливо равенство

$$[[\Lambda, A_{n+1}], \frac{\partial A^*_{m-1}}{\partial a_r}] = -[\Lambda, \sum_{s=0}^{n} [A_{n-s}, \frac{\partial A^*_{m+s}}{\partial a_r}]] +$$

$$+[u, \sum_{s=0}^{n} [A_{n-s}, \frac{\partial A^*_{m+s-1}}{\partial a_r}]] + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{s=0}^{n} [A_{n-s}, \frac{\partial A^*_{m+s-1}}{\partial a_r}].$$

Таким образом, в силу /23/ матрицы

$$O_{m,n,r} = P_{m,n,r} + \sum_{s=0}^{n} [A_{n-s}, \frac{\partial A^*_{m+s}}{\partial a_r}] \qquad /25/$$

удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$[\Lambda, O_{m,n,r}] - [u, O_{m-1,n,r}] - \frac{\partial}{\partial x} O_{m-1,n,r} = 0. \qquad /26/$$

Из /6/-/8/, /22/ и /25/ видно, что элементы матрицы $O_{m,n,r}$ либо равны нулю, либо являются суммой квазиоднородных полиномов ранга μ, удовлетворяющего неравенству $m \le \mu \le m+n$. С другой стороны, в силу /3/ и /3'/ при любом $n \ge 0$ справедливо равенство

$$\sum_{s=0}^{n} [A_{n-s}, \frac{\partial A^*_{s}}{\partial a_r}] = 0. \qquad /27/$$

Значит, согласно /25/, имеем $O_{m,n,r} = 0$ при $m=0$. Тогда из /26/ следует, что элементы матрицы $O_{m,n,r}$ либо равны нулю, либо являются суммой квазиоднородных полиномов ранга μ, удовлетворяющего неравенству $0 \le \mu \le m-1$. Следовательно, при любом $m \ge 0$ имеем $O_{m,n,r} = 0$, т.е. справедливо равенство

$$P_{m,n,r} = \sum_{s=0}^{n} [\frac{\partial A^*_{m+s}}{\partial a_r}, A_{n-s}]. \qquad /28/$$

Далее, в силу /3/, /3'/ и /17/ справедливо равенство

$$[[\Lambda, \alpha_1], \frac{\partial A^*_{m-1}}{\partial a_r}] = [\Lambda, \sum_{k=1}^{m} [\alpha_k, \frac{\partial A^*_{m-k}}{\partial a_r}]] -$$

$$-[u, \sum_{k=1}^{m-1} [\alpha_k, \frac{\partial A^*_{m-k-1}}{\partial a_r}]] - \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=1}^{m-1} [\alpha_k, \frac{\partial A^*_{m-k-1}}{\partial a_r}].$$

Таким образом, согласно /24/, матрицы

$$K_{m,r} = Q_{m,r} + \sum_{k=1}^{m} [\alpha_k, \frac{\partial A^*_{m-k}}{\partial a_r}] \qquad /29/$$

удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$[\Lambda, K_{m,r}] - [u, K_{m-1,r}] - \frac{\partial}{\partial x} K_{m-1,r} = 0. \qquad /30/$$

С помощью /22/, /24/ и /29/ нетрудно убедиться, что $K_{m,r}=0$ при $m=1$. Значит, согласно /30/, при $m>1$ справедливо равенство

$$K_{m,r}=\sum_{\mu=0}^{m-2}\sum_{s=1}^{r_0} a_{m-\mu-2,r,s}\,\frac{\partial A^*_\mu}{\partial a_s}, \qquad /31/$$

где величины $a_{m-\mu-2,r,s}$ не зависят от x. Возьмем теперь бесконечно-дифференцируемую функцию $\omega=\omega(x)$, равную нулю при $x<x_0$ и единице при $x>x_1>x_0$, и положим $\hat{\alpha}_1=\omega\alpha_1$, а при $k>1$ определим матрицы $\hat{\alpha}_k$ с помощью соотношения /17/ так, чтобы при $x>x_1$ имело место равенство $\hat{\alpha}_k=\alpha_k$. Тогда справедливо равенство

$$\hat{\alpha}_k=\alpha^*_k+\sum_{\kappa=0}^{k-2}\sum_{r=1}^{r_0} b_{k-\kappa-2,r}\,\frac{\partial A^*_\kappa}{\partial a_r}, \qquad /32/$$

где величины $b_{k-\kappa-2,r}$ не зависят от x, а матрицы α^*_k равны нулю при $x<x_0$. Пусть теперь

$$\hat{K}_{m,r}=\hat{Q}_{m,r}+\sum_{k=1}^{m}\left[\hat{\alpha}_k,\ \frac{\partial A^*_{m-k}}{\partial a_r}\right],$$

