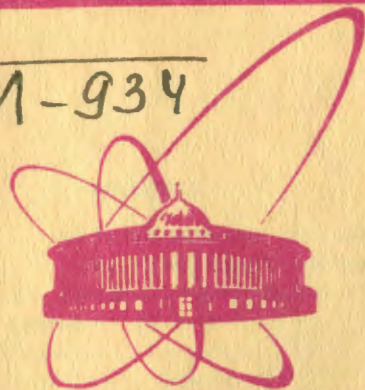


1-934



Объединенный  
институт  
ядерных  
исследований  
Дубна

3446/2-81

13/VI-8

P2-81-247

В.Л. Любошиц, М.И. Подгорецкий

О ПРОХОЖДЕНИИ  
УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОГО ПОЗИТРОНИЯ  
ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО

Направлено в ЖЭТФ

1981

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть квантовая система /элементарная частица, ядро, атом и т.п./, находящаяся в основном состоянии, падает на мишень. При каждом столкновении внутри мишени система может с определенной вероятностью изменить свое внутреннее состояние /возбудиться или развалиться на части/, либо остаться в исходном состоянии, изменив только направление и скорость движения. Какова вероятность  $W$  того, что после прохождения через мишень толщины  $l$  система останется в исходном состоянии? Ответ на этот вопрос зависит от соотношения между характерным временем  $\tau$ , определяемым внутренней структурой системы, и интервалом  $T=L_{in}/v$ , разделяющим последовательные неупругие столкновения с частицами мишени /здесь  $L_{in}=1/N\sigma_{in}$  - средний пробег для неупругих взаимодействий,  $v$  - скорость системы,  $N$  - число атомов в единице объема/.

Величина  $\tau$  удовлетворяет соотношению

$$\tau \approx \hbar/\Delta E, \quad /1/$$

где  $\Delta E$  - характерное значение разности энергий собственных состояний системы; для ультрарелятивистских систем  $\tau$  следует заменить на  $\gamma\tau$ , где  $\gamma$  - лоренц-фактор. Обычно время  $\tau$  очень мало, так что

$$\frac{\gamma\tau v}{L_{in}} \ll 1. \quad /2/$$

Тогда после каждого столкновения судьба системы решается долго до следующего столкновения, т.е. каждый раз во взаимодействии участвует система, находящаяся в каком-то одном определенном стационарном состоянии. Возникает каскадный процесс, основанный на картине независимых последовательных столкновений. При этом возможны и обратные переходы образующихся возбужденных состояний в исходное. Если такими переходами можно пренебречь, то ответом на поставленный вопрос является обычная экспонента

$$W = \exp\left(-\frac{l}{L_{in}}\right). \quad /3/$$

Иначе обстоит дело при условии

$$\frac{\gamma \tau v}{L_{in}} \gg 1.$$

/4/

Теперь поведение системы определяется не независимыми воздействиями каждого из последовательных столкновений в отдельности, а совокупным и фактически одновременным действием многих столкновений, из-за чего простые выражения типа /3/ теряют свою силу. Сходная ситуация по существу уже обсуждалась в литературе\*, в частности, в связи с регенерацией нейтральных K-мезонов, где величина  $\tau$  очень велика вследствие малой разности масс  $K_S^0$ - и  $K_L^0$ -мезонов.

В двухуровневой системе типа нейтральных K-мезонов реализуется простейший случай. Если уровней несколько, то явления усложняются, хотя общий их характер остается прежним. Качественно новые особенности возникают для систем с бесконечным числом уровней, и цель настоящей работы состоит в их анализе на конкретном примере прохождения через тонкую мишень ультрарелятивистского позитрония. Как было показано Л.Л.Неменовым в работе /3/, пучки таких позитрониев, рождающихся при распаде ультрарелятивистских  $\pi^0$ -мезонов по схеме  $\pi^0 \rightarrow \gamma + (e^+ e^-)$ , могут быть созданы на действующих ускорителях /см. также /4'/ /. Для позитрония в основном состоянии  $\tau \approx 10^{-16}$  с, при лоренц-факторе  $\gamma \approx 10^8$  величина  $\gamma \tau \approx 10^{-8}$  с, соответствующий пробег  $\gamma \tau c \approx 3 \cdot 10^{-8}$  см. С другой стороны, сечение взаимодействия позитрония с атомами мишени настолько велико /например, в алюминии  $\sigma \approx 2 \cdot 10^{-18}$  см<sup>2</sup> /5'/, что в конденсированном веществе  $L_{in} \approx 10^{-6} \div 10^{-5}$  см, т.е. условие /4/ может быть выполнено с большим запасом. В дальнейшем будем предполагать, что кроме /4/ выполнено также более сильное условие

$$l \ll \gamma \tau c.$$

/5/

Так как в случае позитрония  $\Delta E \sim \frac{m_e^4}{4\hbar^2}$ , где  $m$  - масса электрона, то это в силу /1/ равносильно требованию

$$l \ll 4 \left( \frac{\hbar}{m c} \right) \left( \frac{\hbar c}{e^2} \right)^2 \gamma \approx 3 \cdot 10^{-6} \gamma \text{ см.}$$

/5'/

---

\* Можно указать на анализ процессов взаимодействия  $\gamma$ -квантов достаточно высокой энергии с ядрами, учитывающий возможность взаимных переходов  $\gamma$ -квантов и вторичных адронов /1/. В более общем плане роль характерного времени  $\tau$  обсуждается в связи с проблемой т.н. "юных частиц" /см., например, обзор /2'/ /.

