объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-81-142

В.И.Иноземцев

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПОПРАВКИ К ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ РАДИУСАМ К-МЕЗОНОВ В КВАРКОВОЙ МОДЕЛИ

Направлено в "Acta Physica Polonica"

1981

Нерелятивистская кварковая модель с нарушением SU(3) - симметрии за счет "утяжеления" s -кварка предсказывает ряд соотношений между электромагнитными характеристиками адронов, не зависящих от динамики $qq(q\bar{q})$ -взаимодействия. В частности, отношение электромагнитных радиусов нейтрального и заряженного K -мезонов $\xi = \left| \frac{\langle r^2_{em} \rangle K^\circ}{\langle r^2_{em} \rangle K^+} \right|$, впервые вычисленное в работе [1], полностью определяется в этой модели отношением масс s- и u - кварков:

$$\xi_{NR} = \frac{m_s^2 - m_u^2}{2m_s^2 + m_u^2}. \qquad /1/$$

Равенство /1/ непосредственно следует из нерелятивистского рассмотрения движения частиц с зарядами $(\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{3})$ в системе покоя двухчастичного связанного состояния.

Вопрос о поправках к /1/, обусловленных релятивистскими эффектами, обсуждался в ряде работ [2-4]. На основе аргументов классической теории и анализа треугольной диаграммы в формализме Бете-Солпитера с постоянной $Kq\bar{q}$ -вершиной Гринберг, Нуссинов и Сучер [2] пришли к выводу об уменьшении ξ в релятивистских моделях. Расчеты треугольной диаграммы при тех же предположениях, что и в [2], проведенные в работах [3,4], подтвердили гипотезу $\xi < \xi_{NR}$. Следует отметить, что авторы [4] указали на возможное нарушение этого неравенства при некоторых, весьма искусственных в рамках предложенного ими "релятивистского приближения эффективного радиуса", модификациях вершинной $Kq\bar{q}$ -функции.

В настоящей работе проблема релятивистских поправок к ξ_{NR} обсуждается на основе релятивистского гамильтонова формализма [5-7], позволяющего учесть как кинематические, так и динамические эффекты порядка v^2/c^2 в двухчастичных связанных состояниях. Рассмотрение проводится как в классической, так и квантовой теории. Используемый формализм содержит как частный случай модели взаимодействия точечных частиц посредством скалярных и векторных полей, а также /с точностью $\sim v^2/c^2$/ результаты [2-4] расчета треугольной диаграммы. Показано, что знак релятивистских поправок порядка v^2/c^2 к ξ_{NR} является модельно-зависимым и определяется динамикой $q\bar{q}$ -взаимодействия как в низшем, так и в следующем по v^2/c^2 приближении; для широкого класса моделей имеет место неравенство $\xi \geq \xi_{NR}$, противоположное предполагаемому в /2/.

I. КЛАССИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ

Для описания релятивистских эффектов в $q\bar{q}$-системе в рамках классической релятивистской теории авторы /2/ используют в системе центра масс соотношение

$$v_i(t) = \pm \frac{p(t)}{E_i(t)}, \qquad E_i(t) = \sqrt{p^2(t) + m_i^2}\,, \qquad /2/$$

где $i = \{s, u\}$, $v_i = \frac{dx_i}{dt}$ - скорости частиц, $p(t)$ - их импульсы. Следствием /2/ является "релятивистское сокращение асимметрии масс" - неравенство $\frac{\langle x_s^2\rangle}{\langle x_u^2\rangle} = \frac{\langle E_u^2\rangle}{\langle E_s^2\rangle} \geq \frac{m_u^2}{m_s^2}$ /$\langle\ldots\rangle$ - усреднение по периоду относительного движения/. Поскольку $\xi = \left(\frac{\langle x_s^2\rangle}{\langle x_u^2\rangle} - 1\right)\left(2\frac{\langle x_s^2\rangle}{\langle x_u^2\rangle} + 1\right)^{-1}$, то из /2/ следует $\xi \leq \xi_{NR}$. Отметим, однако, что соотношение /2/, справедливое для свободных релятивистских частиц, вообще говоря, неприменимо к описанию движения в связанном состоянии /например, в классической электродинамике/. В релятивистской /с точностью до членов v^2/c^2/ теории взаимодействующих частиц, описываемой гамильтонианом

$$H = \sum_{i=1,2}\left(\frac{p_i^2}{2m_i} - \frac{1}{8c^2}\frac{\vec{p}_i^{\,4}}{m_i^3}\right) + V(r) - \frac{1}{4m_1 m_2 c^2}\left[\left(\vec{p}_1 V \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \vec{r}\,\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\vec{r}\,\vec{p}_2\right) + (1 \to 2)\right], \qquad /3/$$

$$(\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2, \quad r = |\vec{r}|)$$