где $\hat{Q}_{m,r}=\partial\dot{A}^*_m/\partial a_r$ при условии, что $\dot{u}=-[\Lambda,\hat{\alpha}_1]$. На основе /27/ и /32/ имеем $\hat{K}_{m,r}=0$ при $x<x_0$. Поскольку матрицы $\hat{K}_{m,r}$ удовлетворяют соотношению /30/, то отсюда следует, что $\hat{K}_{m,r}=0$ при любом x. Однако, при $x>x_1$ получим, что $K_{m,r}=\hat{K}_{m,r}$, т.е. при $x>x_1$ справедливо равенство $K_{m,r}=0$. Отсюда в силу /31/ следует, что $K_{m,r}=0$ при любом x, т.е. справедливо равенство

$$Q_{m,r}=\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial A^*_{m-k}}{\partial a_r},\ \alpha_k\right]. \qquad /33/$$

Посмотрим теперь, как изменятся матрицы A_{n+1} при замене /19/. С этой целью подставим в соотношение /3'/ вместо A_n матрицу $A_n+\epsilon F_{m,n,r}$, а вместо u матрицу $u+\epsilon[\Lambda,\partial A^*_m/\partial a_r]$. Тогда для определения матрицы $F_{m,n,r}$ получим соотношение

$$[\Lambda,F_{m,n+1,r}]-[u,F_{m,n,r}]-\frac{\partial}{\partial x}F_{m,n,r}=\left[\left[\Lambda,\frac{\partial A^*}{\partial a_r}\right],A_n\right]. \qquad /34/$$

На основании /3/ и /3'/ справедливо равенство

$$[[\Lambda, \frac{\partial A^*_m}{\partial a_r}], A_n] = [\Lambda, \sum_{s=1}^{m} [A_{n+s}, \frac{\partial A^*_{m-s}}{\partial a_r}]] -$$

$$-[u, \sum_{s=1}^{m} [A_{n+s-1}, \frac{\partial A^*_{m-s}}{\partial a_r}]] - \frac{\partial}{\partial x} \sum_{s=1}^{m} [A_{n+s-1}, \frac{\partial A^*_{m-s}}{\partial a_r}].$$

Отсюда, согласно /34/, следует, что матрицы

$$G_{m,n,r} = F_{m,n,r} - \sum_{s=1}^{m} [A_{n+s-1}, \frac{\partial A^*_{m-s}}{\partial a_r}] \qquad /35/$$

удовлетворяют соотношению

$$[\Lambda, G_{m,n+1,r}] - [u, G_{m,n,r}] - \frac{\partial}{\partial x} G_{m,n,r} = 0. \qquad /36/$$

Нетрудно видеть, что $F_{m,0,r} = 0$. Далее, на основе /34/ следует $F_{m,1,r} = -[A_0, \frac{\partial A^*_m}{\partial a_r}]$. Значит, в силу /27/ и /35/ имеем $G_{m,n,r} = 0$ при $n=1$. Отсюда на основании /36/ следует, что элементы матрицы $G_{m,n,r}$ либо равны нулю, либо являются суммой квазиоднородных многочленов ранга μ, удовлетворяющего неравенству $0 \le \mu \le n-2$. С другой стороны, на основе /27/ и /35/ получаем, что элементы матрицы $G_{m,n,r}$ либо равны нулю, либо являются суммой квазиоднородных многочленов ранга μ, удовлетворяющего неравенству

$$m \le \mu \le m + n - 1. \qquad /37/$$

Отсюда следует, что $G_{m,n,r} = 0$ при $m > n-2$. Но в таком случае из /36/ видно, что при $n \ge m+2$ элементы матрицы $G_{m,n,r}$ либо равны нулю, либо являются суммой квазиоднородных многочленов ранга μ, удовлетворяющего неравенству $0 \le \mu \le n-m-2$. Следовательно, согласно /37/, $G_{m,n,r} = 0$ при $m > n-m-2$, т.е. при $2m > n-2$. Повторив это рассуждение k раз, мы на основе /37/ получаем, что $G_{m,n,r} = 0$ при $km > n-2$, т.е. при любых $m>0$ и $n>0$. Таким образом, справедливо равенство

$$F_{m,n+1,r} = \sum_{s=1}^{m} [A_{n+s}, \frac{\partial A^*_{m-s}}{\partial a_r}]. \qquad /38/$$

Из равенств /28/ и /38/ в силу /27/ следует равенство

$$P_{m,n,r} - F_{m,n+1,r} = 0. \qquad /39/$$

Из этого равенства следует инвариантность уравнения /18/ относительно замены /20/ при $\alpha_1 = 0$.