Из /5'/ вытекает, что при  $\gamma \sim 10^3$  последующая теория относится только к достаточно тонким мишеням, толщина которых не превосходит нескольких микрометров.

## 2. УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИЙ ПОЗИТРОНИЙ. УДАРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Взаимодействие позитрония с атомами мишени сводится к кулоновским взаимодействиям его электрона и позитрона с электрическими полями, создаваемыми ядрами и электронами атомов. В рассматриваемых условиях эти взаимодействия можно анализировать в рамках ударного приближения. Радиус позитрония примерно вдвое превышает радиус обычных атомов. Если мишень приготовлена из вещества с большим порядковым номером  $Z$ , то в ее атомах электрическое поле сосредоточено внутри области экранирования, размеры которой малы по сравнению с размерами самого атома. Поэтому, откладывая пока что анализ общего случая, мы будем считать, что в каждом отдельном столкновении участвует фактически либо только электрон позитрония, либо его позитрон, но не обе частицы вместе.

Запишем внутреннюю волновую функцию позитрония в основном состоянии в виде  $\phi_1(\vec{r})$ , где  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  - расстояние между электроном и позитроном. Если после столкновения с каким-то атомом электрон получит поперечный импульс  $\vec{q}_1^*$ , то центр тяжести позитрония изменит свой импульс также на величину  $\vec{q}_1$ , а внутренняя волновая функция переходит в

$$\phi(\vec{r}) = \phi_1(\vec{r}) \exp(-i\vec{q}_1 \vec{r} / 2\pi). \quad /6/$$

Если же в рассматриваемом столкновении участвовал позитрон, получивший поперечный импульс  $\vec{q}_2$ , то центр тяжести позитрония изменит свой импульс на величину  $\vec{q}_2$ , а внутренняя волновая функция перейдет в

$$\phi(\vec{r}) = \phi_1(\vec{r}) \exp(i\vec{q}_2 \vec{r} / 2\pi). \quad /6'/$$

Строго говоря, состояния /6/ и /6'/ не являются стационарными, но при выполнении условия /5/ они к моменту следующего столкновения не успевают измениться. Поэтому после прохождения всей мишени центр тяжести позитрония получает поперечный импульс  $\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2$ , а волновая функция позитрония

---

\* Изменением продольного импульса в интересующей нас задаче можно пренебречь.

$$\phi(\vec{r}) = \phi_1(\vec{r}) \exp(-i(\vec{Q}_1 - \vec{Q}_2)\vec{r}/2\hbar), \quad /6''/$$

где  $\vec{Q}_1$  и  $\vec{Q}_2$  - суммарные поперечные импульсы, полученные электроном и позитроном во всех столкновениях внутри мишени. Все столкновения как бы сливаются в единое суммарное столкновение, и позитроний взаимодействует сразу со всей мишенью, как с одним громадным атомом.

С помощью /6''/ легко получить вероятность  $W_{1k}$  перехода в любое конечное стационарное состояние позитрония  $\phi_k$ :

$$W_{1k} = \left| \int \phi_1(\vec{r}) \phi_k^*(\vec{r}) \exp(-i(\vec{Q}_1 - \vec{Q}_2)\vec{r}/2\hbar) d^3\vec{r} \right|^2, \quad /7/$$

в частности, вероятность остаться в исходном состоянии

$$W_{11} = \left| \int \phi_1^2(\vec{r}) \exp(-i(\vec{Q}_1 - \vec{Q}_2)\vec{r}/2\hbar) d^3\vec{r} \right|^2. \quad /7'/$$

Из /7'/, как известно, следует /см. /6'/ §139/, что

$$W_{11} = \left[ 1 + \frac{(\vec{Q}_1 - \vec{Q}_2)^2 a^2}{16\hbar^2} \right]^{-4}, \quad /8/$$

где  $a = 2\hbar^2/m_e^2$  - радиус позитрония.

Поскольку величины  $\vec{Q}_1$  и  $\vec{Q}_2$  являются случайными поперечными векторами, выражение /8/ надо еще усреднить по соответствующему закону распределения  $U(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$ . Тогда

$$\langle W_{11} \rangle = \iint U(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2) \left[ 1 + \frac{(\vec{Q}_1 - \vec{Q}_2)^2 d^2}{16\hbar^2} \right]^{-4} d^2\vec{Q}_1 d^2\vec{Q}_2. \quad /9/$$

Заметим, что  $\langle W_{11} \rangle$  не совпадает с вероятностью отсутствия столкновений внутри мишени; столкновения не запрещаются, направление движения позитрония может изменяться, требуется только, чтобы в конце концов позитроний оказался в исходном внутреннем состоянии.

