СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2-8090

М.В.Гершкевич, А.В.Ефремов

ТРЕХРЕДЖЕОННОЕ ПЕРЕРАССЕЯНИЕ В ТЕОРИИ φ^3

1974

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2-8090

М.В.Гершкевич, А.В.Ефремов

ТРЕХРЕДЖЕОННОЕ ПЕРЕРАССЕЯНИЕ В ТЕОРИИ φ^3

Гершкевич М.В., Ефремов А.В. Р2-8090

Трехреджеонное перерассеяние в теории

В α -представлении на примере мандельстамовской диаграммы, имитирующей трехреджеонный обмен в теории ϕ^3 показано, что перерассеяние реджионов приводит к разрезу в точке

$$j = n\alpha(t/n^2) - n + 1$$

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1974

P2-8090

Gershkevich M.V., Efremov A.V.

Three-Reggeon Rescattering in ϕ^2 -Theory

Using α -parameter method it is shown, that nonplannar diagram imitating three-region exchange have the cut in j -plane at the point $j=n\alpha(t/n^2)-n+1$ with $n=3$. It is shown that this rule is valid for any n.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1974

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1], суммирование лестничных диаграмм в теории ϕ^3 приводит к движущемуся полюсу в комплексной плоскости углового момента в точке $j = \alpha(t)$. Двойной обмен такими полюсами генерирует ветвление в точке $j = \alpha(t_1) + \alpha(t_2) - 1$. Впервые на возможность существования подобных ветвлений указали Амати, Фубини и Стангеллини [2]. Однако, как выяснилось [3], рассмотренная ими плоская диаграмма генерирует разрез на нефизическом листе, который на физическом листе аннулируется многочастичными вкладами. Но подобные ветвления были обнаружены у так называемых неплоских диаграмм с ненулевой третьей спектральной функцией ρ_{su} двойного представления Мандельстама [4] и явились предметом изучения многих работ Однако, дальнейший прогресс в изучении диаграмм, иллюстрирующих многореджеонный обмен в теории возмущений затруднен ввиду их сложности. Поэтому были предприняты попытки получить многореджеонные ветвления вне рамок теории возмущений. Наибольшего успеха здесь удалось достичь в "реджеонной технике" Грибова [6], а также в квазипотенциальной [7] и эйкональной [8] моделях. Было показано, что многореджеонный обмен генерирует в плоскости углового момента ветвления в точке

$$j = \alpha_c(t) = \alpha(t_1) + \alpha(t_2) + \ldots \alpha(t_n) - n + 1 \quad (\sum_{i=1}^{n} \sqrt{-t} = \sqrt{-t}\ ),$$

и для идентичных траекторий $\alpha(t_i)$ имеет место правило

$$\alpha_c(t) = n\alpha(t/n^2) - n + 1\ ; \quad n = 2, 3, \ldots, \qquad /1/$$

которое широко используется в современной феноменологии. Если все реджеоны - помероны, т.е. $\alpha(0)=1$, то правило /1/ при $t=0$ сводится к $\alpha_c(0)=1$, указывая тем самым на необходимость учета перерассеяний особенности Померанчука при изучении рассеяния вперед при высоких энергиях.

Как отмечалось выше, правило /1/ для $n>2$ не было продемонстрировано в рамках теории возмущений. Поэтому подобная проверка представляет интерес. Это является целью данной работы. На примере неплоской диаграммы, имитирующей трехреджеонный обмен в t -канале в теории ϕ^3, получено правило /1/ для $n=3$, которое, как видно из рассмотрения, легко может быть обобщено на случай $n>3$.

2. *ТРЕХРЕДЖЕОННЫЙ РАЗРЕЗ*

Вклад произвольной диаграммы /*рис. 1*/ в представлении фейнмановских параметров α записывается в виде

$$T(S,t)=H\int_0^\infty \frac{\pi\, d\alpha}{D^2(\alpha)} \exp[iA(\alpha)S+J(\alpha,t;m^2)], \qquad /2/$$

где $S=(s-u)/2$, а $J(\alpha,t;m^2)$ - линейная функция по t / s, t, u- обычные мандельстамовские переменные/, H- степень констант связи, равная порядку диаграммы.