соотношение /2/ заведомо не имеет места при $V(r) \neq 0$. В системе центра масс ($\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$) величина $\vec{R} = \frac{c^2}{E}\left[m_1\left(1 + \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_1^2 c^2}\right)\vec{x}_1 + m_2\left(1 + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m_2^2 c^2}\right)\vec{x}_2 + \frac{(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)}{2}\frac{V(r)}{c^2}\right]$ /E - полная энергия/ является интегралом движения; выбирая начало координат таким образом, чтобы выполнялось условие $\vec{R} = 0$, получим:

$$\vec{x}_1 = \frac{\vec{r}\,\tilde{m}_2}{\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2}, \qquad \vec{x}_2 = -\frac{\vec{r}\,\tilde{m}_1}{\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2},$$

$$\tilde{m}_i = m_i + \left[\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m_i} + \frac{V(r)}{2}\right]\frac{1}{c^2}, \qquad \vec{p} = \vec{p}_1 = -\vec{p}_2.$$

С той же точностью $\sim v^2/c^2$ имеем

$$\frac{\langle \vec{x}_1^{\,2}\rangle}{\langle \vec{x}_2^{\,2}\rangle} = \frac{m_2^2}{m_1^2}\left[1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2 \langle r^2\rangle c^2}\left\langle r^2\left(\frac{\vec{p}^{\,2}}{\mu} + V(r)\right)\right\rangle\right],$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \qquad /4/$$

Полагая $m_1 = m_s$, $m_2 = m_u$, можно убедиться в том, что знак релятивистской поправки к ξ_{NR} противоположен знаку величины

$$\left\langle r^2\left(\frac{p^2}{\mu} + V(r)\right)\right\rangle = \epsilon\langle r^2\rangle + \frac{\langle r^2 p^2\rangle}{2\mu}, \qquad /5/$$

где ϵ - энергия связи.

Если движение происходит в области, в которой $V(r) < 0$, $|\langle r^2 V(r)\rangle| > \frac{\langle r^2 p^2\rangle}{\mu}$, знак классической поправки к ξ_{NR}, в отличие от результата работы /2/, является положительным.

Равенство /4/ справедливо для взаимодействия частиц посредством скалярных, векторных и тензорных полей в пределе слабой связи. В общем случае релятивистски - инвариантной с точностью $\sim \frac{v^2}{c^2}$ гамильтоновой теории /6/ выражение для координаты центра масс содержит произвольную функцию $\Omega^{(1)}(r; m_1, m_2)$, удовлетворяющую условию антисимметрии относительно перестановки $1 \to 2$:

$$\vec{R} = \frac{1}{m}\left[m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 + \frac{1}{2c^2}\vec{r}\left(\mu\left(\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{m_1^2} - \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{m_2^2}\right) - \Omega^{(1)}(r; m_1, m_2)\right)\right].$$

В системе центра масс

$$\frac{\langle x_1^2\rangle}{\langle x_2^2\rangle} = \frac{m_2^2}{m_1^2}\left[1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2 \langle r^2\rangle c^2}\left\langle r^2\left(\frac{\vec{p}^{\,2}}{\mu} + \frac{m}{m_1 - m_2}\Omega^{(1)}(r; m_1, m_2)\right)\right\rangle\right]. \qquad /6/$$

Выражение /6/ переходит в /4/ при $\Omega^{(1)} = \frac{m_1 - m_2}{m}V(r)$.

Таким образом, классическая теория указывает на довольно сильную зависимость величины и знака релятивистских поправок к ξ_{NR} от динамики взаимодействия как в низшем /обычном нерелятивистском/, так и в следующем по v^2/c^2 приближении.