Посмотрим теперь, как изменяются матрицы α_k при замене /19/. Сделав в соотношении /17/ замену

$$u \to u + \epsilon[\Lambda, \frac{\partial A^*_m}{\partial a_r}], \qquad \alpha_k \to \alpha_k + \epsilon\delta_{k,m,r},$$

получим равенство

$$[\Lambda, \delta_{k+1,m,r}] - [u, \delta_{k,m,r}] - \frac{\partial}{\partial x}\delta_{k,m,r} = [[\Lambda, \frac{\partial A^*_m}{\partial a_r}], \alpha_k].$$

В силу /3/, /3'/ и /17/ справедливо равенство

$$[[\Lambda, \frac{\partial A^*_m}{\partial a_r}], \alpha_k] + [\Lambda, \sum_{s=0}^{m-1}[\frac{\partial A^*_{m-s-1}}{\partial a_r}, \alpha_{k+s+1}]] -$$

$$-[u, \sum_{s=0}^{m-1}[\frac{\partial A^*_{m-s-1}}{\partial a_r}, \alpha_{k+s}]] - \frac{\partial}{\partial x}\sum_{s=0}^{m-1}[\frac{\partial A^*_{m-s-1}}{\partial a_r}, \alpha_{k+s}] = 0.$$

Отсюда следует, что матрицы

$$\beta_{k,m,r} = \delta_{k,m,r} - \sum_{s=0}^{m-1}[\alpha_{k+s}, \frac{\partial A^*_{m-s-1}}{\partial a_r}] \qquad /40/$$

удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$[\Lambda, \beta_{k+1,m,r}] - [u, \beta_{k,m,r}] - \frac{\partial}{\partial x}\beta_{k,m,r} = 0, \ k > 0. \qquad /41/$$

Соотношение /41/ не определяет единственным образом матрицы $\beta_{k,m,r}$. Покажем, что требование $\beta_{k,m,r} = 0$ согласуется как с уравнениями /4/, /4'/, так и с уравнением /14/. С этой целью совершим в уравнении /12/ замену

$$u \to u + \epsilon[\Lambda, \frac{\partial A^*_m}{\partial a_r}], \qquad \phi \to \phi + \epsilon\phi\phi_{m,r}.$$

В результате получим

$$\frac{\partial \phi_{m,r}}{\partial x} = -\phi^{-1}[\Lambda, \frac{\partial A^*_m}{\partial a_r}]\phi.$$

Далее, в силу /3/, /3'/, и /12/ справедливо равенство

$$\phi^{-1}[\Lambda, \frac{\partial A^*_m}{\partial a_r}]\phi = \frac{\partial}{\partial x}\{\phi^{-1}\sum_{\mu=0}^{m-1}\frac{\partial A^*_{m-\mu-1}}{\partial a_r}\eta^{\mu}\phi\}.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\phi_{m,r} = C_{m,r} - \phi^{-1}\sum_{\mu=0}^{m-1}\frac{\partial A^*_{m-\mu-1}}{\partial a_r}\eta^{\mu}\phi,$$

где матрица $C_{m,r}$ не зависит от x. Таким образом, решение $\hat{\phi}$ возмущенного уравнения /12/ имеет вид

$$\hat{\phi} = \phi + \epsilon\phi C_{m,r} - \epsilon\sum_{\mu=0}^{m-1}\frac{\partial A^*_{m-\mu-1}}{\partial a_r}\eta^{\mu}\phi + \dots .$$

Сделаем теперь в уравнении /14/ замену

$$u \to u + \epsilon[\Lambda, \frac{\partial A^*_m}{\partial a_r}], \qquad A \to A + \epsilon\Delta_{m,r} \ .$$

В результате получим равенство

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta_{m,r} + [u, \Delta_{m,r}] - \eta[\Lambda, \Delta_{m,r}] = -[[\Lambda, \frac{\partial A^*_m}{\partial a_r}], A] \ .$$

Согласно /3/, /3'/ и /14/, имеем

$$[[\Lambda, \frac{\partial A^*_m}{\partial a_r}], A] + \eta[\Lambda, \sum_{\mu=0}^{m-1} [\frac{\partial A^*_{m-\mu-1}}{\partial a_r}, A]\eta^{\mu}] -$$
$$-[u, \sum_{\mu=0}^{m-1} [\frac{\partial A^*_{m-\mu-1}}{\partial a_r}, A]\eta^{\mu}] - \frac{\partial}{\partial x}\sum_{\mu=0}^{m-1} [\frac{\partial A^*_{m-\mu-1}}{\partial a_r}, A]\eta^{\mu} = 0 .$$

Отсюда следует, что матрица

$$\Delta^*_{m,r} = \Delta_{m,r} - \sum_{\mu=0}^{m-1} [A, \frac{\partial A^*_{m-\mu-1}}{\partial a_r}]\eta^{\mu} \qquad /42/$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta^*_{m,r} + [u, \Delta^*_{m,r}] - \eta[\Lambda, \Delta^*_{m,r}] = 0 \ .$$

Решение $\Delta^*_{m,r} = 0$ этого уравнения соответствует выбору решения $\hat{A}$ возмущенного уравнения /14/ вида $\hat{A} = \hat{\phi}\hat{C}\hat{\phi}^{-1}$, где $\hat{C} = C + \epsilon C^*_{m,r}$, причем матрица C определена с помощью /10/, а $C^*_{m,r} = [C, C_{m,r}]$.