Изучение асимптотического поведения диаграмм удобно проводить на языке особенностей в комплексной плоскости меллиновского параметра j, вводимого вместо большой переменной S, которые совпадают с ведущими особенностями в плоскости углового момента. Аккуратный переход к этому параметру требует, как известно, выделения положительной и отрицательной сигнатур, т.е.

$$T^{\pm}(S,t)=-\frac{1}{4i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} dj\, \frac{(-S)^j\pm S^j}{\sin\pi j}\; \frac{\Phi^{\pm}(j;t)}{\Gamma(j+1)}, \qquad /3/$$

где

$$\Phi^{\pm}(j;t)=H'\int_0^\infty \frac{\pi\, d\alpha}{D^2(\alpha)}\,|A(\alpha)|^{j}\epsilon_{\pm}(A)\,e^{J(\alpha,t;m^2)} \qquad /4/$$

и

$$\epsilon_{\pm}(A)=\theta(A)\pm\theta(-A).$$

Асимптотическое поведение диаграмм определяется самой правой особенностью в комплексной j-плоскости. Как видно из /4/, эта особенность может возникнуть как из-за обращения функции $A(\alpha)$ на нижнем краю области интегрирования /краевые особенности/ , так и в середине ее из-за сокращения в $A(\alpha)$ членов с разными знаками /пинчевые особенности/ или одновременно из-за сокращения некоторых членов с разными знаками и обращения остальных в нуль на краю области интегрирования по /полукраевые особенности/.

Краевые особенности диаграмм мандельстамовского типа связаны с интегрированием по параметрам α вблизи нуля, отвечающим "перекладинам" лестничных диаграмм и двум линиям каждого "креста" и являются полюсами второго порядка в точке $j=-(k+\ell)$ для диаграммы, состоящей из k "крестов" и ℓ "лестниц".

Пинчевые особенности появляются из-за знаконеопределенности функций параметров крестов /см. /6//. Для диаграммы мандельстамовского типа, состоящей из k "крестов" из-за сигнатурного фактора в /3/ это есть простой полюс в точке $j=-k/2$.

Рассмотрим подробнее полукраевые особенности диаграммы *рис. 1*. Согласно Полкингхорну [4] функция $A(\alpha)$ представима в виде

$$A(\alpha)=\frac{D_1(\alpha)D_2(\alpha)}{D(\alpha)}\,X(\alpha)\,Y(\alpha)+\bar{A}(\alpha), \qquad /5/$$

где $D_{1,2}(\alpha)$ и $D(\alpha)$- детерминанты блоков и всей диаграммы

$$\begin{aligned} X(\alpha)&=\alpha_1\alpha_2-\alpha_3\alpha_4+P_2(\alpha)/D_1(\alpha)\,D_2(\alpha);\\ Y(\alpha)&=\alpha_1'\alpha_2'-\alpha_3'\alpha_4'+P_1(\alpha)/D_1(\alpha)\,D_2(\alpha). \end{aligned} \qquad /6/$$

