ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 8070

А.Б.Пестов

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 8070

А.Б.Пестов

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Направлено в сборник "Проблемы теории гравитации и элементарных частиц"

Известный метод помещения изучаемой системы в ящик мы применяем к электромагнитному полю, заключая его в гравитационный ящик. Идея метода гравитационного ящика была впервые предложена в работе /1/ и получила дальнейшее развитие в работах /2,3/. Здесь в качестве гравитационного ящика берется компактное ориентируемое риманово пространство V_3. Весь мир в таком случае будет прямым топологическим произведением V_3 на временную ось $T (M = T \times V_3)$. Электромагнитное поле, в отличие от общепринятого в общей теории относительности локального исследования, в данном случае рассматривается сразу на всем многообразии в целом, что позволяет, кроме всего прочего, учесть роль топологических свойств пространства. Достигается это использованием операторов, определение и свойства которых не зависят от выбора системы координат. Средством, позволяющим связать различные формулировки и понять все характерные свойства квантовой теории электромагнитного поля, служит оператор поляризации, который вводится в пункте 3.

1. Основные положения *

Всякая внешняя дифференциальная форма степени p, выраженная посредством локальных координат, может быть записана в виде:

$$a = \frac{1}{p!} a_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} .$$

Коэффициенты формы $a_{i_1 \dots i_p}$ - компоненты антисимметрического ковариантного тензора ранга p (p -ковектора).

---

* Подробности можно найти в книгах /4,5,6/.

Формы четного и нечетного родов различаются законом преобразования p-ковекторов при переходе от одной системы локальных координат $x^1, \dots, x^n$ к другой системе локальных координат $\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n$,

$$\bar{a}_{j_1 \dots j_p} = a_{i_1 \dots i_p} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial \bar{x}^{j_p}}$$

для четных p-ковекторов,

$$\bar{a}_{j_1 \dots j_p} = \frac{J}{|J|} a_{i_1 \dots i_p} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial \bar{x}^{j_p}}$$

- для нечетных p-ковекторов. В последней формуле $J = \dfrac{D(x^1 \dots x^n)}{D(\bar{x}^1 \dots \bar{x}^n)}$ есть якобиан координат одной системы по координатам другой.

Дифференциал формы a степени p представляет собой форму da степени $p+1$. Имеет место следующее правило:

$$d^2 a = 0. \qquad /1/$$

В римановых пространствах с метрическим тензором g_{ij} существует нечетная форма степени n /элемент объема/

$$e_{1 \dots n}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = dV,$$

где $e_{1 \dots n} = \sqrt{|g_{ij}|}$ - первая компонента нечетного n-ковектора, другими компонентами которого являются $e_{i_1 \dots i_p} = \delta^{1 \dots n}_{i_1 \dots i_p} e_{1 \dots n}$.

Формой, дуальной форме $a = \frac{1}{p!} a_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots dx^{i_p}$, называется

$$* a = \frac{1}{(n-p)!} (*a)_{j_1 \dots j_{n-p}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{n-p}},$$

где

$$(*a)_{j_1 \dots j_{n-p}} = \frac{1}{p!} e_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_{n-p}} a^{i_1 \dots i_p}.$$

Для произвольной формы a степени p

$$** a = (-1)^{np+p} a. \qquad /2/$$

Если a, b - однородные формы одинаковой степени и четности, то

$$a \wedge * b = b \wedge * a = \frac{1}{p!} a^{i_1 \dots i_p} b_{i_1 \dots i_p} dV.$$

Скалярным произведением форм называется число $(a,b) = \int a \wedge * b$, если интеграл сходится. Свойства скалярного произведения

$$(a,b) = (b,a) \qquad /3/$$

$$(*a, *b) = (a,b) \qquad /4/$$

$$(a,a) \geq 0. \qquad /5/$$

Строгое равенство $(a,a) = 0$ выполняется только при $a = 0$.

Линейный оператор Λ' называется сопряженным оператору Λ относительно скалярного произведения, если он удовлетворяет тождеству

$$(\Lambda a, b) = (a, \Lambda' b).$$

Оператор δ, сопряженный оператору d, существует и выражается следующим образом:

$$\delta a = (-1)^{np+n+1} * d * a, \qquad /6/$$

если a - форма степени p. Оператор δ понижает степень формы на единицу, а квадрат его равен нулю:

$$\delta^2 a = 0. \qquad /7/$$

Топологический оператор де Рама

$$\Delta = \delta d + d \delta \qquad /8/$$

самосопряженный $(\Delta a, b) = (a, \Delta b)$ и положительный $(\Delta a, a) \geq 0$.

