объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-81-185

В.М.Мальцев

КРАТНОСТЬ
ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СУММЫ ИЗОСПИНОВ

Направлено в ЯФ

1981

Большой класс задач ядерной физики приводится к вычислению величины $P^{s}_{j,n}$ -кратности, с которой результирующий изоспин /или угловой момент/ j реализуется при векторном сложении n тождественных изоспинов /или угловых моментов/, величины s.

В общем случае возможны два эквивалентных подхода к решению задачи: алгебраический и теоретико-групповой.

Для вычисления кратности первый использует [1,2] рекуррентное соотношение, следующее из закона сложения изоспинов /или угловых моментов/. Однако он громоздок, неудобен для практического счета и не допускает обобщения.

Наша цель- определить эту величину, используя метод интегрирования на группе симметрии.

В данном случае рассматриваемая величина $P^{s}_{j,n}$ равна квадрату проекции вектора $A = \prod_{i=1}^{n} \otimes [s]_i$ на подпространство, преобразующееся по неприводимому представлению $[j]$ группы $SU(2)$, т.е.

$$P^{s}_{j,n} \equiv |\langle [j]|A\rangle|^2 = \langle A|\hat{P}^{[j]}|A\rangle, \qquad /1/$$

где оператор

$$\hat{P}^{[j]} = \int \chi^{*[j]}(g)\,\hat{D}(g)\,dg \qquad /2/$$

проектирует векторы подпространства, в котором действуют операторы $\hat{D}(g)$, на подпространство, преобразующееся по неприводимому представлению $[j]$. Здесь g - элемент группы, $\chi^{[j]}(g)$ - характер неприводимого представления $[j]$, dg - инвариантная мера /нормированный элемент объема/. Подставляя /2/ в соотношение /1/, имеем:

$$P^{s}_{j,n} = \int dg\,\chi^{*[j]}(g)\,[\chi^{[s]}(g)]^{n}. \qquad /3/$$

Поскольку интеграл /3/ содержит только центральные функции, постоянные на классах сопряженных элементов группы, интегрирование на группе [3,4] значительно упрощается.

Известно, что класс сопряженных элементов в $SU(2)$ состоит из матриц, которым соответствуют вращения на один и тот же угол в трехмерном эвклидовом пространстве. Следовательно, любая центральная функция, в частности, характер представления [5]

$$\chi^{[j]} = \frac{\sin[\frac{(2j+1)\phi}{2}]}{\sin(\frac{\phi}{2})} \qquad /4/$$

является однопараметрической, т.е. зависит только от угла ϕ $(0 \le \phi \le \pi)$. Нормированный элемент объема равен [6]

$$dg = \frac{2}{\pi} \sin^2(\frac{\phi}{2})\, d\phi . \qquad /5/$$

Используя /4/ и /5/, производя замену переменной, получаем

$$P^{s}_{j,n} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2j+1)\alpha] \cdot \sin^n[(2s+1)\alpha]}{\sin^{n-1}\alpha}\, d\alpha . \qquad /6/$$

В частности, при $s=1/2$ имеем известную формулу Кондона-Шортли.

Подобная процедура позволяет также получить обобщение на случай различных изоспинов /или угловых моментов/

$$P^{s_1, s_2, \dots, s_n}_{j, k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2j+1)\alpha] \prod_{i=1}^{n} \sin^{k_i}[(2s_i+1)\alpha]}{\sin^{n-1}\alpha}\, d\alpha , \qquad /7/$$

где $\sum_i k_i = n$.

В заключение отметим, что для практического счета выражения /6/ и /7/ несомненно, более удобны, чем ряды алгебраического метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Barashenkov V.S., Barbashov B.M. Suppl.Nuovo Cim., 1958,7, p.19.
2. Mikhailov V.V. J.Phys.A: Math.Gen., 1977, 10, p.147.
3. Cerulus F. Nuovo Cim., 1961, 19, p.528.
4. Maltsev V.M. Nucl.Phys., 1971, B31, p.278.
5. Kasperkovitz P. Proc. 8th Int. Coll. on Group Theor. Methods in Physics, Kiryat Anavim, 1979, p.398.
6. Murnaghan F.D. The Unitary and Rotation Groups. Spartan Books. Washington, D.C., 1962, p.19.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 марта 1981 года.