Положим теперь

$$\Delta_{m,r}' = \sum_{p=0}^{\infty} \delta^{(s)}_{m,r,p} (\eta - \eta_s)^p \ .$$

Далее, положим

$$\sum_{s=0}^{s_0} \sum_{p=0}^{p_s} \frac{\delta^{(s)}_{m,r,p}}{(\eta-\eta_s)^{p_s - p + 1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{k,m,r}\, \eta^{-k} \ .$$

Отсюда, согласно равенству /42/ при $\Delta^*_{m,r} = 0$ имеем

$$\delta_{k+1,m,r} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=0}^{s_0} \sum_{\mu=0}^{m} [\oint_{\Gamma} \frac{A\eta^{k+\mu}}{(\eta-\eta_s)^{p_s+1}} d\eta, \frac{\partial A^*_{m-\mu-1}}{\partial a_r}],$$

где интегрирование ведется по замкнутому контуру Γ, ограничивающему область, содержащую точки $\eta = 0$ и $\eta = \eta_s$, $s = 0, \ldots, s_0$.
В силу равенств /13/ и /16/ имеем

$$a_{k+\mu+1} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=0}^{s_0} \oint_{\Gamma} \frac{A\eta^{k+\mu}}{(\eta-\eta_s)^{p_s+1}} d\eta .$$

Значит, справедливо равенство

$$\delta_{k,m,r} = \sum_{s=0}^{m-1} [a_{k+s}, \frac{\partial A^*_{m-s-1}}{\partial a_r}],$$

что соответствует $\beta_{k,m,r} = 0$ в равенстве /40/. Отсюда следует равенство

$$\delta_{1,m,r} = \sum_{k=1}^{m} [a_k, \frac{\partial A^*_{m-k}}{\partial a_r}], \qquad /43/$$

что находится в полном соответствии с /21/.

Из равенств /33/ и /43/ следует, что

$$Q_{m,r} + \delta_{1,m,r} = 0. \qquad /44/$$

Равенства /39/ и /44/ означают, что при замене /19/, /21/ уравнение /18/ сохраняет свой вид с точностью до членов порядка ϵ^2. Отсюда следует, что уравнение /20/ вместе с уравнением

$$\frac{\partial a_k}{\partial r} = \sum_{s=0}^{m-1} [a_{k+s}, \frac{\partial A^*_{m-s-1}}{\partial a_r}], \quad k > 0, \qquad /45/$$

определяют однопараметрическую группу, относительно которой инвариантно уравнение /18/. Поскольку уравнение /20/ является частным случаем уравнения /18/, то из изложенного выше следует, что преобразования, порождаемые уравнением /20/ с разными наборами индексов m и r, коммутируют между собой.

§3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Следствием найденных выше симметрий являются приводимые ниже законы сохранения. Положим

$$T_{m,r} = Sp(\Lambda \frac{\partial A^*_{m+1}}{\partial a_r}), \; m > 0, \; r = 1,\dots,r_0. \qquad /46/$$

Тогда на основе /22/ имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} T_{m,r} = Sp(\Lambda P_{m+1,n,r}) + Sp(\Lambda Q_{m+1,r}). \qquad /47/$$

В силу равенств /27/ и /28/ имеем

$$Sp(\Lambda P_{m+1,n,r}) = \sum_{s=1}^{m+1} Sp([\Lambda, A_{n+s}] \frac{\partial A^*_{m-s+1}}{\partial a_r}). \qquad /48/$$

Далее, согласно /3/ и /3'/ при $m-s \geq 0$ следует

$$Sp([\Lambda, A_{n+s}]\frac{\partial A^*_{m-s+1}}{\partial a_r}) = -\frac{\partial}{\partial x} Sp(\sum_{\sigma=0}^{m-s} A_{n+s+\sigma} \frac{\partial A^*_{m-s-\sigma}}{\partial a_r}).$$

Отсюда на основе /48/ получаем равенство

$$Sp(\Lambda P_{m+1,n,r}) = -\frac{\partial}{\partial x} Sp(\sum_{\mu=1}^{m} \mu A_{n+\mu} \frac{\partial A^*_{m-\mu}}{\partial a_r}). \qquad /49/$$

С другой стороны, в силу равенства /33/ имеем

$$Sp(\Lambda Q_{m+1,r}) = \sum_{k=1}^{m+1} Sp([\Lambda, \frac{\partial A^*_{m-k+1}}{\partial a_r}]\alpha_k). \qquad /50/$$

Согласно /3/, /3'/ при $m-k \geq 0$ имеем

$$Sp([\Lambda, \frac{\partial A^*_{m-k+1}}{\partial a_r}]\alpha_k) = \frac{\partial}{\partial x} Sp(\sum_{s=0}^{m-k} \frac{\partial A^*_{m-k-s}}{\partial a_r}\alpha_{k+s}).$$

Отсюда на основании /50/ следует равенство

$$Sp(\Lambda Q_{m+1,r}) = \frac{\partial}{\partial x} Sp(\sum_{k=1}^{m} k \frac{\partial A^*_{m-k}}{\partial a_r}\alpha_k). \qquad /51/$$