Число столкновений внутри мишени определяется соотношением между величинами  $l$  и  $L_{tot}$  где  $L_{tot}$  - средний пробег, соответствующий всем возможным взаимодействиям позитрония, включая и упругие; в рассматриваемой сейчас модели  $L_{tot}$  вдвое меньше соответствующего пробега для свободного электрона или позитрона. Если толщина мишени  $l$  настолько мала, что  $l/L_{tot} \ll 1$ , то внутри мишени может произойти только одно столкновение, и соответствующая вероятность равна  $l/L_{tot}$ . Следовательно, рас-

$$U(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2) = \left(1 - \frac{l}{L_{tot}}\right) \delta^2(\vec{Q}_1) \delta^2(\vec{Q}_2) + \frac{l}{L_{tot}} u(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2), \quad /10/$$

где функция  $u(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2) \equiv u(\vec{q}_1, \vec{q}_2)$  описывает нормированное распределение импульсов, передаваемых электрону и позитрону в элементарном столкновении. Из /9/ и /10/ следует, что

$$\langle W_{\parallel} \rangle = \left(1 - \frac{\ell}{L_{\text{tot}}}\right) + \frac{\ell}{L_{\text{tot}}} \iint \frac{u(\vec{q}_1, \vec{q}_2) d^2 \vec{q}_1 d^2 \vec{q}_2}{\left[1 + \frac{(\vec{q}_1 - \vec{q}_2)^2 a^2}{16\hbar^2}\right]^4} = 1 - \frac{\ell}{L_{\text{tot}}} \left\{1 - \iint \frac{u(\vec{q}_1, \vec{q}_2) d^2 \vec{q}_1 d^2 \vec{q}_2}{\left[1 + \frac{(\vec{q}_1 - \vec{q}_2)^2 a^2}{16\hbar^2}\right]^4}\right\}.$$

В фигурных скобках стоит величина, совпадающая по своему смыслу с вероятностью любого возбуждения позитрония в результате состоявшегося единичного столкновения и равная  $\frac{\sigma_{\text{in}}}{\sigma_{\text{tot}}} = \frac{L_{\text{tot}}}{L_{\text{in}}}$ .

Поэтому в рассматриваемом пределе

$$\langle W_{\parallel} \rangle = 1 - \frac{\ell}{L_{\text{in}}}. \quad /11/$$

Как и следовало ожидать, формула /11/ совпадает с первыми двумя членами разложения экспоненты /3/. Можно показать, что при учете остальных членов величина  $\langle W_{\parallel} \rangle$  всегда превышает указанную экспоненту /см. ниже/. Особенно интересны в этом смысле достаточно толстые мишени, когда  $\ell/L_{\text{tot}} \gg 1$ . Каждая из величин  $Q_1$  и  $Q_2$  распределена тогда по закону Гаусса, который с учетом осевой симметрии можно записать в виде

$$dV(Q) = \frac{2Q}{\langle Q^2 \rangle} \exp\left(-\frac{Q^2}{\langle Q^2 \rangle}\right) dQ, \quad /12/$$

где  $Q = |\vec{Q}|$ . Поперечный импульс  $\vec{Q}$  совпадает с тем поперечным импульсом, который приобрел бы свободный электрон /позитрон/, пролетевший сквозь ту же мишень и испытавший в ней многократное кулоновское рассеяние. Поэтому

$$\langle Q^2 \rangle = p^2 \langle \theta^2 \rangle, \quad /13/$$

где  $\langle \theta^2 \rangle$  - средний квадрат угла многократного рассеяния электрона, обладающего продольным импульсом  $p$ , равным половине импульса позитрония.

В рассматриваемой сейчас модели величины  $\vec{Q}_1$  и  $\vec{Q}_2$  статистически независимы. Поэтому случайную величину  $(\vec{Q}_1 - \vec{Q}_2)$  можно заменить величиной  $\vec{Q}$ , где  $Q$  - суммарный импульс, который получил бы свободный электрон при двойном числе столкновений. Следовательно, формулу /9/ можно переписать в виде

$$\langle W_{\parallel} \rangle = \frac{1}{\langle Q^2 \rangle} \int_0^{\infty} \frac{Q \exp(-Q^2/2\langle Q^2 \rangle)}{(1 + Q^2 a^2 / 16\hbar^2)^4} dQ, \quad /14/$$

где  $\langle Q^2 \rangle$  определяется соотношением /13/.

При достаточно большой толщине мишени величина  $\langle Q^2 \rangle$  очень велика по сравнению с  $\hbar^2/a^2$ , и экспоненту в формуле /14/ можно заменить единицей. Тогда /14/ переходит в

$$\langle W_{\parallel} \rangle \approx \frac{1}{\langle Q^2 \rangle} \int_0^{\infty} \frac{QdQ}{\left(1 + \frac{Q^2 d^2}{16\hbar^2}\right)^4}. \quad /14'/$$

После интегриации окончательно получаем

$$\langle W_{\parallel} \rangle = \frac{8}{3} \frac{\hbar^2}{a^2 p^2 \langle \theta^2 \rangle}. \quad /15/$$

Как известно,  $\langle \theta^2 \rangle = \left(\frac{E_s}{pv}\right)^2 \frac{\ell}{L_{\text{рад.}}}$ , где  $E_s = 21$  МэВ,  $L_{\text{рад.}}$  - радиационная длина /см., например,  $177$ /. Поэтому при  $v/c \approx 1$  вероятность  $\langle W_{\parallel} \rangle$  не зависит от энергии позитрония и обратно пропорциональна толщине  $\ell$ . Подставляя в /15/ численные значения констант, получим

$$\langle W_{\parallel} \rangle = \frac{8}{3} \left(\frac{\hbar c}{E_s a}\right)^2 \frac{L_{\text{рад.}}}{\ell} = 2,1 \cdot 10^{-8} \frac{L_{\text{рад.}}}{\ell}. \quad /15''/$$

При достаточно больших значениях  $\ell/L_{\text{in}}$  вероятность /15/ может превышать на несколько порядков величину, вычисленную по формуле  $\exp(-\ell/L_{\text{in}})^*$ .

