ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2-81-205

В.К.Мельников

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ, АНАЛОГИЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЮ МИУРЫ

Направлено на VI Международное совещание
по проблемам квантовой теории поля
/Алушта, май 1981 года/

1981

В 1967 г. Миура обнаружил [1], что если $v=v(x,t)$ является решением модифицированного уравнения Кортевега - де Вриза:

$$G(v) = v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0, \qquad /1/$$

то

$$u = v^2 \pm v_x \qquad /2/$$

удовлетворяет обычному уравнению Кортевега - де Вриза:

$$F(u) = u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \qquad /3/$$

Справедливость этого утверждения следует из легко проверяемого равенства

$$F(u) = (2v \pm \frac{\partial}{\partial x}) G(v), \qquad /4/$$

имеющего место при условии, что u и v связаны соотношением /2/.

Обнаруженный Миурой факт не является изолированным. Как установлено в настоящей работе, существуют два класса нелинейных эволюционных уравнений, содержащие соответственно уравнения /1/ и /3/, и такие, что для любого уравнения из одного класса найдется соответствующее уравнение из другого класса, связанное с ним соотношениями типа /2/ и /4/.

Первый из этих классов, скажем K, определяется следующим образом: пусть L - линейный дифференциальный оператор вида

$$L = \Lambda_0^{-(k_0+1)} (\partial^{k_0+1} + \sum_{k=0}^{k_0} u_k \partial^k), \quad k_0 > 0, \qquad /5/$$

где ∂ - оператор дифференцирования по пространственной переменной x; Λ_0 - диагональная матрица с отличными от нуля диагональными элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r_0} \in \mathbf{C}$, удовлетворяющими неравенству

$$\lambda_r^{k_0+1} \neq \lambda_{r'}^{k_0+1} \quad \text{при} \quad r \neq r', \qquad /6/$$

а $u_k = u_k(x, t)$ - квадратные матрицы порядка r_0. Тогда класс K состоит из уравнений, допускающих представление [2]

$$\frac{\partial}{\partial t}L + [\mathfrak{A}, L] = \mathfrak{B}\cdot(L - \eta), \qquad /7/$$

где $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ - зависящие полиномиально от параметра η дифференциальные /по x / операторы порядка k_0, т.е.

$$\mathfrak{A} = \sum_{k=0}^{k_0} \alpha_k \partial^k, \qquad \mathfrak{B} = \sum_{k=0}^{k_0} \beta_k \partial^k, \qquad /8/$$

причем матрицы α_k и β_k, входящие в /8/, имеют порядок r_0, а их элементы зависят полиномиально от параметра η.

Этот класс содержит ряд важных с прикладной точки зрения уравнений. В частности, он содержит уравнение /3/. Изучение этого класса уравнений началось с пионерских работ [3,4] и является интенсивно изучаемой в настоящее время областью математической физики.

Второй класс, скажем $\mathbb{K}$, определяется так: пусть V - квадратная матрица порядка $r_1 = (k_0+1)r_0$; пусть, далее, $V_{\mu,\nu}$ - квадратные матрицы порядка r_0, образованные элементами матрицы V, стоящими на пересечении строк с номерами $\mu r_0 + 1, \ldots, (\mu+1)r_0$ и столбцов с номерами $\nu r_0 + 1, \ldots, (\nu+1)r_0$, $\mu, \nu = 0, 1, \ldots, k_0$. Будем говорить, что матрица V является J-инвариантной, если матрицы $V_{\mu,\nu}$ удовлетворяют требованиям:

1/ $V_{\mu,\nu} = V_{\mu-1,\nu-1}$ при $1 \le \mu, \nu \le k_0$;

2/ $V_{\mu,0} = V_{\mu-1,k_0}$ при $1 \le \mu \le k_0$;

3/ $V_{0,\nu} = V_{k_0,\nu-1}$ при $1 \le \nu \le k_0$.

Нетрудно видеть, что J-инвариантная матрица V полностью определяется k_0+1 матрицами $v_k = V_{0,k}$, $k = 0,1,\ldots,k_0$, стоящими в первых r_0 строках матрицы V, и имеет следующий вид:

$$V = \begin{Vmatrix} v_0 & v_1 & \cdots & v_{k_0} \\ v_{k_0} & v_0 & \cdots & v_{k_0-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_0 \end{Vmatrix}. \qquad /9/$$

Пусть, наконец, Λ - диагональная матрица вида

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} \Lambda_0 & & & 0 \\ & \Lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Lambda_{k_0} \end{Vmatrix}, \qquad /10/$$

где $\Lambda_k = \Lambda_0 \exp(i\frac{2\pi k}{k_0+1})$, $k = 1,\ldots,k_0$. Рассмотрим уравнения, допускающие представление [5]

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial \mathfrak{A}'}{\partial x} - [V, \mathfrak{A}'] + \zeta[\Lambda, \mathfrak{A}'] = 0 , \qquad /11/$$

где $\mathfrak{A}'$ - зависящая полиномиально от параметра ζ матрица порядка $r_1=(k_0+1)r_0$. Оказывается, что при соответствующем выборе матрицы $\mathfrak{A}'$ уравнение /11/ будет J-инвариантным, то есть сохраняющим свой вид при указанных в определении J-инвариантной матрицы перестановках элементов матрицы V. Уравнения, получаемые при таком выборе матрицы $\mathfrak{A}'$ с помощью соотношения /11/, и образуют второй класс $\mathcal{K}$. Класс $\mathcal{K}$ содержит, в частности, уравнение /1/.