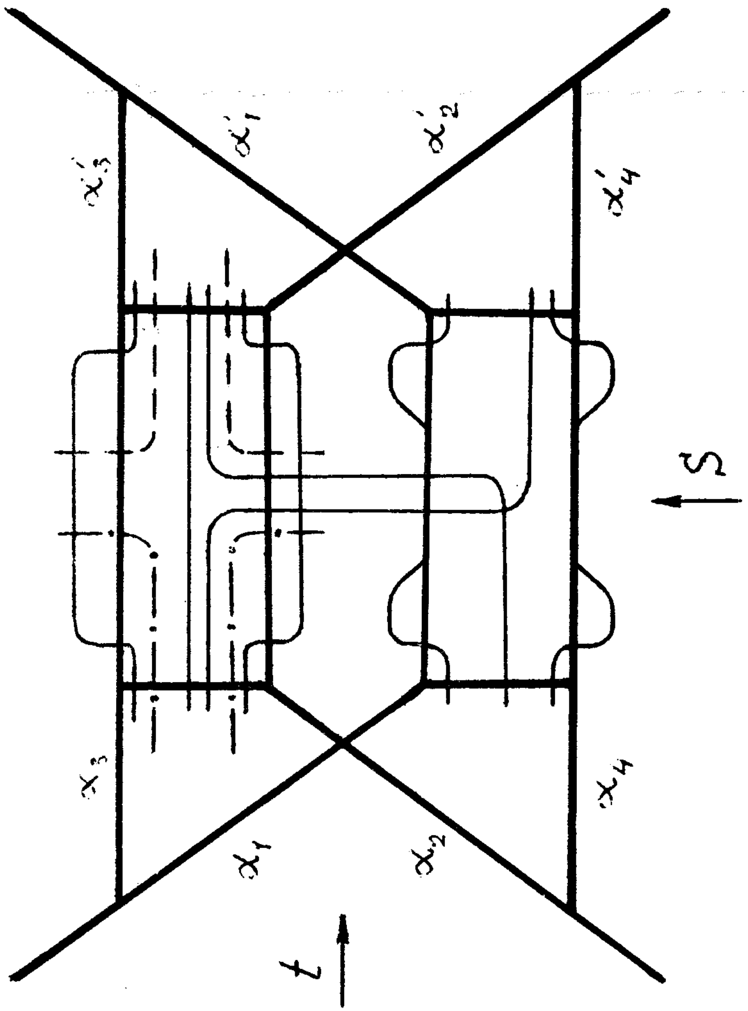

Рис. 1

Функции $P_1(a)$ и $P_2(a)$ состоят из слагаемых от всевозможных "рассечений" блоков, как показано на *рис. 1* /пунктирными линиями для $P_1(a)$ и штрих-пунктирными для $P_2(a)$. Аналогичные рассечения делаются и для другого блока/. Функция $\bar{A}(a)$ имеет вид

$$D_1(a)\ D_2(a)\ \bar{A}(a) = Q(a) - P_1(a)\ P_2(a)\ , \qquad /7/$$

где функция $Q(a)$ определяется рассечениями блоков, как показано на *рис. 1* сплошными линиями, поэтому выражение /7/ можно представить в виде

$$\bar{A}(a) = a_1(a)\ A_1(a) + a_2(a)\ A_2(a)\ , \qquad /8/$$

где $a_{1,2}(a)$ - некоторые функции параметров a, а $A_{1,2}(a)$ - коэффициенты при переменной S в a - представлении амплитуды рассеяния /2/, соответствующие блокам.

Пусть, для определенности, верхний блок представляет собой мандельстамовскую диаграмму /*рис. 2*/, а нижний - лестничную. Тогда, если сжать в точки хотя бы по одной перекладине каждой лестницы, то диаграмма на *рис. 1* станет трехсвязной и из функций $P_{1,2}$, $a_{1,2}$ выпадут члены, отвечающие линиям рассечения, которые проходят через сжатые перекладины лестниц. Если сжаты все перекладины всех лестниц /главное приближение/, то в функциях $P_{1,2}(a)$ останутся только члены, составленные из параметров "крестов" *рис. 2*, а функции $a_{1,2}(a)$ будут равны единице.