Хотя до сих пор речь шла только о вероятности  $\langle W_{\parallel} \rangle$ , использованный выше подход вполне применим и к вычислению вероятностей  $\langle W_{1k} \rangle$ , соответствующих переходу из основного состояния позитрония в любое дискретное состояние /см. формулу /7//; сказанное относится также к переходам между возбужденными

\* Строго говоря, в правую часть формулы /15/ следует еще добавить слагаемые, пропорциональные  $\exp(-\ell/L_{\text{tot}})$ , связанные с теми случаями, когда позитроний проходит через мишень без взаимодействий или с малым их числом. При  $\ell \gg L_{\text{tot}}$  эти члены быстро затухают; в дальнейшем мы будем рассматривать такие толщины  $\ell$ , при которых относительный вклад экспоненциальных членов в  $\langle W_{\parallel} \rangle$  пренебрежимо мал. Заметим, что результаты типа /15/ касаются, конечно, не только позитрония. В частности, если выполняются условия /4/ и /5/, то при прохождении ультрарелятивистских атомов через достаточно толстые пленки вероятность

$\langle W_{\parallel} \rangle$  также пропорциональна  $1/\ell$ . Для атома водорода  $\langle W_{\parallel} \rangle = \frac{16}{3} \left(\frac{\hbar c}{E_s a}\right)^2 \frac{L_{\text{рад.}}}{\ell}$ , где  $a = \frac{2\hbar^2}{me^2}$  - удвоенный борковский радиус.

В отличие от случая позитрония этот результат не зависит от соотношения между радиусами атомов водорода и среды.

дискретными состояниями. Во всех случаях для очень тонких мишеней результат описывается обычными формулами, содержащими эффективные сечения, в то время как для достаточно толстых мишеней вероятность перехода

$$\langle W_{mk} \rangle = \beta_{mk} \frac{\hbar^2}{a^2 p^2 \langle \theta^2 \rangle} = \beta_{mk} \left( \frac{\hbar c}{E_s a} \right)^2 \frac{L_{\text{рад.}}}{\ell}, \quad /16/$$

где  $\beta_{mk}$  - численный коэффициент, зависящий от начального и конечного уровней. Как мы видели,  $\beta_{11} = 8/3$ . Можно показать, что суммарная вероятность перехода позитрония из основного состояния в ближайшие возбужденные состояния с главным квантовым числом  $n=2$  определяется по формуле /16/ с  $\beta_{12} \approx 0,47$ . В случае возбуждения уровней с главным квантовым числом  $n=3$  коэффициент  $\beta_{13} \approx 0,156$ . При очень больших  $n$

$$\beta_{1n} \approx \frac{128}{5n^3}.$$

Ясно, что после прохождения позитронием достаточно толстого слоя вещества /при выполнении условий  $L_{\text{ин}} \ll \ell \ll \gamma v t$  / суммарная вероятность остаться в связанном состоянии пропорциональна  $1/\ell$  и мала по сравнению с единицей, а вероятность развала близка к единице. Следует однако еще раз подчеркнуть, что вероятность остаться в связанном состоянии может быть во много раз больше "привычного" значения  $\exp(-\ell/L_{\text{разв.}})$ , где  $L_{\text{разв.}} = 1/N\sigma_{\text{разв.}}$  - средний пробег, соответствующий развалу позитрония.

Как уже отмечалось выше, после прохождения мишени центр тяжести позитрония приобретает поперечный импульс  $\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2$ ; соответственно, направление движения позитрония изменится на угол

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2}{2p}.$$

Для толстой мишени, когда статистически независимые векторы  $\vec{Q}_1$  и  $\vec{Q}_2$  распределены по закону Гаусса, угол  $\vec{\alpha}$  также распределен по закону Гаусса, причем величина  $\langle \vec{\alpha}^2 \rangle$  в два раза меньше среднего квадрата угла многократного рассеяния электрона с импульсом  $p$ . В гауссовом приближении случайные величины  $\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2$  и  $\vec{Q}_1 - \vec{Q}_2$  статистически независимы. Поэтому угловое распределение позитрония не зависит от того, в каком внутреннем состоянии он окажется после прохождения мишени\*.

---

\* Анализ показывает, что этот результат относится только к рассматриваемому здесь предельному случаю  $a \gg R$  /  $a$  - радиус позитрония,  $R$  - радиус экранирования/. При  $a/R \sim 1$  указанное свойство независимости нарушается.



### 3. ОБЩЕЕ РАССМОТРЕНИЕ. ЭЙКОНАЛЬНЫЙ ПОДХОД

Выше предполагалось, что размеры позитрония велики по сравнению с радиусом экранирования атомов мишени. Чтобы понять, что происходит при нарушении этого условия, рассмотрим в чисто методическом плане противоположный предельный случай, который реализовался бы, если бы размеры позитрония были очень малы по сравнению с атомными размерами\*. Тогда электрон и позитрон находились бы почти рядом, и внутри атома на них действовало бы одно и то же электрическое поле. Это привело бы к полной корреляции поперечных импульсов электрона и позитрона. Из-за противоположности знаков заряда были бы выполнены равенства  $\vec{Q}_1 = -\vec{Q}_2$ ,  $\langle (\vec{Q}_1 - \vec{Q}_2)^2 \rangle = 4\langle Q^2 \rangle$ , где  $\langle Q^2 \rangle$  определяется по формуле /13/ для обсуждавшегося в п.2 "большого" позитрония  $\langle (\vec{Q}_1 - \vec{Q}_2)^2 \rangle = 2\langle Q^2 \rangle$ . В результате вместо /15/ и /16/ получились бы вдвое меньшие значения, определяющие, как легко понять, нижнюю границу эффекта. Действительно, в общем случае всегда  $\langle (\vec{Q}_1 - \vec{Q}_2)^2 \rangle \leq 4\langle Q^2 \rangle$ . Следовательно, при любом реальном соотношении между размерами позитрония и атомов мишени справедливы неравенства