В этой ситуации существует равно k_0+1 преобразование вида

$$u = h(v, v', \ldots, v^{(k_0)}) , \qquad /12/$$

связывающее уравнения /7/ и /11/. При этом

$$u=(u_0, u_1, \ldots, u_{k_0}), \quad v=(v_0, v_1, \ldots, v_{k_0}), \quad h=(h_0, h_1, \ldots, h_{k_0})$$

и матрицы h_k являются квазиоднородными полиномами ранга k_0-k+1 от матриц $v_0, v_1, \ldots, v_{k_0}$ и их производных по x до (k_0-k) -го порядка, $k = 0,1,\ldots,k_0$ *.

Преобразование /12/ не зависит от конкретного выбора операторов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, входящих в /7/, и матрицы $\mathfrak{A}'$, входящей в /11/, и целиком определяется диагональной матрицей Λ_0, входящей в определение оператора L вида /5/ и матрицы Λ. Далее, все k_0+1 преобразования вида /12/ могут быть получены из какого-нибудь одного с помощью замены

$$v_k \to v_k \exp(-i\frac{2\pi k}{k_0+1}\kappa), \quad \kappa = 1,\ldots,k_0. \qquad /13/$$

Как известно[2], получаемые согласно /7/ нелинейные эволюционные уравнения в рассматриваемом нами случае полиномиальной зависимости операторов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ от параметра η имеют вид

$$F(u) = \dot{u} - f(u, u', \ldots) = 0, \qquad /14/$$

---

* Полином Q от матриц $v_0, v_1, \ldots, v_{k_0}$ и их производных по x называется квазиоднородным ранга m, если при замене в Q всех матриц $v_k^{(\kappa)} = \frac{\partial^\kappa v_k}{\partial x^\kappa}$ соответственно величинами $\lambda^{\kappa+1}$ любой одночлен Q_α принимает вид $C_\alpha \lambda^m$, где постоянная матрица $C_\alpha \neq 0$.

где $u = (u_0, u_1, \ldots, u_{k_0})$; $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{k_0})$; причем элементы матриц $f_0, f_1, \ldots, f_{k_0}$ являются полиномами от элементов матриц $u_0, u_1, \ldots, u_{k_0}$ и их производных по x. Соответствующие им при замене /12/ уравнения класса $\mathcal{K}$ получаются согласно /11/ с помощью полиномиально зависящей от параметра ζ матрицы $\mathfrak{A}'$ и, как известно [5], имеют вид

$$G(v) = \dot{v} - g(v, v', \ldots) = 0, \qquad /15/$$

где $v = (v_0, v_1, \ldots, v_{k_0})$; $g = (g_0, g_1, \ldots, g_{k_0})$, причем элементы матриц $g_0, g_1, \ldots, g_{k_0}$ являются полиномами от элементов матриц $v_0, v_1, \ldots, v_{k_0}$ и их производных по x.

Основной результат настоящей работы состоит в доказательстве следующего утверждения: существуют матрицы $P_{k,\mu,\nu}$ и $Q_{k,\mu,\nu}$, такие, что равенства

$$F_k = \sum_{\nu=0}^{k_0} \sum_{\mu=0}^{k_0-k} P_{k,\mu,\nu} \frac{d^{\mu} G_{\nu}}{dx^{\mu}} Q_{k,\mu,\nu} \qquad /16/$$

справедливы при условии, что матрицы $u_0, u_1, \ldots, u_{k_0}$ и $v_0, v_1, \ldots, v_{k_0}$ связаны соотношением /12/. При этом элементы матриц $P_{k,\mu,\nu}$ и $Q_{k,\mu,\nu}$ являются полиномами от элементов матриц $v_0, v_1, \ldots, v_{k_0}$ и их производных по x. Таким образом, преобразование /12/ является естественным обобщением преобразования /2/, а соотношение /16/, связывающее уравнения /14/, /15/, является обобщением соотношения /4/. Нетрудно видеть, что матрицы $P_{k,\mu,\nu}$ и $Q_{k,\mu,\nu}$ в силу /16/ однозначно определяются с помощью матриц h_k, входящих в /12/.

§1. ОПЕРАТОРЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С J-ИНВАРИАНТНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Пусть E_1 и E_{k_0} - единичные матрицы порядка r_0 и $k_0 r_0$ соответственно, $k_0 > 0$, $r_0 > 0$. Возьмем матрицу J вида

$$J = \left| \begin{array}{c:c} 0 & E_1 \\ \hdashline E_{k_0} & 0 \end{array} \right|. \qquad /1.1/$$

Пусть, далее, V - квадратная матрица порядка $r_1 = (k_0 + 1) r_0$. В силу /9/ нетрудно убедиться, что J-инвариантная матрица V

перестановочна с матрицей J, то есть

$$[J, V] = 0. \qquad /1.2/$$

Возьмем теперь матрицы Θ и $\mathcal{E}$ следующего вида:

$$\Theta = \begin{vmatrix} E_1 & E_1 & \ldots & E_1 \\ E_1 & \epsilon_1 E_1 & \ldots & \epsilon_{k_0} E_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ E_1 & \epsilon_1^{k_0} E_1 & \ldots & \epsilon_{k_0}^{k_0} E_1 \end{vmatrix}, \qquad \mathcal{E} = \begin{vmatrix} E_1 & & & \\ & \epsilon_1 E_1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \epsilon_{k_0} E_1 \end{vmatrix}, \qquad /1.3/$$

где $\epsilon_k = \exp(i \frac{2\pi k}{k_0 + 1})$. С помощью /1.1/ и /1.3/ нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$\Theta J = \mathcal{E}\Theta, \quad J\Theta = \Theta\mathcal{E}^{-1}. \qquad /1.4/$$