Таким образом, в силу /47/, /49/ и /51/ имеет место локальный закон сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t} T_{m,r} + \frac{\partial}{\partial x} X_{m,n,r} = 0, \qquad /52/$$

где величина $T_{m,r}$ определена с помощью равенства /46/, а

$$X_{m,n,r} = Sp(\sum_{\mu=1}^{m} \mu A_{n+\mu} \frac{\partial A^*_{m-\mu}}{\partial a_r}) - Sp(\sum_{k=1}^{m} k \frac{\partial A^*_{m-k}}{\partial a_r}\alpha_k). \qquad /53/$$

В том случае, когда в уравнении /18/ $\alpha_1 = 0$, связь между инвариантностью этого уравнения относительно замены /19/ и законами сохранения /52/ может быть прослежена с помощью обычного лагранжева подхода. В соответствии с /6/-/8/ положим

$$A_{n+1} = A^*_{n+1} + \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{r=1}^{r_0} a_{n-\mu,r} \frac{\partial A^*_\mu}{\partial a_r}. \qquad /54/$$

Пусть, далее,

$$A'_{n+2} = \frac{1}{n+1} A^*_{n+2} + \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{r=1}^{r_0} \frac{1}{\mu} a_{n-\mu,r} \frac{\partial A^*_{\mu+1}}{\partial a_r}, \qquad /55/$$

где постоянные $a_{n-\mu,r}$ те же самые, что и в равенстве /54/. Рассмотрим теперь функцию Лагранжа $\mathfrak{L}$ вида

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} Sp(\dot{u}\, v) + Sp(\Lambda A'_{n+2}), \qquad /56/$$

где матрица v связана с u равенством

$$u = [\Lambda, v]. \qquad /57/$$

Сделаем теперь в /56/ замену

$$u \to u + \Delta u, \quad v \to v + \Delta v, \quad \Delta u = [\Lambda, \Delta v].$$

Тогда приращение $\Delta\mathcal{L}$ функции Лагранжа $\mathcal{L}$ можно записать в виде

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\dot{u}\Delta v + v\Delta\dot{u}) + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Sp}\{ \frac{\partial\, \mathrm{Sp}(\Lambda A'_{n+2})}{\partial \tilde{u}^{(k)}} \Delta u^{(k)} \} .$$

Положим теперь для $k = 1, \ldots, n$

$$p_k = \sum_{\kappa=0}^{n-k} (-1)^{\kappa} \frac{\partial^{\kappa}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial\, \mathrm{Sp}(\Lambda A'_{n+2})}{\partial \tilde{u}^{(k+\kappa)}} .$$

Из этого равенства следует, что

$$\frac{\partial\, \mathrm{Sp}(\Lambda A'_{n+2})}{\partial \tilde{u}} = \frac{\delta\, \mathrm{Sp}(\Lambda A'_{n+2})}{\delta \tilde{u}} + \frac{\partial p_1}{\partial x},$$

где

$$\frac{\delta\, \mathrm{Sp}(\Lambda A'_{n+2})}{\delta \tilde{u}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} \frac{\partial\, \mathrm{Sp}(\Lambda A'_{n+2})}{\partial \tilde{u}^{(k)}},$$

при $0 < k < n$ имеем

$$\frac{\partial\, \mathrm{Sp}(\Lambda A'_{n+2})}{\partial \tilde{u}^{(k)}} = p_k + \frac{\partial p_{k+1}}{\partial x}, \quad \text{а} \quad \frac{\partial\, \mathrm{Sp}(\Lambda A'_{n+2})}{\partial \tilde{u}^{(n)}} = p_n .$$

Далее, согласно /57/ справедливо равенство

$$\frac{\delta}{\delta \tilde{v}} \mathrm{Sp}(\Lambda A'_{n+2}) = [\Lambda, \frac{\delta}{\delta \tilde{u}} \mathrm{Sp}(\Lambda A'_{n+2})] .$$

Отсюда на основании результатов работы [3] в силу /54/ и /55/ следует равенство

$$\frac{\delta}{\delta \tilde{v}} \mathrm{Sp}(\Lambda A'_{n+2}) = [\Lambda, A_{n+1}].$$

С учетом этих равенств выражение для $\Delta\mathcal{L}$ принимает вид

$$\Delta\mathcal{L} = \mathrm{Sp}\{(\dot{u} - [\Lambda, A_{n+1}])\Delta v\} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Sp}(u\Delta v) + \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Sp}\{ \sum_{k=1}^{n} p_k \Delta u^{(k-1)} \}. \qquad /58/$$

Положим теперь в равенстве /58/ в соответствии с /19/

$$\Delta u = \epsilon[\Lambda, \frac{\partial A^*_m}{\partial a_r}], \quad \Delta v = \epsilon \frac{\partial A^*_m}{\partial a_r} .$$