$$\langle W_{\parallel} \rangle > \frac{4}{3} \left( \frac{\hbar c}{E_s a} \right)^2 \frac{L_{\text{рад.}}}{\ell}, \quad \langle W_{\text{mk}} \rangle > \frac{1}{2} \beta_{\text{mk}} \left( \frac{\hbar c}{E_s a} \right)^2 \frac{L_{\text{рад.}}}{\ell}, \quad /16'/$$

где  $\beta_{\text{mk}}$  - коэффициенты, входящие в /16/.

Заметим, что трактовка вероятностей  $\langle W_{\text{mk}} \rangle$  как средних значений квадратов формфакторов перехода /см. /7/-/9// справедлива только при условии, что корреляция между поперечными импульсами электрона и позитрона либо отсутствует, либо не зависит от расстояния между электроном и позитроном. При произвольном соотношении между величиной  $a$  и радиусом экранирования  $R$  это не так. Более точные формулы, учитывающие указанное обстоятельство, могут быть получены с помощью эйконального метода, который широко используется для описания процессов при высоких энергиях /в частности, в теории Глаубера<sup>18/</sup>. Условие применимости этого метода к интересующей нас задаче как раз совпадает с /5/; его можно также записать в виде

$$\ell \ll \frac{pa^2}{\hbar},$$

где  $p = |\vec{p}|$ ,  $2\vec{p}$  - импульс позитрония.

---

\*Впрочем, именно такая ситуация может иметь место для связанной системы ( $\mu^+ \mu^-$ ), аналогичной позитронию.

Представим нормированную волновую функцию позитрония, находящегося в основном состоянии и движущегося в вакууме, в виде

$$\psi_{2\vec{p}, 1}(\vec{R}, t, \vec{r}) = \chi_{2\vec{p}}(\vec{R}, t) \phi_1(\vec{p}, z). \quad /17/$$

Здесь  $\chi_{2\vec{p}}(\vec{R}, t)$  - волновой пакет, описывающий движение центра инерции позитрона,  $2\vec{p}$  - средний импульс позитрония,  $\phi_1(\vec{p}, z)$  - волновая функция относительного движения в системе покоя позитрония,  $\vec{p}$  и  $z$  - поперечная и продольная компоненты вектора  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  по отношению к импульсу  $\vec{p}$ .

Пусть позитроний проходит через слой вещества толщиной  $\ell$ .

Будем считать, что центр пакета пересекает границу вещества в момент времени  $t=0$ . Так как скорости ядер и атомных электронов малы по сравнению со скоростью ультрарелятивистского позитрония, мы можем рассматривать движение последнего в среде при фиксированных положениях ядер и электронов мишени. При выполнении условия /5/ сразу после выхода позитрония из слоя вещества волновая функция системы электрон + позитрон + макроскопическая мишень представляет собой произведение волновой функции /17/, взятой при  $t=\ell/c$ , волновой функции, характеризующей состояние всех атомов мишени, и эйконального фазового множителя

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{R}^{(\perp)}, \rho, \{ \vec{b}_k; \vec{\ell}_{k1}, \vec{\ell}_{k2} \dots \}) = \\ = \exp \{ i \sum_k [ \delta(\vec{b}_k - \vec{R}^{(\perp)} - \frac{\vec{\rho}}{2}; \vec{\ell}_{k1}, \vec{\ell}_{k2} \dots) - \delta(\vec{b}_k - \vec{R}^{(\perp)} + \frac{\vec{\rho}}{2}; \vec{\ell}_{k1}, \vec{\ell}_{k2} \dots) ] \}, \end{aligned} \quad /18/$$

где  $\{ \vec{b}_k; \vec{\ell}_{k1}, \vec{\ell}_{k2} \dots \}$  - совокупность поперечных координат ядер и электронов мишени,  $\vec{\ell}_{kn} = \vec{r}_{kn}^{(\perp)} - \vec{b}_k$ , индекс  $k$  нумерует ядра, индексы  $kn$  - электроны в атомах /ср. /6/ §152/. Фаза  $\delta$  в формуле /18/ выражается через потенциал кулоновского взаимодействия с помощью обычного соотношения

$$\begin{aligned} \delta(\vec{a}, \vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2 \dots) = \frac{1}{\hbar v} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{Ze^2}{\sqrt{\vec{a}^2 + u^2}} - \sum_{n=1}^Z \frac{e^2}{\sqrt{(\vec{a} + \vec{\ell}_n)^2 + u^2}} \right) du = \\ = \frac{e^2}{\hbar v} \ln \left( \frac{|\vec{a}|^Z}{\prod_{n=1}^Z |\vec{a} + \vec{\ell}_n|} \right). \end{aligned} \quad /19/$$