Далее, с помощью равенств /1.2/ и /1.4/ нетрудно убедиться, что матрицы

$$\hat{V} = \Theta V \Theta^{-1}, \quad \check{V} = \Theta^{-1} V \Theta \qquad /1.5/$$

перестановочны с матрицей $\mathcal{E}$. Отсюда в силу /1.3/ следует, что матрицы $\hat{V}$ и $\check{V}$ имеют соответственно вид

$$\hat{V} = \begin{vmatrix} \hat{v}_0 & & & \\ & \hat{v}_1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \hat{v}_{k_0} \end{vmatrix}, \qquad \check{V} = \begin{vmatrix} \check{v}_0 & & & \\ & \check{v}_1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \check{v}_{k_0} \end{vmatrix}, \qquad /1.6/$$

где $\hat{v}_0, \hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_{k_0}$ и $\check{v}_0, \check{v}_1, \ldots, \check{v}_{k_0}$ - квадратные матрицы порядка r_0. При этом согласно /9/ и /1.5/ справедливы равенства

$$\hat{v}_k = \sum_{\kappa=0}^{k_0} \epsilon_k^{-\kappa} v_\kappa, \qquad \check{v}_k = \sum_{\kappa=0}^{k_0} \epsilon_k^{\kappa} v_\kappa, \qquad /1.7/$$

то есть

$$v_k = \frac{1}{k_0 + 1} \sum_{\kappa=0}^{k_0} \epsilon_k^{\kappa} \hat{v}_\kappa = \frac{1}{k_0 + 1} \sum_{\kappa=0}^{k_0} \epsilon_k^{-\kappa} \check{v}_\kappa. \qquad /1.8/$$

Кроме того, из равенств /1.7/ следует, что

$$\hat{v}_0 = \check{v}_0 , \quad \hat{v}_k = \check{v}_{k_0-k+1} , \quad k = 1, \dots, k_0 . \qquad /1.9/$$

Рассмотрим теперь оператор L вида

$$L = \Lambda^{-1}(\partial + V), \qquad /1.10/$$

где ∂ - оператор дифференцирования по пространственной переменной x; потенциал V - квадратная матрица порядка $r_1 = (k_0+1)r_0$, удовлетворяющая условию /1.2/, а матрица Λ имеет вид /10/. Положим

$$\hat{L} = \Theta L \Theta^{-1}, \quad \check{L} = \Theta^{-1} L \Theta . \qquad /1.11/$$

В силу /1.5/ справедливы равенства

$$\hat{L} = \Gamma^{-1}(\partial + \hat{V}), \quad \check{L} = \tilde{\Gamma}^{-1}(\partial + \check{V}), \qquad /1.12/$$

где

$$\Gamma = \Theta \Lambda \Theta^{-1}, \quad \tilde{\Gamma} = \Theta^{-1} \Lambda \Theta . \qquad /1.13/$$

Далее, согласно /1.4/ и /1.13/ имеем

$$\Gamma^{-1} = J \mathcal{E} \Lambda^{-1}, \quad \tilde{\Gamma}^{-1} = J^{-1} \mathcal{E} \Lambda^{-1} . \qquad /1.14/$$

С учетом равенств /1.6/ и /1.14/ положим

$$\hat{\Delta} = \begin{vmatrix} \hat{\Lambda}_0 & & & 0 \\ & \hat{\Lambda}_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \hat{\Lambda}_{k_0} \end{vmatrix}, \qquad \check{\Delta} = \begin{vmatrix} \check{\Lambda}_0 & & & 0 \\ & \check{\Lambda}_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \check{\Lambda}_{k_0} \end{vmatrix}, \qquad /1.15/$$

где

$$\hat{\Delta}_k = \Lambda_0^{-1}(\partial + \hat{v}_k), \quad \check{\Delta}_k = \Lambda_0^{-1}(\partial + \check{v}_k), \quad k = 0, 1, \dots, k_0 . \qquad /1.16/$$

Тогда в силу /1.12/ и /1.14/ имеем

$$\hat{L} = J \hat{\Delta}, \quad \check{L} = J^{-1} \check{\Delta} . \qquad /1.17/$$

Отсюда в силу равенства $J = J^{-k_0}$ следует, что

$$\hat{L}^{k_0+1} = \hat{\Delta}^*_{k_0} \dots \hat{\Delta}^*_1 \cdot \hat{\Delta}^*_0 ,$$
$$\check{L}^{k_0+1} = \check{\Delta}^*_{k_0} \dots \check{\Delta}^*_1 \cdot \check{\Delta}^*_0 , \qquad /1.18/$$

где

$$\hat{\Delta}^*_k = J^{-k} \hat{\Delta}_k J^k , \quad \check{\Delta}^*_k = J^k \check{\Delta}_k J^{-k} , \quad k = 0,1,\dots,k_0 . \qquad /1.19/$$

Пусть теперь

$$D = \begin{Vmatrix} D_0 & & & \\ & D_1 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & D_{k_0} \end{Vmatrix}, \qquad D' = \begin{Vmatrix} D'_0 & & & \\ & D'_1 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & D'_{k_0} \end{Vmatrix}, \qquad /1.20/$$

где

$$D_0 = \hat{\Delta}_{k_0} \dots \hat{\Delta}_1 \cdot \hat{\Delta}_0 , \qquad /1.21/$$

при $0 < k \le k_0$

$$D_k = \hat{\Delta}_{k-1} \dots \hat{\Delta}_0 \cdot \hat{\Delta}_{k_0} \dots \hat{\Delta}_k , \qquad /1.22/$$