В результате выражение для $\Lambda\mathcal{L}$ примет вид

$$\Lambda\mathcal{L} = \epsilon\,\mathrm{Sp}\{(\dot{u} - [\Lambda, A_{n+1}])\frac{\partial A^*_m}{\partial a_r}\} - \frac{\epsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Sp}(u\frac{\partial A^*_m}{\partial a_r}) - -\epsilon\frac{\partial}{\partial x}\{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Sp}([\Lambda, p_k]\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\frac{\partial A^*_m}{\partial a_r})\}. \qquad /59/$$

Согласно результатам работы [3] справедливо равенство

$$\frac{\delta}{\delta\tilde{v}}\mathrm{Sp}(\Lambda\frac{\partial A^*_{m+1}}{\partial a_r}) = m[\Lambda, \frac{\partial A^*_m}{\partial a_r}].$$

Отсюда следует равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Sp}(\Lambda\frac{\partial A^*_{m+1}}{\partial a_r}) = m\,\mathrm{Sp}(\dot{u}\frac{\partial A^*_m}{\partial a_r}) + \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Sp}\{\sum_{\mu=1}^{m-1}\pi_\mu\dot{u}^{(\mu-1)}\}, \qquad /60/$$

где

$$\pi_\mu = \sum_{\nu=0}^{m-\mu-1}(-1)^\nu\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}\{\frac{\partial}{\partial\tilde{u}^{(\mu+\nu)}}\mathrm{Sp}(\Lambda\frac{\partial A^*_m}{\partial a_r})\},\quad \mu = 1,\dots,m-1,$$

причем при $m=1$ последнее слагаемое в правой части равенства /60/, очевидно, отсутствует. Далее, согласно /3/ и /3'/ справедливо равенство

$$\mathrm{Sp}([\Lambda, A_{n+1}]\frac{\partial A^*_m}{\partial a_r}) = -\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Sp}(\sum_{\mu=1}^{m}A_{n+\mu}\frac{\partial A^*_{m-\mu}}{\partial a_r}). \qquad /61/$$

Таким образом, в силу /60/ и /61/ равенство /59/ принимает вид

$$\Lambda\mathcal{L} = -\frac{\epsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Sp}(u\frac{\partial A^*_m}{\partial a_r}) + \frac{\epsilon}{m}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Sp}(\Lambda\frac{\partial A^*_{m+1}}{\partial a_r}) - - \epsilon\frac{\partial}{\partial x}\{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Sp}([\Lambda, p_k]\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\frac{\partial A^*_m}{\partial a_r})\} + + \epsilon\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Sp}(\sum_{\mu=1}^{m}A_{n+\mu}\frac{\partial A^*_{m-\mu}}{\partial a_r}) - \epsilon\frac{\partial}{\partial x}\sum_{\mu=1}^{m-1}\mathrm{Sp}(\pi_\mu\dot{u}^{(\mu-1)}). \qquad /62/$$

Сравнивая равенства /59/ и /62/, с учетом уравнения /18/ при $a_1 = 0$ получаем, согласно /46/, закон сохранения в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}T_{m,r} + m\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Sp}(\sum_{\mu=1}^{m}A_{n+\mu}\frac{\partial A^*_{m-\mu}}{\partial a_r}) + + \frac{\partial}{\partial x}\{\sum_{\mu=1}^{m-1}\mathrm{Sp}([\Lambda, \pi_\mu]\frac{\partial^{\mu-1}A_{n+1}}{\partial x^{\mu-1}})\} = 0, \qquad /63/$$

причем при $m=1$ последнее слагаемое в левой части этого равенства, очевидно, отсутствует. Равенство /63/ совпадает с /52/ однако, согласно /53/, имеет некоторое отличие в форме записи.

В силу того, что в уравнение /18/ при $\alpha_1=0$ явно не входят x и t, оно оказывается инвариантным относительно сдвигов по x и t, т.е. относительно преобразований $u \to u+\epsilon \dot{u}$ и $u \to u+\epsilon u'_x$. Однако, как нетрудно убедиться, эти преобразования являются комбинацией преобразований /19/.

§4. ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ

В этом параграфе будут получены условия, при выполнении которых уравнение /18/ имеет решения, инвариантные относительно преобразований из найденной нами бесконечномерной коммутативной группы. С этой целью рассмотрим уравнение

$$\sum_{\mu=0}^{m_0} a_{m_0-\mu,\,r} \sum_{r=1}^{r_0} [\Lambda, \frac{\partial A^*_{\mu+1}}{\partial a_r}] = 0, \quad m_0 > 0 . \qquad /64/$$

Положим теперь

$$\hat{A}_m = \begin{cases} \sum\limits_{\mu=0}^{m} \sum\limits_{r=1}^{r_0} a_{m-\mu,r} \dfrac{\partial A^*_\mu}{\partial a_r}, & \text{если } 0 \le m \le m_0, \\ \sum\limits_{\mu=m-m_0}^{m} \sum\limits_{r=1}^{r_0} a_{m-\mu,r} \dfrac{\partial A^*_\mu}{\partial a_r}, & \text{если } m > m_0. \end{cases} \qquad /65/$$