Суммарная вероятность того, что после прохождения слоя вещества позитроний останется в основном состоянии вне зависимости от изменения его импульса и безотносительно к возбуждению или ионизации атомов мишени, дается выражением

$$\langle W_{\parallel} \rangle = \int d^3 \vec{R} | \chi_{2\vec{p}}(\vec{R}, \frac{\vec{\ell}}{c}) |^2 \langle \langle \int \Phi(\vec{R}^{(\perp)}, \vec{\rho}, \{ \vec{b}_k; \vec{\ell}_{k1}, \vec{\ell}_{k2} \dots \}) \phi_1^2(\vec{\rho}, z) d^2 \vec{\rho} dz |^2 \rangle \rangle_{(e)}, \quad /20/$$

в котором символ  $\langle \langle \dots \rangle \rangle_{(e)}$  означает усреднение по электронному состоянию атомов мишени, а черта - усреднение по положениям ядер. Здесь мы воспользовались условием полноты для волновых функций атомов мишени и для волновой функции, описывающей свободное движение центра тяжести позитрония. Формулу /20/ можно переписать в виде:

$$\langle W_{\parallel} \rangle = \int (\prod_k S(\vec{b}_k - \vec{R}_k^{(\perp)}, \vec{\rho}, \vec{\rho}')) \phi_1^2(\vec{\rho}, z) \phi_1^2(\vec{\rho}', z') | \chi_{2\vec{p}}(\vec{R}, \frac{\vec{\ell}}{c}) |^2 d^2 \vec{\rho} dz d^2 \vec{\rho}' dz' d^3 \vec{R}, \quad /21/$$

$$S(\vec{b}, \vec{\rho}, \vec{\rho}') = \langle \langle \exp \{ i [ \delta(\vec{b} - \frac{\vec{\rho}}{2}; \vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2 \dots) - \delta(\vec{b} + \frac{\vec{\rho}}{2}; \vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2 \dots) -$$

$$- \delta(\vec{b} - \frac{\vec{\rho}'}{2}; \vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2 \dots) + \delta(\vec{b} + \frac{\vec{\rho}'}{2}; \vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2 \dots) ] \} \rangle \rangle_{(e)}. \quad /22/$$

В формуле /22/ усреднение проводится уже по электронному состоянию одного атома.

Будем считать, что положения ядер распределены по закону Пуассона. При пуассоновском распределении точек  $\vec{\xi}_k$  в трехмерном пространстве справедливо соотношение <sup>/9/</sup>

$$\prod_k a(\vec{\xi}_k) = \exp(N \int (a(\vec{\xi}) - 1) d^3 \vec{\xi}), \quad /23/$$

где N - среднее число точек в единице объема. Применяя /23/, убеждаемся, что с учетом малости атомных размеров результат усреднения величины  $\prod S(\vec{b}_k - \vec{R}_k^{(\perp)}, \vec{\rho}, \vec{\rho}')$  по положениям ядер в макроскопической мишени не зависит от  $\vec{R}^{(\perp)}$ . Окончательное выражение для  $\langle W_{\parallel} \rangle$  принимает вид

$$\langle W_{\parallel} \rangle = \int \exp(-N \ell K(\vec{\rho}, \vec{\rho}')) \phi_1^2(\vec{\rho}, z) \phi_1^2(\vec{\rho}', z') d^2 \vec{\rho} d^2 \vec{\rho}' dz dz', \quad /24/$$

где

$$K(\vec{\rho}, \vec{\rho}') = \int [1 - S(\vec{b}, \vec{\rho}, \vec{\rho}')] d^3 \vec{b}. \quad /25/$$

Из /22/ следует, что  $K(\vec{\rho}, \vec{\rho}')$  является неотрицательной действительной функцией, симметричной относительно перестановки  $\vec{\rho} \leftrightarrow \vec{\rho}'$  и удовлетворяющей условиям

$$K(\vec{\rho}, \vec{\rho}) = 0, \quad \frac{\partial K(\vec{\rho}, \vec{\rho}')}{\partial \vec{\rho}'} \Big|_{\vec{\rho}' = \vec{\rho}} = 0. \quad /26/ *$$

Заметим, что в эйкональном приближении суммарное сечение возбуждения и развала также выражается через функцию  $K(\vec{\rho}, \vec{\rho}')$ :

$$\sigma_{in} = \int K(\vec{\rho}, \vec{\rho}') \phi_1^2(\vec{\rho}, z) \phi_1^2(\vec{\rho}', z') d^2 \vec{\rho} dz d^2 \vec{\rho}' dz'. \quad /27/$$

Таким образом, в пределе очень малых  $\ell$

$$\langle W_{||} \rangle \approx 1 - N \sigma_{in} \ell,$$

т.е. формула /24/ переходит в /11/. В общем случае с учетом действительности  $K(\vec{\rho}, \vec{\rho}')$  выполняется неравенство \*\*

$$\langle W_{||} \rangle > e^{-N \sigma_{in} \ell}. \quad /28/$$

Вычислим теперь  $\langle W_{||} \rangle$  при условии  $N \sigma_{in} \ell \gg 1$ . В этом предельном случае при  $\vec{\rho} \neq \vec{\rho}'$  аргумент экспоненты в /24/ велик, и мы можем воспользоваться методом перевала. В силу /22/, /25/ и /26/ функция  $K(\vec{\rho}, \vec{\rho}')$  при малых  $|\vec{\rho}' - \vec{\rho}|$  описывается выражением

$$K_0(\vec{\rho}, \vec{\rho}') = \frac{1}{8} \langle \langle \int \left[ \frac{d\delta(b - \frac{\vec{\rho}}{2}, \vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2 \dots)}{d\vec{b}} + \frac{d\delta(b + \frac{\vec{\rho}}{2}, \vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2 \dots)}{d\vec{b}} \right] (|\vec{\rho}' - \vec{\rho}|)^2 d^2 \vec{b} \rangle \rangle_{(e)}, \quad /29/$$