при $0 \le k < k_0$

$$D'_k = \check{\Delta}_{k+1} \dots \check{\Delta}_{k_0} \cdot \check{\Delta}_0 \dots \check{\Delta}_k , \qquad /1.23/$$

а

$$D'_{k_0} = \check{\Delta}_0 \cdot \check{\Delta}_1 \dots \check{\Delta}_{k_0} . \qquad /1.24/$$

В силу равенств /1.9/ согласно /1.21/-/1.24/ имеем

$$D_0 = D'_0 , \quad D_k = D_{k_0-k+1} , \quad k = 1,\dots,k_0 .$$

Далее, в силу равенств /1.15/-/1.24/ получаем

$$\hat{L}^{k_0+1} = D , \qquad \check{L}^{k_0+1} = D' ,$$

то есть согласно /1.11/ имеем

$$L^{k_0+1} = \Theta^{-1} D \Theta = \Theta D' \Theta^{-1} . \qquad /1.25/$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$D' = \sigma D \sigma, \text{ где } \sigma = \frac{\Theta^2}{k_0 + 1} = (k_0 + 1)\,\Theta^{-2} .$$

В силу равенств /1.21/ и /1.22/ получаем, что

$$D_k = \Lambda_0^{-(k_0+1)} \left(\partial^{k_0+1} + \sum_{\kappa=0}^{k_0'} u_{k,\kappa}\, \partial^{\kappa}\right), \qquad /1.26/$$

где $u_{k,\kappa}$ - квадратные матрицы порядка r_0. Очевидно, что в силу /1.7/ элементы матриц $u_{k,\kappa}$ будут полиномами от элементов матриц v_k и их производных по x до $(k_0 - \kappa)$ -го порядка. Говоря точнее, справедливо равенство

$$u_{k,\kappa} = \Omega_{k,\kappa}(v, v', \dots, v^{(k_0-\kappa)}), \qquad /1.27/$$

где $v = (v_0, v_1, \dots, v_{k_0})$, а элементы матрицы $\Omega_{k,\kappa}$ являются квазиоднородными многочленами ранга $k_0 - \kappa + 1$ от элементов матриц $v_0, v_1, \dots, v_{k_0}$ и их производных по x до $(k_0 - \kappa)$-го порядка*. При этом в силу /1.21/ и /1.22/ справедливы равенства

$$u_{0,k} = \sum_{\kappa=0}^{k_0} \Lambda_0^{\kappa}\, \hat{v}_{\kappa}\, \Lambda_0^{-\kappa} ,$$

$$u_{k,k_0} = \sum_{\kappa=0}^{k-1} \Lambda_0^{k_0-k+\kappa+1}\, \hat{v}_{\kappa}\, \Lambda_0^{-k_0+k-\kappa-1} + \sum_{\kappa=k}^{k_0} \Lambda_0^{\kappa-k}\, \hat{v}_{\kappa} \Lambda_0^{k-\kappa} ,$$

$$1 \le k \le k_0 .$$

Из этих равенств в силу /1.7/ следует, что диагональные элементы матриц u_{k,k_0} равны нулю, если равны нулю диагональные элементы матрицы v_0.

---

* Полином Q от элементов матриц $v_0, v_1, \dots, v_{k_0}$ и их производных по x называется квазиоднородным ранга m, если при подстановке в Q вместо элементов матрицы $v_k^{(\mu)} = \frac{\partial^{\mu} v_k}{\partial x^{\mu}}$ величины $\lambda^{\mu+1}$ каждый одночлен Q_α принимает вид $C_\alpha \lambda^m$, где C_α - отличная от нуля константа.

§2. J -ИНВАРИАНТНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ОПЕРАТОРОМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Положим

$$\mathfrak{A}' = \sum_{\mu=0}^{\nu} A'_\mu \zeta^{\nu-\mu} , \qquad /2.1/$$

где матрицы A'_μ согласно /11/ удовлетворяют требованиям

$$[\Lambda, A'_0] = 0, \ [\Lambda, A'_\mu] - [V, A'_{\mu-1}] - \frac{\partial}{\partial x} A'_{\mu-1} = 0, \ 1 \le \mu \le \nu+1. \qquad /2.2/$$

Вытекающее из /11/ нелинейное эволюционное уравнение в силу /2.1/ и /2.2/ имеет вид

$$\dot{V} = [\Lambda, A'_{\nu+1}] . \qquad /2.3/$$

С помощью /10/ и /1.1/ нетрудно убедиться, что

$$J^{-1} \Lambda J = \epsilon_1 \Lambda . \qquad /2.4/$$

Отсюда следует, что уравнение /2.3/ будет J -инвариантным, если выполняется условие

$$J^{-1} A'_{\nu+1} J = \epsilon_1^{-1} A'_{\nu+1} . \qquad /2.5/$$

Чтобы удовлетворить условию /2.5/, поступим следующим образом. Пусть

$$\nu = (k_0 + 1) n + \kappa , \qquad /2.6/$$

где $n \ge 0$ и $0 \le \kappa \le k_0$ - целые числа. Положим

$$a = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_{r_0}) , \qquad /2.7/$$

где величины $a_1, \dots, a_{r_0} \in \mathbf{C}$ не зависят от x и параметра ζ. Далее, положим

$$A'_0 = \begin{vmatrix} a & & & \\ & \epsilon_\kappa a & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \epsilon_\kappa^{k_0} a \end{vmatrix} . \qquad /2.8/$$