В главном приближении функция $A_1(a)$ имеет вид:

$$A_1(a) = \frac{d_1(a)\ d_2(a)}{D_1(a)}\ x(a)\ y(a) + B_1(a) + B_2(a)\ , \qquad /9/$$

где

$$\left.\begin{aligned} x(a) &= a_5 a_6 - a_7 a_8 + P_2(a) / d_1(a)\ d_2(a)\ ; \\ y(a) &= a'_5 a'_6 - a'_7 a'_8 + p_1(a) / d_1(a)\ d_2(a)\ , \end{aligned}\right\} \qquad /10/$$

$d_{1,2}(a)$ - детерминанты, а $B_{1,2}(a)$ - коэффициенты при переменной S для "лестниц" диаграммы *рис. 2*. Функции

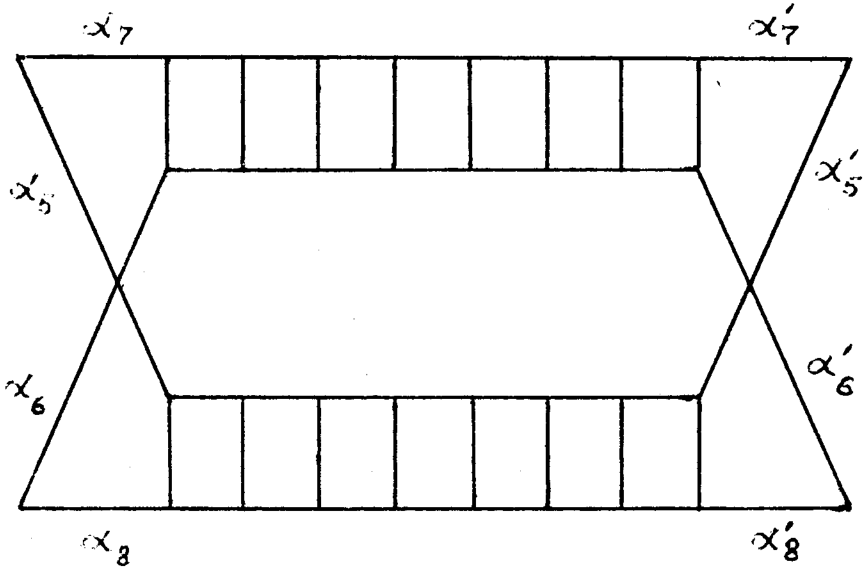

Рис. 2

$P_{1,2}(a)$ зависят только от параметров "крестов" диаграммы *рис. 1*.

Далее, следуя Тиктопулосу /9/, вводим новые переменные η_1, η_2 для функций /6/ и ξ_1, ξ_2 для функций /10/. Тогда $|A(a)|^j \epsilon_\pm(A)$ из выражения /4/ с учетом /5/, 8/ и /9/ с помощью биноминального разложения и перехода от суммирования к интегрированию по параметрам j_1 и j_2 в комплексной плоскости можно записать в виде

$$|A(a)|^j \epsilon_\pm(A) \sim \delta(X)\,\delta(Y)\,\delta(x)\,\delta(y) \times$$

$$\times \int_{\delta_1 - i\infty}^{\delta_1 + i\infty} dj_1 \frac{e^{i\pi j_1} \pm 1}{\Gamma(j_1+1)\sin\pi j_1} \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} d\eta_1 d\eta_2 \left|\frac{D_1 D_2}{D}\eta_1\eta_2\right|^{j_1} \epsilon_\pm(\eta_1\eta_2) \times \qquad /11/$$

$$\times \int_{\delta_2 - i\infty}^{\delta_2 + i\infty} dj_2 \frac{e^{i\pi j_2} \pm 1}{\Gamma(j_2+1)\sin\pi j_2} |A_2(a)|^{j_2} \epsilon_\pm(A_2) \frac{K^\pm(j, j_1, j_2; a)}{\Gamma(j - j_1 - j_2 + 1)},$$

где

$$K^\pm(j, j_1, j_2; a) = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} d\xi_1 d\xi_2 \Big[\frac{d_1 d_2}{D_1}\xi_1\xi_2 + B_1(a) + \qquad /12/$$

$$B_2(a)\Big]^{j - j_1 - j_2} \epsilon_\pm(A_1).$$

Выражение /11/ задает величину $|A(a)|^{j'} \epsilon_\pm(A)$, входящую в /4/, для диаграммы *рис. 2* и производит, как известно, полюса в точке $j' = -3$, суммирование которых приводит к движущемуся ветвлению.