которое имеет структуру

$$K_0(\vec{\rho}, \vec{\rho}') = A(\rho) (\vec{\rho}' - \vec{\rho})^2 + C(\rho) \frac{(\vec{\rho}' - \vec{\rho})^2}{\rho^2}, \quad /30/$$

где  $\rho = |\vec{\rho}|$ . Подставляя /30/ в /24/ и учитывая, что экспонента  $e^{-N \ell K(\vec{\rho}, \vec{\rho}')} -$  быстро убывающая функция, находим

\* Согласно /22/,  $\text{Re} K(\vec{\rho}, \vec{\rho}') \geq 0$ ,  $K(\vec{\rho}, \vec{\rho}') = K^*(-\vec{\rho}, -\vec{\rho}') = K^*(\vec{\rho}', \vec{\rho})$ . В силу осевой симметрии  $K$  может зависеть только от скаляров  $\vec{\rho}^2$ ,  $\vec{\rho}'^2$ ,  $\vec{\rho} \vec{\rho}'$ . С учетом этого  $\text{Im} K(\vec{\rho}, \vec{\rho}') = 0$ .

\*\* Результат /28/ следует из общего соотношения

$$\int \mathcal{F} e^{\mathcal{H}} d\mathbf{r} \rangle \exp(\int \mathcal{H} d\mathbf{r} / \int \mathcal{F} d\mathbf{r}) \cdot \int \mathcal{F} d\mathbf{r},$$

справедливого для положительно определенных функций  $\mathcal{F}$  и действительных функций  $\mathcal{H}$  любого числа переменных. В рассматриваемом нами случае

$$H = -N \ell K(\vec{\rho}, \vec{\rho}'), \quad \mathcal{F} = \phi_1^2(\vec{\rho}, z) \phi_1^2(\vec{\rho}', z'), \quad \int \mathcal{F} d\mathbf{r} = 1 \quad (d\mathbf{r} = d^3 \vec{r} d^3 \vec{r}').$$

$$\langle W_{ij} \rangle = \frac{\pi}{Nl} \left\{ \int \frac{\phi_1^2(\vec{\rho}, z) \phi_1^2(\vec{\rho}, z') d^2\vec{\rho} dz dz'}{\sqrt{A(\rho)(A(\rho) + C(\rho))}} \right\}. \quad /31/$$

Здесь, как и в предыдущем разделе, мы пренебрегли членами  $\sim \exp(-N\sigma_{in} l)$  /см. примечание на стр. 6/.

Легко видеть, что вероятности перехода в возбужденные связанные состояния  $\phi_k$  вычисляются по формулам, аналогичным /24/ и /31/ - с заменой

$$\phi_1^2(\vec{\rho}, z) \rightarrow \phi_k^*(\vec{\rho}, z) \phi_1(\vec{\rho}, z), \quad \phi_1^2(\vec{\rho}', z') \rightarrow \phi_k^*(\vec{\rho}', z') \phi_1(\vec{\rho}', z').$$

Подчеркнем, что асимптотический закон "1/l", полученный ранее в предположении, что радиус позитрония гораздо больше радиуса экранирования атома, имеет общее значение.

В рассмотренном в предыдущем разделе случае "большого" позитрония перекрестный член в формуле /29/, соответствующий корреляции между электроном и позитроном, исчезает; при этом  $C(\rho) \approx 0$ , а величина  $A$  уже не зависит от  $\rho$ , а именно:

$$A = \frac{1}{8} \langle \langle \int \left( \frac{d\delta(\vec{b}, l_1, l_2, \dots)}{d\vec{b}} \right)^2 d^2\vec{b} \rangle \rangle (e). \quad /32/$$

Можно показать, что в рамках эйконального подхода формула /32/ имеет эквивалентный вид

$$A = \frac{1}{8} \frac{p^2}{\hbar^2} \int \sigma_{sc}(\theta) \theta^2 d\Omega, \quad /32'/$$

где  $\sigma_{sc}(\theta)$  - сечение рассеяния электрона с импульсом  $p$  на атоме мишени в элемент телесного угла  $d\Omega$  вне зависимости от конечного состояния атома. Следовательно, величина  $NlA$  пропорциональна среднему квадрату угла многократного кулоновского рассеяния электрона в слое толщиной  $l$ :

$$NlA = \frac{1}{8} \frac{p^2}{\hbar^2} \langle \theta^2 \rangle = \frac{1}{8} \left( \frac{E_s}{\hbar c} \right)^2 \frac{l}{L_{рад}}. \quad /33/$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \int \phi_1^2(\vec{\rho}, z) \phi_1^2(\vec{\rho}, z') d^2\vec{\rho} dz dz' &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathcal{F}^2(\kappa^2) d^2\vec{\kappa} = \frac{1}{3\pi d^2}. \end{aligned} \quad /34/$$