Определим теперь матрицы A'_μ при $\mu > 0$ с помощью рекуррентного соотношения /2.2/ так, чтобы выполнялось условие

$$A'_\mu = 0 \quad \text{при} \quad V = 0. \qquad /2.9/$$

Как известно [5], в силу /6/ соотношение /2.2/ вместе с условием /2.9/ однозначно определяет матрицы A'_μ. Причем элементы матрицы A'_μ при $\mu > 0$ либо будут равны нулю, либо будут квазиоднородными многочленами ранга μ от элементов матрицы V и ее производных по x до $(\mu-1)$ -го порядка. Далее, с помощью /1.1/ и /2.8/ нетрудно проверить, что

$$J^{-1}A'_0 J = \epsilon_\kappa A'_0 . \qquad /2.10/$$

Наконец, в силу единственности решения уравнения /2.2/, удовлетворяющего условию /2.9/, с помощью /2.4/ и /2.10/ по индукции легко доказывается равенство

$$J^{-1} A'_\mu J = \epsilon_\kappa \epsilon_1^{-\mu} A'_\mu . \qquad /2.11/$$

Отсюда в силу /2.6/ следует, что условие /2.5/ выполнено,то есть уравнение /2.3/ при таком выборе матриц A'_μ будет J - инвариантным.

§3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ J -ИНВАРИАНТНОГО УРАВНЕНИЯ

Легко проверить, что уравнение /11/ можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}L + [\mathfrak{A}', L] = \mathfrak{B}' \cdot (L-\zeta), \qquad /3.1/$$

где оператор L определен с помощью /1.10/, матрица $\mathfrak{A}'$ та же самая, что и в равенстве /11/, а

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{A}' - \Lambda^{-1}\mathfrak{A}'\Lambda . \qquad /3.2/$$

Умножим теперь /3.1/ слева на L^k, а справа на L^{k_0-k} и просуммируем по k от нуля до k_0. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t}L^{k_0+1} + [\mathfrak{A}', L^{k_0+1}] = \sum_{k=0}^{k_0} L^k \mathfrak{B}' L^{k_0-k} \cdot (L-\zeta). \qquad /3.3/$$

Положим теперь

$$\hat{A}_0 = \sum_{k=0}^{\kappa} A'_{\kappa-k} L^k, \quad \hat{A}_m = \sum_{k=0}^{k_0} A'_{\kappa+(k_0+1)m-k} L^k, \quad m > 0,$$

$$\hat{A}^*_0 = \sum_{k=0}^{\kappa} L^k \Lambda^{-1} A'_{\kappa-k}\Lambda, \quad \hat{A}^*_m = \sum_{k=0}^{k_0} L^k \Lambda^{-1} A'_{\kappa+(k_0+1)m-k}\Lambda, \quad m > 0. \qquad /3.4/$$

С помощью равенств /1.10/, /2.4/, /2.6/ и /2.11/ нетрудно убедиться, что определенные согласно /3.4/ операторы $\hat{A}_m$ и $\hat{A}^*_m$ будут J-инвариантными, то есть

$$[J, \hat{A}_m] = [J, \hat{A}^*_m] = 0, \quad m \geq 0. \qquad /3.5/$$

Покажем теперь, что справедливы равенства

$$\hat{A}_0 = \hat{A}^*_0, \qquad /3.6/$$

$$L^{k_0+1}\hat{A}_m - \hat{A}_{m+1} = \hat{A}^*_m L^{k_0+1} - \hat{A}^*_{m+1}, \quad m \geq 0. \qquad /3.7/$$

Действительно, пусть

$$F_{\mu,\nu} = \sum_{k=0}^{\nu} L^k (A'_\mu - \Lambda^{-1} A'_\mu \Lambda) L^{k_0-k+\nu+1}. \qquad /3.8/$$

Согласно /2.2/ справедливо равенство

$$LA'_\mu - A'_{\mu+1} = \Lambda^{-1} A'_\mu \Lambda L - \Lambda^{-1} A'_{\mu+1}\Lambda. \qquad /3.9/$$

В силу /3.9/ из /3.8/ следует рекуррентное соотношение

$$F_{\mu,\nu} = F_{\mu+1,\nu-1} + (A'_\mu L^\nu - L^\nu \Lambda^{-1} A'_\mu \Lambda) L^{k_0+1}.$$

Решая это рекуррентное соотношение, получаем равенство

$$F_{\mu,\nu} = \sum_{k=0}^{\nu} (A'_{\mu+k} L^{\nu-k} - L^{\nu-k}\Lambda^{-1} A'_{\mu+k}\Lambda) L^{k_0+1}. \qquad /3.10/$$

При $\mu=0$ и $\nu=\kappa$ из равенства /3.10/ в силу /3.4/ следует равенство /3.6/. Далее, при $\mu=\kappa+(k_0+1)(m-1)+k$, $m>0$, и $\nu=k_0$ из равенства /3.10/ в силу /3.4/ следует равенство

$$F_{\kappa+(k_0+1)(m-1)+1,\, k_0} = (\hat{A}_m - \hat{A}^*_m) L^{k_0+1}, \quad m > 0. \qquad /3.11/$$

Пусть теперь

$$G_{\mu,\nu} = \sum_{k=0}^{k_0} L^k (A'_\mu - \Lambda^{-1} A'_\mu \Lambda) L^{k_0-k+\nu+1}. \qquad /3.12/$$