II. КВАНТОВЫЕ МОДЕЛИ

Для вычисления ξ в квантовой теории будем, как и в /1-4/, использовать выражение $\langle r_{em}^2\rangle$ через электромагнитный формфактор:

$$\langle r_{em}^2\rangle = 6\,\frac{\partial F_{em}(q^2)}{\partial q^2}\Big/_{q^2 = 0},$$

где q - 4-мерный вектор переданного импульса. Мы будем рассматривать, как и в работе /2/, связанные состояния скалярных частиц. В модели, описываемой гамильтонианом /3/, волновые функции состояний с определенным полным импульсом $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ могут быть найдены в x-представлении с помощью стандартной процедуры:

$$\psi_{\vec P}(\vec x_1,\vec x_2)=\exp(i\vec P\vec R_0)\exp(i\hat\chi(\vec P))[\phi_0(\vec r)+\phi_1(\vec r)], \qquad /7/$$

где

$$\hat\chi(\vec P)=\hat\chi_1(\vec P)+\hat\chi_2(\vec P), \qquad /8/$$

$$\hat\chi_1(\vec P)=\frac{1}{4m^2c^2}(\vec P\vec r\cdot\vec P\vec p+\vec P\vec p\cdot\vec P\vec r), \qquad /8a/$$

$$\chi_2(\vec P)=-\frac{m_1-m_2}{2m_1m_2mc^2}[\mu(\vec P\vec r)V(r)+\frac{1}{2}(\vec p^2(\vec P\vec r)+(\vec P\vec r)\vec p^2)], \qquad /8б/$$

$$\vec R_0=m^{-1}(m_1\vec x_1+m_2\vec x_2);$$

$\vec p$ - оператор, канонически сопряженный $\vec r$ /отметим, что $\vec x_i, \vec p_i$ удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям/. Волновая функция относительного движения $\phi(\vec r)=\phi_0(\vec r)+\phi_1(\vec r)$ представляет собой решение уравнения Шредингера для относительного движения

$$(H_0+H_1)\phi=\epsilon\phi,$$

где $H_0=\frac{\vec p^2}{2\mu}+V(r)$ - гамильтониан нерелятивистского приближения;

$$H_1=-\frac{1}{c^2}[\frac{\vec p^4}{8}(\frac{1}{m_1^3}+\frac{1}{m_2^3})+\frac{1}{2m_1m_2}(\vec p\vec r\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\vec r\vec p-pV\vec p)], \qquad /9/$$

$\phi_0(\vec r)$ - собственная функция гамильтониана H_0.

Поправки $\sim v^2/c^2$ к электромагнитному формфактору состояний, описываемых волновыми функциями /7/, разделяются на 3 класса:
i) поправки, возникающие вследствие отличия волновой функции относительного движения от $\phi_0(\vec r)$;
ii) кинематические эффекты "лоренц-сжатия" волновой функции /8/, описываемые квадратичным по $\vec P$ оператором $\hat\chi_1$; с точностью до членов $\sim v^2/c^2$ эти эффекты состоят в замене

$$F_{NR}(q^2)\to F_{NR}(q^2+\frac{(q^2)^2}{4m^2c^2});$$

iii) поправки, обусловленные линейным по $\vec P$ оператором $\hat\chi_2$, существующие лишь для систем частиц с $m_1\neq m_2$.

Простые, но довольно длинные вычисления приводят к следующему выражению для формфактора системы двух частиц с зарядами e_1, e_2 с точностью до слагаемых $\sim q^2$, $\frac{v^2}{c^2}$:

$$F_{em}(q^2)\simeq e_1+e_2+\frac{q^2}{6}\{\langle r^2\rangle\frac{m_2^2e_1+m_1^2e_2}{m^2}-\frac{(m_1-m_2)}{m^3c^2}(e_2m_1-e_1m_2)\langle r^2(V(r)+\frac{\vec p^2}{2\mu})+r\frac{\vec p^2}{2\mu}\vec r\rangle\}. \qquad /10/$$

Усреднение в первом слагаемом в фигурных скобках производится с волновой функцией $\phi=\phi_0+\phi_1$/что приводит к поправкам класса (i) /; при усреднении во втором слагаемом, содержащем $1/c^2$, используется волновая функция нерелятивистского приближения $\phi_0(\vec r)$. Отметим, что поправки класса (ii) имеют высший порядок по q^2 и не вносят вклада в среднеквадратичный электромагнитный радиус связанного состояния.

Применяя общую формулу /10/ для вычисления отношения $\frac{\langle r^2_{em}\rangle K^\circ}{\langle r^2_{em}\rangle K^+}$, получим, что знак релятивистских поправок к ξ_{NR} противоположен знаку величины

$$\eta=\langle r^2(V(r)+\frac{p^2}{2\mu})+\frac{1}{2\mu}\vec r\vec p^2\vec r\rangle, \qquad /11/$$

т.е. квантовый результат совпадает с классическим с точностью до упорядочения операторов $\vec r, \vec p^2$.