Интегрирование по η_1 и η_2 в выражении /11/ дает полюс второго порядка в точке $j_1 = -1$, один порядок которого поглощается сигнатурным фактором по j_1. Смещая линию δ_1 в j_1-плоскости влево и учитывая только вклад полюса в точке $j_1 = -1$, получим выражение /4/ в виде:

$$\Phi^{\pm}(j;t) \sim \int_0^{\infty} \frac{\Pi\, d\alpha}{D(\alpha)D_1(\alpha)D_2(\alpha)}\, \delta(X)\delta(Y)\delta(x)\delta(y)\, e^{J(\alpha,t;m^2)} \times \qquad /13/$$

$$\times \int_{\delta_2-i\infty}^{\delta_2+i\infty} dj_2 \frac{\Gamma(j+1)(e^{i\pi j_2} \pm 1)}{\Gamma(j_2+1)\sin\pi j_2}\, |A_2(\alpha)|^{j_2} \epsilon_{\pm}(A_2)\, \frac{K^{\pm}(j,j_2;\alpha)}{\Gamma(j-j_2+2)}.$$

В главном приближении это выражение соответствует диаграмме, изображенной на *рис. 3*, которая получается из диаграммы *рис. 1* при сжатии всех перекладин всех лестниц в точки. Для такой диаграммы можно ввести двумерные инварианты Друммонда /10/ t_1, t_2, t_3, t_4 /*рис. 3*/, что позволяет в /13/ разделить члены, соответствующие сжатым лестничным диаграммам и "отделить" их от "крестов". Тогда выражение /13/ может быть представлено в виде свертки парциальных амплитуд рассеяния, соответствующих лестничной $\Phi_1(j,t_1)$ и мандельстамовской $\Phi_2(j;t_2,t_3)$ диаграммам с функциями $f(t,t_1;t_2,t_3,t_4)$, которые, в свою очередь, соответствуют частям диаграммы *рис. 1*, состоящим из "крестов" одной из ее сторон. Таким образом, имеем

$$\Phi^{\pm}(j;t) \sim \int_{-\infty}^{0} \frac{f^2\, dt_1 dt_2 dt_3 dt_4}{[r(t,t_1,t_4)\, r(t_4,t_2,t_3)]^{1/2}}\, \Gamma(j+1) \times \qquad /14/$$

$$\times \int_{\delta_2-i\infty}^{\delta_2+i\infty} dj_2 \frac{e^{i\pi j_2} \pm 1}{\sin\pi j_2}\, \frac{\Phi_1^{\pm}(j_2;t_1)}{\Gamma(j_2+1)}\, \frac{\Phi_2^{\pm}(j+1-j_2;t_2,t_3)}{\Gamma(j-j_2+2)}.$$

Функции $r(x,y,z) = -x^2-y^2-z^2+2(xy+xz+yz)$ появляются из якобианов заменой интегрирований по 4-импульсам петель между "лестницами" на интегрирования по инвариантам t_i. Главный вклад выражение /14/ дает в области, где $r \sim 0$, т.е.