В силу /3.9/ из /3.12/ следует равенство

$$G_{\mu,\nu} = G_{\mu+1,\nu-1} + [A'_\mu L^\nu, L^{k_0+1}].$$

Решая это рекуррентное соотношение, получаем

$$G_{\mu,\nu} = H_{\mu+\nu+1} + [\sum_{k=0}^{\nu} A'_{\mu+k} L^{\nu-k}, L^{k_0+1}], \qquad /3.13/$$

где

$$H_{\mu+\nu+1}=G_{\mu+\nu+1,-1}=\sum_{k=0}^{k_0} L^{k}(A'_{\mu+\nu+1}-\Lambda^{-1}A'_{\mu+\nu+1}\Lambda)L^{k_0-k}. \qquad /3.14/$$

В силу /3.9/ справедливо равенство

$$H_{\mu}=\sum_{k=0}^{k_0}(A'_{\mu+k}L^{k_0-k}-L^{k_0-k}\Lambda^{-1}A'_{\mu+k}\Lambda). \qquad /3.15/$$

Таким образом, согласно /3.13/-/3.15/ справедливо равенство

$$G_{\mu,\nu}=[\sum_{k=0}^{\nu} A'_{\mu+k}L^{\nu-k}, L^{k_0+1}]+ \\ +\sum_{k=0}^{k_0}(A'_{\mu+\nu+k+1}L^{k_0-k}-L^{k_0-k}\Lambda^{-1}A'_{\mu+\nu+k+1}\Lambda). \qquad /3.16/$$

При $\mu=0$ и $\nu=\kappa$ из равенства /3.16/ в силу /3.4/ следует равенство

$$[\hat{A}_0, L^{k_0+1}]+\hat{A}_1-\hat{A}^*_1=0,$$

которое согласно /3.6/ эквивалентно равенству /3.7/ при $m=0$. Далее, при $\mu=\kappa+(k_0+1)(m-1)+1$, $m>0$, и $\nu=k_0$ из равенства /3.16/ следует

$$G_{\kappa+(k_0+1)(m-1)+1,k_0}=[\hat{A}_m, L^{k_0+1}]+\hat{A}_{m+1}-\hat{A}^*_{m+1}, m>0. \qquad /3.17/$$

В силу /3.8/ и /3.12/ справедливо равенство $F_{\mu,k_0}=G_{\mu,k_0}$.

Из этого равенства в силу /3.11/ и /3.17/ следует равенство /3.7/ при $m>0$. Таким образом, равенства /3.6/ и /3.7/ доказаны полностью.

Запишем теперь равенство /3.3/ в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}L^{k_0+1}+[\hat{\mathfrak{A}}, L^{k_0+1}]=\Delta, \qquad /3.18/$$

где

$$\hat{\mathfrak{A}}=\sum_{m=0}^{n}\hat{A}_m\eta^{n-m}, \quad \eta=\zeta^{k_0+1}, \quad n=[\frac{\nu}{k_0+1}], \qquad /3.19/$$

$$\Lambda=\sum_{k=0}^{k_0}L^{k}\mathfrak{B}'L^{k_0-k}\cdot(L-\zeta)+[\hat{\mathfrak{A}}, L^{k_0+1}]-[\mathfrak{A}', L^{k_0+1}]. \qquad /3.20/$$

Покажем, что справедливо равенство

$$\Delta=\hat{\mathfrak{B}}\cdot(L^{k_0+1}-\eta), \qquad /3.21/$$

где

$$\hat{\mathfrak{B}} = \sum_{m=0}^{n} \hat{B}_m \eta^{n-m}, \quad \hat{B}_m = \hat{A}_m - \hat{A}_m^* . \qquad /3.22/$$

Действительно, в силу /2.1/, /3.2/, /3.12/ и /3.20/ справедливо равенство

$$\Lambda = \sum_{\mu=0}^{\nu} (G_{\mu,0} - [A'_\mu, L^{k_0+1}])\zeta^{\nu-\mu} - \sum_{\mu=0}^{\nu} H_\mu \zeta^{\nu-\mu+1} + [\hat{\mathfrak{A}}, L^{k_0+1}],$$

где H_μ определено с помощью равенства /3.14/. В силу равенства /3.13/ имеем

$$G_{\mu,0} = H_{\mu+1} + [A'_\mu, L^{k_0+1}].$$

Отсюда с учетом равенства $H_0 = 0$ получаем

$$\Lambda = H_{\nu+1} + [\hat{\mathfrak{A}}, L^{k_0+1}]. \qquad /3.23/$$

В силу /2.6/, /3.4/ и /3.15/ справедливо равенство

$$H_{\nu+1} = \hat{A}_{n+1} - \hat{A}^*_{n+1} .$$

С учетом этого равенства из /3.23/ в силу /3.6/ и /3.7/ следует /3.21/. Согласно равенствам /3.18/ и /3.21/ окончательно получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} L^{k_0+1} + [\hat{\mathfrak{A}}, L^{k_0+1}] = \hat{\mathfrak{B}} \cdot (L^{k_0+1} - \eta) . \qquad /3.24/$$

При этом в силу /3.5/, /3.19/ и /3.22/ операторы $\hat{\mathfrak{A}}$ и $\hat{\mathfrak{B}}$ будут J -инвариантными, то есть

$$[J, \hat{\mathfrak{A}}] = [J, \hat{\mathfrak{B}}] = 0. \qquad /3.25/$$

§4. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ КЛАССОВ К И $\mathcal{K}$

С учетом равенства /1.25/ положим

$$D = \Theta L^{k_0+1} \Theta^{-1}, \quad \mathfrak{A} = \Theta \hat{\mathfrak{A}} \Theta^{-1}, \quad \mathfrak{B} = \Theta \hat{\mathfrak{B}} \Theta^{-1}. \qquad /4.1/$$