Гамильтониан общей релятивистски-инвариантной /с указанной точностью/ теории содержит, помимо $V(r)$, 4 произвольные функции переменной $r=|\vec x_1-\vec x_2|$ /6/. Три из них входят в гамильтониан относительного движения, обобщающий /9/. Подобный произвол приводит лишь к изменению $\langle r^2\rangle$ в /10/ и не влияет на отношение среднеквадратичных электромагнитных радиусов ξ. Четвертая произвольная функция, отличная от нуля лишь для нетождественных частиц, входит в оператор $\hat\chi_2(\vec P)$ /8б/. Можно показать, что, как и в классической теории, общее выражение для формфактора /10/ и величины η /11/ может быть получено заменой $V(r)\to\frac{m}{m_1-m_2}\Omega(r;m_1,m_2)$, причем все характеристики связанного состояния в системе центра масс /энергия связи, $\langle r^2\rangle$ и т.д./ не зависят от $\Omega(r;m_1,m_2)$.

Рассмотрим некоторые примеры, ограничиваясь моделями типа /3/. Для s-состояний, определяемых потенциалом $V(r)=\frac{const}{r}$, вычисление $\eta=2\epsilon\langle r^2\rangle+\frac{3}{2\mu}-\langle r^2V(r)\rangle$ приводит к результату $\eta\sim 1-n^2$ /n - главное квантовое число/; в основном состоянии /n=1/ релятивистские поправки к ξ_{NR} порядка v^2/c^2 вообще отсутствуют. Более сложным является вычисление η для основного состояния в потенциале прямоугольной ямы

$$V(r)=\begin{cases}-V_0, & r<r_0,\\ 0, & r>r_0.\end{cases} \qquad /12/$$

Расчеты показывают, что знак η определяется величиной параметра $a=r_0^{-1}(2\mu V_0)^{-1/2}$ $(0<a\le 2/\pi)$:

$$\text{sign}\ \eta=-\text{sign}(\xi-\xi_{NR})=\text{sign}(a-a_0), \quad a_0=\frac{2}{3\pi}. \qquad /13/$$

При $\alpha < \alpha_0$ знак релятивистской поправки к ξ_{NR} положителен. Отметим, что потенциал сил нулевого радиуса действия, для которого волновая функция связанного состояния соответствует постоянной $Kq\bar{q}$ -вершине треугольной диаграммы /в нерелятивистском пределе/, может быть получен из /12/ при $r_0 \to 0$, $\alpha = \frac{2}{\pi}$. Согласно /13/ в этом случае $\xi < \xi_{NR}$ в соответствии с результатом работ /2-4/.

Таким образом, и в квантовых моделях знак поправок к ξ_{NR} зависит как от формы потенциала в низшем приближении, так и от динамики $q\bar{q}$-взаимодействия в высших порядках по v^2/c^2. Проведенное рассмотрение указывает на возможность положительных или крайне малых значений $(\xi - \xi_{NR})$. В этой связи любопытно отметить, что последние экспериментальные данные по определению $\langle r^2_{em} \rangle_{K^\circ, K^-}$ /9/ приводят к значению $\xi = 0,19 \pm 0,1$, которое хорошо согласуется с нерелятивистской оценкой $\xi \approx 0,2$ /1,3/.

Автор глубоко благодарен С.Б.Герасимову и А.Б.Говоркову за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Герасимов С.Б. ЖЭТФ, 1966, 50, с. 1559.
2. Greenberg O.W., Nussinow S., Sucher J. Phys.Lett., 1977, 70B, p. 465.
3. Герасимов С.Б. ЯФ, 1979, 29, с. 513.
4. Nowak E., Sucher J. Nucl.Phys., 1980, B169, p. 88.
5. Bagge E. Z.Naturforsch., 1946, 1, p. 361; Coleman S., Van Vleck J.H. Phys.Rev., 1968, 171, p. 1370.
6. Pauri G., Prosperi M. J.Math.Phys., 1976, 17, p. 1468.
7. Krajcik R., Foldy L.L. Phys.Rev., 1974, D10, p. 1777.
8. Friar J.L. Ann.Phys., 1973, 81, p. 332.
9. Molzon W.R. et al. Phys.Rev.Lett., 1978, 41, p. 1213; Dally E.B. et al. Phys. Rev.Lett., 1980, 45, p. 232.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 февраля 1981 года.