Нетрудно видеть, что определенные согласно /65/ матрицы $\hat{A}_m$ удовлетворяют соотношениям /3/ и /3'/. Далее уравнение /64/ можно теперь записать в виде

$$[\Lambda, \hat{A}_{m_0+1}] = 0 . \qquad /66/$$

Из равенств /65/ и /66/ следует, что матрица

$$\hat{A} = \sum_{m=0}^{m_0} \hat{A}_m \eta^{m_0-m} \qquad /67/$$

является зависящим полиномиально от параметра η решением уравнения /14/. Далее, в силу /66/ из соотношения /3'/ следует, что диагональные элементы $\hat{A}_{m_0+1,r,r}$ матрицы $\hat{A}_{m_0+1}$ принимают постоянные значения на траекториях системы /66/, т.е. являются ее первыми интегралами.

Согласно /65/ при любом $m \geq 0$ справедливо равенство

$$\hat{A}_{m_0+m+1} = \sum_{\mu=0}^{m_0} \sum_{r=1}^{r_0} a_{m_0-\mu, r} \frac{\partial A^*_{m+\mu+1}}{\partial a_r}. \qquad /68/$$

С другой стороны, в силу /66/, из соотношения /3′/ следует равенство

$$\hat{A}_{m_0+m+1} = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{r=1}^{r_0} I_{\mu,r} \frac{\partial A^*_{m-\mu}}{\partial a_r}, \qquad m \geq 0, \qquad /69/$$

где величины $I_{\mu,r}$ принимают постоянные значения на траекториях системы /66/, т.е. являются первыми интегралами этой системы. Далее, из равенств /52/ и /53/ следует, что величины

$$J_{m,r} = \mathrm{Sp}\{ \sum_{\mu=0}^{m} (\mu+1) \hat{A}_{m_0+\mu+1} \frac{\partial A^*_{m-\mu}}{\partial a_r} \}, \quad m \geq 0, \qquad /70/$$

также являются первыми интегралами системы /66/. Согласно /69/, имеем

$$J_{m,r} = \sum_{r'=1}^{r_0} \sum_{\nu=0}^{m} I_{\nu,r'} \mathrm{Sp}\{ \sum_{\mu=0}^{m-\nu} (\mu+\nu+1) \frac{\partial A^*_{\mu}}{\partial a_{r'}} \frac{\partial A^*_{m-\mu-\nu}}{\partial a_r} \}. \qquad /71/$$

С помощью /3/ и /3′/ нетрудно убедиться, что при любом $m > 0$ справедливы равенства

$$\mathrm{Sp}(\sum_{\mu=0}^{m} \frac{\partial A^*_{\mu}}{\partial a_{r'}} \frac{\partial A^*_{m-\mu}}{\partial a_r}) = \mathrm{Sp}(\sum_{\mu=0}^{m} \mu \frac{\partial A^*_{\mu}}{\partial a_{r'}} \frac{\partial A^*_{m-\mu}}{\partial a_r}) = 0 .$$

Отсюда на основе /71/ следует равенство

$$J_{m,r} = (m+1) I_{m,r} . \qquad /72/$$

Выясним теперь, как будет вести себя решение уравнения /18/, если в качестве начальных данных взято решение уравнения /66/. С этой целью рассмотрим операторы

$$T = \frac{\partial}{\partial t} + \mathfrak{A} , \quad \hat{T} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \hat{A},$$

где матрицы $\mathfrak{A}$ и $\hat{A}$ определены соответственно с помощью равенств /2/ и /67/. Тогда справедливо равенство

$$\Lambda = [T, \hat{T}] = 0. \qquad /73/$$

Действительно, в силу /15/ справедливо равенство

$$\Lambda = \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} - \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \tau} + [\mathfrak{A}, \hat{A}] = \sum_{m=0}^{m_0+n} \Delta_m \eta^{m_0+n-m} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \eta^{-k} ,$$

где

$$\gamma_k = -\frac{\partial a_k}{\partial \tau} + \sum_{s=0}^{m_0} [a_{k+s}, \hat{A}_{m_0-s}],$$

при $0 \le m \le \min(m_0, n)$ имеем

$$\Delta_m = \sum_{\mu=0}^{m} [A_{m-\mu}, \hat{A}_\mu], \qquad /74/$$

при $0 \le m < \min(m_0, n)$ имеет место равенство

$$\Delta_{m_0+n-m} = \frac{\partial \hat{A}_{m_0-m}}{\partial t} - \frac{\partial A_{n-m}}{\partial \tau} + \sum_{\mu=0}^{m} [A_{n-\mu}, \hat{A}_{m_0-m+\mu}] + \sum_{k=1}^{m_0-m} [a_k, \hat{A}_{m_0-k-m}], \qquad /75/$$

при $0 < m \le m_0 - n$, если $m_0 > n$, имеем

$$\Delta_{m+n} = \frac{\partial \hat{A}_m}{\partial t} + \sum_{\mu=0}^{n} [A_{n-\mu}, \hat{A}_{m+\mu}] + \sum_{k=1}^{m} [a_k, \hat{A}_{m-k}], \qquad /76/$$