В результате равенство /3.24/ примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} D + [\mathfrak{A}, D] = \mathfrak{B} \cdot (D - \eta). \qquad /4.2/$$

Из равенства /3.25/ в силу /1.4/ и /4.1/ следует, что

$$[\mathcal{E}, \mathfrak{A}] = [\mathcal{E}, \mathfrak{B}] = 0 ,$$

то есть операторы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имеют вид

$$\mathfrak{A}=\begin{Vmatrix} \mathfrak{A}_0 & & & \\ & \mathfrak{A}_1 & 0 & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \mathfrak{A}_{k_0} \end{Vmatrix}, \qquad \mathfrak{B}=\begin{Vmatrix} \mathfrak{B}_0 & & & \\ & \mathfrak{B}_1 & 0 & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \mathfrak{B}_{k_0} \end{Vmatrix}. \qquad /4.3/$$

При этом операторы $\mathfrak{A}_k$ и $\mathfrak{B}_k$ имеют порядок k_0 и зависят полиномиально от параметра η, то есть справедливы равенства

$$\mathfrak{A}_k=\sum_{\kappa=0}^{k_0} a_{k,\kappa}\,\partial^{\kappa}, \qquad \mathfrak{B}_k=\sum_{\kappa=0}^{k_0} \beta_{k,\kappa}\,\partial^{\kappa}, \qquad /4.4/$$

где матрицы $a_{k,\kappa}$ и $\beta_{k,\kappa}$ имеют порядок r_0, а их элементы зависят полиномиально от параметра η.

Из равенств /1.20/ и /4.3/ следует, что уравнение /4.2/ распадается на k_0+1 не зависящих друг от друга уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t}D_k+[\mathfrak{A}_k, D_k]=\mathfrak{B}_k\cdot(D_k-\eta), \quad k=0,1,\ldots,k_0, \qquad /4.5/$$

которые согласно /1.26/, /4.4/ и /8/ совпадают с уравнением /7/ с той лишь разницей, что элементы матриц a_k и β_k в /8/ являются полиномами от элементов матриц $u_0, u_1,\ldots, u_{k_0}$

и их производных по x, а элементы матриц $a_{k,\kappa}$ и $\beta_{k,\kappa}$ в /4.4/ являются полиномами от элементов матриц $v_0, v_1,\ldots, v_{k_0}$

и их производных по x. Покажем, что с помощью замены /1.27/ матрицы $a_{k,\kappa}$ и $\beta_{k,\kappa}$ могут быть получены из матриц a_k и β_k.

Действительно, пусть операторы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, входящие в уравнение /7/, имеют вид

$$\mathfrak{A}=\sum_{m=0}^{n} A_m\eta^{n-m}, \qquad \mathfrak{B}=\sum_{m=0}^{n} B_m\eta^{n-m}. \qquad /4.6/$$

Тогда согласно результатам работы /2/ справедливы равенства

$$A_0=C_\kappa\partial^\kappa+\hat{a}_\kappa, \qquad B_0=0, \qquad /4.7/$$

где κ может принимать любое целое значение от нуля до k_0; C_κ – произвольная диагональная матрица; $\hat{a}_\kappa$ – дифференциальный оператор порядка $\kappa-1$ при $\kappa>0$ и $\hat{a}_0=0$. Кроме того, при $u_0=u_1=\ldots=u_{k_0}=0$ справедливы равенства

$$A_0=C_\kappa\,\partial^\kappa, \qquad A_m=B_m=0, \quad m>0. \qquad /4.8/$$

С другой стороны, в силу /3.19/, /3.22/, /4.1/ и /4.3/ справедливы равенства

$$\mathfrak{A}_k = \sum_{m=0}^{n} A_{k,m}\,\eta^{n-m}, \quad \mathfrak{B}_k = \sum_{m=0}^{n} B_{k,m}\,\eta^{n-m}, \qquad /4.9/$$

причем в силу /2.8/, /3.4/ и /3.6/ справедливы равенства

$$A_{\kappa,0} = a\Lambda_0^{-\kappa}\partial^{\kappa} + \hat{a}_{k,\kappa}, \quad B_{k,0} = 0, \qquad /4.10/$$

где a согласно /2.7/ произвольная диагональная матрица; $\hat{a}_{k,\kappa}$ – дифференциальный оператор порядка $\kappa-1$ при $\kappa>0$ и $\hat{a}_{k,0}=0$. Кроме того, при $v_0 = v_1 = \dots = v_{k_0} \equiv 0$ в силу /2.9/ и /3.4/ справедливы равенства

$$A_{k,0} = a\Lambda_0^{-\kappa}\partial^{\kappa}, \quad A_{k,m} = B_{k,m} = 0, \quad m > 0. \qquad /4.11/$$

Пусть теперь операторы $A'_{k,m}$ и $B'_{k,m}$ получаются из операторов A_m и B_m, входящих в равенства /4.6/, с помощью замены /1.27/. Положим

$$a = C_{\kappa}\Lambda_0^{\kappa} \qquad /4.12/$$

и рассмотрим операторы

$$\hat{A}_{k,m} = A_{k,m} - A'_{k,m}, \quad \hat{B}_{k,m} = B_{k,m} - B'_{k,m}. \qquad /4.13/$$

В силу /7/ и /3.7/ операторы $\hat{A}_{k,m}$ и $\hat{B}_{k,m}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$[\hat{A}_{k,m}, D_k] = \hat{B}_{k,m}\cdot D_k - \hat{B}_{k,m+1}, \quad m \geq 0, \qquad /4.14/$$