$$\sqrt{-t_1} + \sqrt{-t_2} + \sqrt{-t_3} = \sqrt{-t}\ . \qquad /15/$$

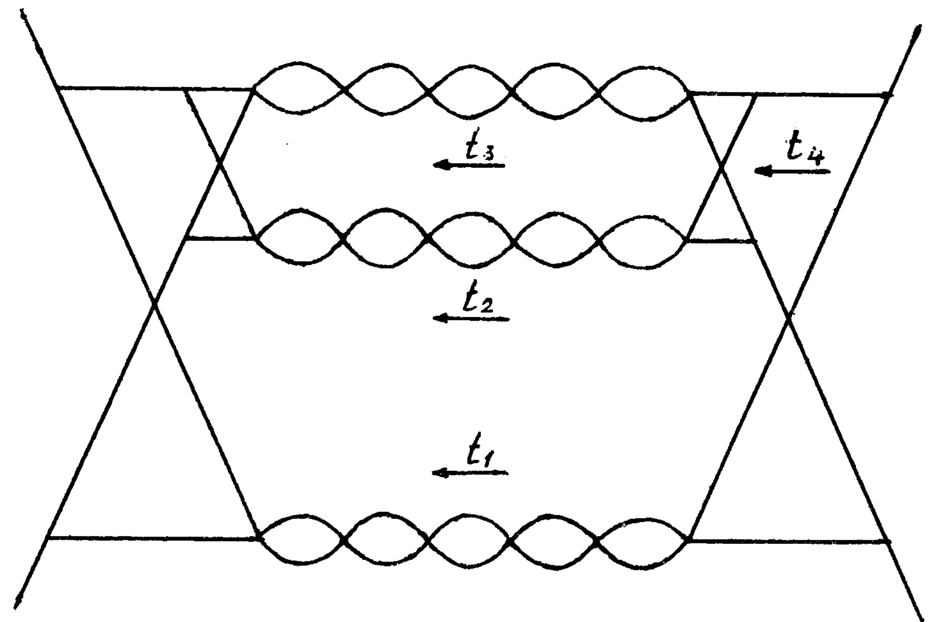

Рис. 3

Как известно /1/ , $\Phi_1(j_2;t)$ имеет полюса в точке $j_2 = -1$, порядок которых определяется числом "перекладин" лестничной диаграммы, стянутых в точки. Суммирование этих полюсов приводит в плоскости j_2 к движущемуся полюсу в точке $j_2 = \alpha(t_1)$, а суммирование особенностей функции $\Phi_2^{\pm}(j+1-j_2;\, t_2, t_3)$, как выше указывалось, - к движущемуся ветвлению в точке $j = j_2 + \alpha(t_2) + \alpha(t_3) - 2$. Интегрирование по j_2 в /14/ приводит к выражению

$$\Phi_3(j;t_i) \sim [\, j - \alpha(t_1) - \alpha(t_2) - \alpha(t_3) + 2\,]^{-1}, \qquad /16/$$

где $\alpha(t_i)$ ведущие особенности амплитуд рассеяния лестничных диаграмм.

Нетрудно заметить, что процедура получения трехреджеонного разреза /формула /16// может быть обобщена на случай большего числа реджеонов, если оба блока на *рис. 1* являются мандельстамовскими диаграммами /*рис. 2*/. В этом случае выражение /14/ будет сверткой парциальных амплитуд $\Phi_2(j;t_1,t_2)$ и $\Phi_2(j;t_3,t_4)$, которая является парциальной амплитудой $\Phi_4(j;t_i)$:

$$\Phi_4(j;t_i) \sim [\, j - \alpha(t_1) - \alpha(t_2) - \alpha(t_3) - \alpha(t_4) + 3\,]^{-1}. \qquad /17/$$

Используя /16/, можно получить движущееся ветвление для диаграммы *рис. 1*, у которой один блок является мандельстамовской диаграммой с тремя, а другой - с двумя лестницами и так далее. Таким образом, для диаграммы с n лестницами можно получить движущееся ветвление в точке $j = \alpha(t_1) + \alpha(t_2) + \ldots + \alpha(t_n) - n + 1$. Причем, переменные t_i связаны соотношением

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{-t_i} = \sqrt{-t}, \qquad /18/$$

которое является обобщением /15/ и следует из того, что число функций r в /14/ совпадает с числом "крестов" одной из сторон мандельстамовской диаграммы. Полагая $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = t/n^2$, приходим к правилу /1/.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, суммирование в теории возмущений последовательностей диаграмм мандельстамовского типа, т.е. имеющих третью спектральную функцию ρ_{su} двойного представления Мандельстама, приводит в комплексной плоскости углового момента к движущимся ветвлениям, положения которых определяются простым правилом для идентичных траекторий: $j = \alpha_c(t) = n\,\alpha(t/n^2) - n + 1$.