Здесь  $\mathcal{F}(\kappa^2) = \int \phi_1^2(\vec{\rho}, z) e^{-i\vec{\kappa}\vec{\rho}} d^2\vec{\rho} dz = \left(1 + \frac{\kappa^2 a^2}{4}\right)^{-2}$  - формфактор основного состояния. С учетом /33/ и /34/ из соотношения /31/ следует результат /15/. В общем случае, как ясно из /29/, справедливо неравенство

$$N \ell K_0(\vec{p}, \vec{p}') < \frac{N \ell}{4} \ll \int \left( \frac{d\delta(\vec{b}, \vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2 \dots)}{d\vec{b}} \right)^2 d^2 \vec{b} \gg \left( \vec{p} - \vec{p}' \right)^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{E_s}{hc} \right)^2 (\vec{p}, -\vec{p}')^2.$$

Это сразу приводит к ограничениям снизу /16'/.

Следует подчеркнуть, что наше рассмотрение в этом и в предыдущем разделах относится в равной мере как к парапозитронию, так и к ортопозитронию. Что касается вероятности изменения спинового состояния позитрония при его прохождении через слой вещества, то она ничтожно мала ( $\sim \langle W_{\parallel} \rangle < \theta^2$ ).

#### 4. СЛУЧАЙ ДВУХ РАЗДЕЛЕННЫХ МИШЕНЕЙ. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ

После прохождения позитронием достаточно толстой пластинки вероятность остаться в связанном состоянии очень мала, вероятность развала близка к единице. С другой стороны, вероятность остаться в связанном состоянии падает с увеличением  $\ell$  довольно медленно, пропорционально  $1/\ell$ , так что при удвоении  $\ell$  она уменьшается всего лишь вдвое. Иначе обстоит дело, если вместо мишени двойной толщины имеются две последовательные мишени толщиной  $\ell$ , расположенные друг от друга на достаточно большом расстоянии  $\Lambda$ .

Рассмотрим случай, когда величина  $\Lambda$  удовлетворяет неравенству, обратному /5'"/, т.е.

$$\Lambda \gg \frac{pa^2}{\hbar}. \quad /35/$$

Тогда позитроний, распавшийся после первой мишени, не может перейти внутри второй мишени в связанное состояние, поскольку на пути  $\Lambda$  волновые пакеты электрона и позитрона расходятся в поперечном направлении на расстояние  $\Lambda \gg a$ .

Действительно, из соотношений типа /15/ и /16/ следует, что при  $\langle W_{mk} \rangle \ll 1$  угол  $\sqrt{\langle \theta^2 \rangle} \gg \frac{\hbar}{pa}$ , а величина  $\Lambda \gg \frac{\hbar \Lambda}{pa}$ , т.е. с учетом /35/,  $\Lambda \gg a$ .

Поэтому нас должны интересовать только те случаи, когда после прохождения первой мишени позитроний оказался связанным. Массы  $m_k$  дискретных стационарных состояний  $\phi_k$  различаются друг от друга. Поэтому после прохождения пути  $\Lambda$  между любыми парами состояний  $\phi_k$  и  $\phi_j$  возникает разность фаз  $a_{kj} = \frac{(m_k - m_j)\Lambda c}{\gamma \hbar}$ . Если расстояние между мишенями  $\Lambda$  настолько велико, что выполнено неравенство /35/, то фазы  $a_{kj} \gg 1$ , т.е. на вторую мишень падает некогерентная смесь состояний  $\phi_k$  с весами, пропорциональными  $1/\ell$ . Каждое из этих состояний прохо-

дит через вторую мишень независимо от остальных и дает на выходе связанное состояние позитрония с малой вероятностью, также пропорциональной  $1/l$ . В итоге после прохождения обеих мишеней вероятность образования связанного позитрония комбинируется из произведений малых вероятностей, пропорциональных  $1/l$ , т.е. при достаточно толстых мишенях оказывается пренебрежимо малой ( $\sim 1/l^2$ ). Имеет место резкое отличие от случая мишени двойной толщины /или двух мишеней, расположенных близко друг от друга/.

Настоящая работа инициирована Л.Л.Неменовым, который обратил наше внимание на возможность неэкспоненциального затухания при прохождении ультрарелятивистского позитрония через тонкий слой вещества и подчеркнул в связи с этим важную роль условия /5/. Мы выражаем ему свою искреннюю благодарность. Мы благодарим также Г.Ф.Друкарева за участие в обсуждениях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Грибов В.Н. ЖЭТФ, 1969, т.57, с.1306.
2. Фейнберг Е.Л. УФН, 1980, т.132, с.255.
3. Неменов Л.Л. ЯФ, 1972, т.15, с.1047.
4. Горчаков О.Е., Купцов А.В., Неменов Л.Л. ЯФ, 1976, т.24, с.524.
5. Дульян Л.С., Коцинян Ар.М., Фаустов Р.Н. ЯФ, 1977, т.25, с.814.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. "Наука", М., 1974.
7. Росси Б., Грейзен К. Взаимодействие космических лучей с веществом. ИИЛ, М., 1948, §§3-5.
8. Glauber R. High Energy Collision Theory. In: Lectures on Theoretical Physics, New York, 1960, p.315-414.
9. Любошиц В.Л., Подгорецкий М.И. ЯФ, 1976, т.24, с.214.

Рукопись поступила в издательский отдел  
13 апреля 1981 года.