если же $m_0 < n$, то при $0 < m \le n - m_0$ следует

$$\Delta_{m_0+m} = -\frac{\partial A_m}{\partial \tau} + \sum_{\mu=0}^{m_0} [A_{m+\mu}, \hat{A}_{m_0-\mu}]. \qquad /77/$$

Согласно равенству /45/ при $k>0$ имеем $\gamma_k = 0$. Далее, в силу /27/ и /65/ из равенства /74/ следует, что $\Delta_m = 0$ при $0 \le m \le \min(m_0, n)$. На основании/22/,/28/,/33/ и /65/ спредливы равенства

$$\frac{\partial \hat{A}_{m_0-m}}{\partial t} = \sum_{s=0}^{n} [\hat{A}_{m_0-m+s}, A_{n-s}] + \sum_{k=1}^{m_0-m} [\hat{A}_{m_0-k-m}, a_k], \qquad /78/$$

$$\frac{\partial A_{n-m}}{\partial \tau} = \sum_{s=0}^{m_0} [A_{n-m+s}, \hat{A}_{m_0-s}]. \qquad /79/$$

Из этих равенств в силу /27/ и /75/ следует, что при $0 \le m < \min(m_0, n)$ имеем $\Delta_{m_0+n-m} = 0$. Заменив в равенстве /78/ $m_0 - m$ на m, согласно /76/, получаем, что $\Delta_{m+n} = 0$ при $0 < m \le m_0 - n, m_0 > n$. Наконец, заменив в равенстве /79/ $n - m$ на m, в силу /77/ получаем, что $\Delta_{m_0+m} = 0$ при $0 < m \le n - m_0$, $m_0 < n$. Таким образом, равенство /73/ доказано.

Из равенства /73/ следует, что движение по траекториям системы /18/ коммутирует с движением по траекториям системы

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = [\Lambda, \hat{A}_{m_0+1}], \qquad /80/$$

т.е. результат не зависит от того, будем ли мы сначала двигаться по траекториям системы /18/, а затем по траекториям системы /80/, или, наоборот, сначала будем двигаться по траекториям системы /80/, а затем по траекториям системы /18/. Возьмем теперь в качестве начальных данных для решения уравнения /18/ матрицу $u_0 = u_0(x)$, удовлетворяющую системе /66/. Полученное таким образом решение $u = u(x,t)$ уравнения /18/ будет при любом t удовлетворять системе /66/. Действительно, в противном случае мы могли бы с помощью решения $u = u(x,t)$ получить решение $\hat{u} = \hat{u}(x,t,\tau)$ системы /80/, для которого $\frac{\partial \hat{u}}{\partial \tau} \neq 0$, по крайней мере в одной точке. А с другой стороны, из-за перестановочности рассматриваемых движений имеем $\frac{\partial \hat{u}}{\partial \tau} = 0$. Полученное противоречие означает, что фазовое пространство системы /66/ инвариантно относительно движений в силу уравнения /18/.

С помощью равенства /38/ нетрудно убедиться, что в результате замены /19/ уравнение /66/ с точностью до членов порядка ϵ^2 примет вид

$$[\Lambda, \hat{A}_{m_0+1}] + \epsilon[\Lambda, \sum_{s=1}^{m} [\hat{A}_{m_0+s}, \frac{\partial A^*_{m-s}}{\partial a_r}]] = 0 .$$

Однако, вследствие /27/ и /69/, справедливо равенство

$$\sum_{s=1}^{m} [\hat{A}_{m_0+s}, \frac{\partial A^*_{m-s}}{\partial a_r}] = 0 .$$

Отсюда следует, что уравнение /66/ инвариантно относительно преобразований /20/. Далее, с помощью лагранжева подхода нетрудно убедиться, что первые интегралы /70/ являются следствием именно этой инвариантности.

В заключение необходимо отметить, что существует тесная связь между инвариантными решениями, рассмотренными в настоящей работе, и конечнозонными потенциалами, изучавшимися в работах /8,9/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ablowitz M.J. et al. Phys.Rev.Lett., 1973, v.31, No.2, p.125-127.

2. Ablowitz M.J. et al. Stud.Appl.Math., 1974, v.LIII, p.249-315.
3. Мельников В.К. ЭЧАЯ, 1980, т.11, вып.5, с.1224-1272.
4. Kumei S. J.Math.Phys., 1975, v.16, No.12, p.2461-2468.
5. Kumei S. J.Math.Phys., 1977, v.18, No.2, p.256-264.
6. Жибер А.В., Шабат А.Б. ДАН СССР, 1979, т.247, №5, с.1103-1107.
7. Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б. Функциональный анализ, 1980, т.14, вып.1, с.25-36.
8. Новиков С.П. Функциональный анализ, 1974, т.8, вып.3, с.54-66.
9. Дубровин Б.А. Функциональный анализ, 1977, т.11, вып.4, с.28-41.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 апреля 1981 года.