Однако возникает трудность при вычислении функции скачка $\Delta\Phi(j;t)$ на соответствующем разрезе, так как теория возмущений не дает информации ни о виде функции скачка, ни о ее поведении в окрестности точки ветвления. В настоящее время не существует удовлетворительной процедуры ее вычисления, хотя некоторый прогресс сделан с помощью эйкональной модели /8/, которая предсказывает для $\Delta\Phi(j;t)$ логарифмическое ветвление вида:

$$\Delta\Phi(j;t) \sim [\, j - \alpha_c(t)\,]^{n-2} \ln[\, j - \alpha_c(t)\,]$$

при $n > 1$. Однако сомнительно, чтобы это выражение имело бы место для $n = 2$, так как условие t -канальной унитарности /11/ требует, чтобы функция $\Delta\Phi(j;t)$ была сингулярной и исчезла в точке ветвления $j = \alpha_c(t)$, т.е.

$$\Delta\Phi(j;t) \underset{j \to \alpha_c(t)}{\sim} [\, j - \alpha_c(t)\,]^{\beta},$$

где β - неизвестный фактор.

Другой вопрос, который широко обсуждается в современной литературе, это - сила разреза. Ясно, что величина вклада разреза относительно вклада полюса ослаблена из-за дополнительных логарифмов, но насколько - теория возмущений ответа не дает. Феноменологические подгонки указывают на необходимость введения так называемых "ливневых" факторов /12/, которые выбираются различными для разных процессов и служат для усиления разрезов. Простым примером могут быть процессы $\gamma p \to \pi^+ n$ и $pn \to np$, в которых доминирует обмен π -траекторией. Если разрез / π-померон/

является конспиратором /13/, то он будет давать относительно большой вклад $\lambda = 3{,}55$ /в эйкональной модели $\lambda = 1$ /.

Литература

1. B.W.Lee, R.F.Sawyer. Phys.Rev., 127, 2266, 1962.
   P.G.Federbush, M.T.Grisaru. Ann.Phys., 22, 263, 1963.
   J.C.Polkinghorne. Journ. Math.Phys., 4, 503, 1963.
2. D.Amati, S.Fubini and A.Stanghellini. Nuovo Cimento., 26, 896, 1962; Phys.Lett., 1, 29, 1962.
3. S.Mandelstam. Nuovo Cimento, 30, 1127, 1963.
   J.C.Polkinghorne. Phys.Lett., 4, 24, 1963.
4. J.C.Polkinghorne. Journ. Math. Phys., 5, 431, 1964.
   S.Mandelstam. Nuovo Cimento, 30, 1148, 1963.
5. G.E.Hite. Acta Physica Austriaka. Suppl., v. III, 180, 1970.
   P.V.Landshoff. Acta Physica Austrika, Suppl. v.III, 145, 1970.
6. В.Н.Грибов. ЖЭТФ, 26, 414, 1968.
7. V.R.Garsevanishvili et al. JINR Preprint, E2-4251, Dubna, 1969. /см. ЭЧАЯ, 1, 98, 1970/.
8. R.C.Arnold. Phys.Rev., 153, 1523, 1967.
9. G.Tiktopoulos. Phys.Rev., 131, 2373, 1963.
10. I.I.Drummond. Nuovo Cimento, 29, 720, 1963.
11. J.B.Bronzan, C.E.Jones. Phys.Rev., 160, 1494, 1967.
12. А.Б.Кайдалов, ЯФ, 16, 389, 1972.
13. G.L.Kane et al. Phys.Rev.Lett., 25, 1519, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 июля 1974 года.