причем согласно /4.7/ и /4.10/ имеем $\hat{B}_{k,0}=0$. Кроме того, согласно /4.8/, /4.11/ и /4.12/ при $v_0 = v_1 = \dots = v_{k_0} \equiv 0$ справедливы равенства

$$\hat{A}_{k,m} = \hat{B}_{k,m} = 0, \quad m \geq 0. \qquad /4.15/$$

Покажем, что равенства /4.15/ справедливы при любом выборе матриц $v_0, v_1, \dots, v_{k_0}$. С этой целью предположим противное: пусть среди операторов $\hat{A}_{k,m}$ найдется хоть один ненулевой. Возьмем ненулевой оператор $\hat{A}_{k,m}$ с наименьшим номером $m_0 \geq 0$. Из соотношения /4.14/ следует, что $\hat{B}_{k,0} = \dots = \hat{B}_{k,m_0} = 0$. Значит, справедливо равенство

$$[\hat{A}_{k,m_0}, D_k] + \hat{B}_{k,m_0+1} = 0. \qquad /4.16/$$

Из этого равенства в силу /1.26/ следует, что

$$\hat{A}_{k,m_0} = \hat{C}_k, \qquad /4.17/$$

где $\hat{C}_k$ - диагональная матрица. Действительно, пусть

$$\hat{A}_{k,m_0} = \sum_{\kappa=0}^{\kappa_0} a_\kappa \partial^\kappa,$$

где $0 \le \kappa_0 \le k_0$ и $a_{\kappa_0} \neq 0$. Тогда имеем

$$[\hat{A}_{k,m_0}, D_k] = -[\Lambda_0^{-(k_0+1)}, a_{\kappa_0}]\partial^{k_0+\kappa_0+1} + \omega_0 \partial^{k_0+\kappa_0} + \dots, \qquad /4.18/$$

где

$$\omega_0 = [a_{\kappa_0}, \Lambda_0^{-(k_0+1)} u_{k,k_0}] - [\Lambda_0^{-(k_0+1)}, a_{\kappa_0-1}] -$$
$$- (k_0+1)\Lambda_0^{-(k_0+1)} \frac{\partial a_{\kappa_0}}{\partial x}. \qquad /4.19/$$

В силу того, что порядок оператора $\hat{B}_{k,m_0+1}$ равен k_0, справедливо равенство

$$[\Lambda_0^{-(k_0+1)}, a_{\kappa_0}] = 0. \qquad /4.20/$$

Согласно /6/ отсюда следует, что a_{κ_0} - диагональная матрица. Покажем теперь, что $\kappa_0 = 0$. Действительно, если $\kappa_0 > 0$, то в силу /4.18/ должно выполняться равенство $\omega_0 = 0$. Из этого равенства согласно /4.19/ и /4.20/ следует, что $\partial a_{\kappa_0}/\partial x = 0$. Значит, в силу /4.15/ получаем $a_{\kappa_0} = 0$, вопреки предположению, что $a_{\kappa_0} \neq 0$. Значит, $\kappa_0 = 0$ и равенство /4.17/ доказано.

В силу /4.17/ из равенства /4.16/ следует, что

$$\hat{B}_{k,m_0+1} = -[\hat{C}_k, D_k].$$

Отсюда в силу /4.14/ получаем, что

$$\Delta = [\hat{A}_{k,m_0+1}, D_k] + [\hat{C}_k, D_k] \cdot D_k + \hat{B}_{k,m_0+2} = 0.$$

Пусть

$$\hat{A}_{k,m_0+1} = \sum_{\kappa=0}^{k_0} \hat{a}_\kappa \partial^\kappa,$$

тогда имеем

$$\Lambda = \Lambda_0 \partial^{2k_0+1} + \dots ,$$

где

$$\Lambda_0 = -[\Lambda_0^{-(k_0+1)}, \hat{\alpha}_{k_0}] - (k_0+1)\Lambda_0^{-2(k_0+1)} \frac{\partial \hat{C}_k}{\partial x} .$$

Из равенства $\Lambda_0=0$ следует, что $\frac{\partial \hat{C}_k}{\partial x} = 0$. Отсюда в силу /4.15/ следует, что $\hat{C}_k = 0$, то есть согласно /4.17/ имеем $\hat{A}_{k,m_0} = 0$, вопреки сделанному ранее предположению. Полученное противоречие означает, что /4.15/ справедливо при любом выборе матриц v_0, $v_1, \dots, v_{k_0}$. Отсюда в силу /4.13/ следует, что классы K и $\mathcal{K}$ переходят друг в друга при замене /1.27/.

В заключение необходимо отметить, что классы K и $\mathcal{K}$ могут быть расширены путем включения в них уравнений, получаемых с помощью /7/ и /11/ в случае, когда операторы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, входящие в /7/, и матрица $\mathfrak{A}'$, входящая в /11/, зависят рационально от параметров η и ζ соответственно. Однако из-за недостатка места мы не смогли рассмотреть здесь этот вопрос подробнее. Детальному рассмотрению этого случая будет посвящена отдельная работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Miura R.M. J.Math.Phys., 1968, v.9, No.8, p.1202-1204.
2. Мельников В.К. Функциональный анализ, 1981, т.15, вып.1, с.43-60.
3. Gardner C.S. et al. Phys.Rev.Lett., 1967, v.19, No.19, p.1095-1097.
4. Лакс П.Д. Математика, 1969, т.13, №5, с.128-159.
5. Мельников В.К. ЭЧАЯ, 1980, т.11, вып.5, с.1224-1272.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 марта 1981 года.