2. *Электромагнитное поле в гравитационном ящике*

Пусть x^1, x^2, x^3 - локальная система координат в V_3 и $g_{ij}(x^1, x^2, x^3)$ - метрический тензор на V_3. Тогда на $M=T\times V_3$

$$ds^2=-(dt)^2+g_{ij}\,dx^i dx^j .$$

Бивектор $f_{\alpha\beta}(\alpha,\beta=0,1,2,3)$ определяет на V_3 1-форму /вектор/ $e=f_{io}\,dx^i$ и 2-форму $f=\frac{1}{2}f_{ij}\,dx^i\wedge dx^j$. Воспользовавшись выражениями операторов d, δ через ковариантные производные [5], нетрудно убедиться, что уравнениям Максвелла

$$\nabla^\alpha f_{\alpha\beta}=0,\ \nabla_\alpha f_{\beta\sigma}+\nabla_\beta f_{\sigma\alpha}+\nabla_\sigma f_{\alpha\beta}=0$$

в рассматриваемой локальной системе координат отвечают уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t}+de=0 \qquad /9/$$

$$df=0 \qquad /10/$$

$$\frac{\partial e}{\partial t}-\delta f=0 \qquad /11/$$

$$\delta e=0, \qquad /12/$$

определенные уже на всем многообразии M. Заметим, что операторы d, δ, $*$ коммутируют с оператором $\partial/\partial t$.

По теореме разложения [5,6] форма f может быть единственным образом представлена в виде суммы трех форм: а/ гомологичной нулю, б/ когомологичной нулю и в/ гармонической:

$$f=f_1+f_2+f_3, \qquad /13/$$

где $f_1=da$, $f_2=\delta b$, $f_3=Hf$ - гармоническая форма.

Покажем, что, согласно /10/, в разложении /13/ f_2 равняется нулю. Действительно, $(f_2, f)=(\delta b, f)=(b, df)=0$. С другой стороны, $(f_2, f)=(f_2, f_2)$. В дальнейшем будем предполагать, что число Бетти $b_2(V_3)$ [6] равно нулю. Такое топологическое ограничение обеспечивает существование вектор-потенциала, так как оно означает, что $Hf=0$ и, следовательно,

$$f=da. \qquad /14/$$

Примером многообразия с таким числом Бетти может служить топологическая трехмерная сфера S^3 [7]. Равенство $b_2(V_3)=b_1(V_3)$ и теорема разложения, после подстановки /14/ в /9/, обеспечивают представление

$$e=d\phi-\frac{\partial a}{\partial t}. \qquad /15/$$

Из второй пары уравнений Максвелла /11/, /12/ следуют уравнения для потенциалов a, ϕ:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}+\delta da-\frac{\partial}{\partial t}d\phi=0 \qquad /16/$$

$$\delta\left(d\phi-\frac{\partial a}{\partial t}\right)=0. \qquad /17/$$

Снова применяя теорему разложения, теперь уже к вектору a, и обозначая через a_0 вектор, гомологичный нулю, и через a_1 - вектор, когомологичный нулю, будем иметь:

$$a=a_0+a_1 \qquad /18/$$

$$(a_0, a_1)=(a_1, a_0)=0 \qquad /19/$$

$$\delta a_1=0 \qquad /20/$$

$$da_0=0. \qquad /21/$$

и, как следствие /16/-/21/,

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial t^2} + \delta d a_1 + \frac{\partial^2 a_0}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} d\phi = 0 \qquad /22/$$

$$\delta\left(d\phi - \frac{\partial a_0}{\partial t}\right) = 0. \qquad /23/$$

Вектор $c = d\phi - \frac{\partial a_0}{\partial t}$ есть гармонический вектор, поскольку $dc = 0$, $\delta c = 0$ и так как, по предположению, размерность пространства гармонических векторов $b_1(V_3) = 0$, то $c = 0$ или /что то же/:

$$d\phi = \frac{\partial a_0}{\partial t}. \qquad /24/$$

Подставляя /24/ в /22/, имеем:

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial t^2} + \delta d a_1 = 0. \qquad /25/$$

3. Оператор поляризации

Опыт показывает, что каждый фотон находится в некотором состоянии поляризации. Чтобы придать этому понятию точный математический смысл, введем оператор

$$\hat{P} = * d \qquad /26/$$

и рассмотрим его свойства. Оператор $\hat{P}$, который мы будем называть оператором поляризации, каждый вектор a переводит в вектор $\hat{P}a$ противоположной четности. Легко устанавливается самосопряженность оператора $\hat{P}$ относительно скалярного произведения в пространстве векторов

$$(\hat{P}a, b) = (* da, b) = (da, * b) = (a, \delta * b) = (a, \hat{P}b).$$

Так как $d^2 a = 0$, то

$$\delta \hat{P} a = 0. \qquad /27/$$

Из определения операторов $\hat{P}$ и δ следует равенство

$$\hat{P}^2 a = \delta d a. \qquad /28/$$

Задача на собственные значения оператора поляризации приводит к уравнениям

$$\hat{P} a_p = p a_p \quad . \qquad /29/$$

Поскольку оператор $\hat{P}$ нечетный, его собственные значения являются скалярами нечетного рода /псевдоскалярами/. Это означает, что если p - собственное значение, то $-p$ - также будет собственным значением. Естественно поэтому определить состояния с собственными значениями $|p|$ как правополяризованные, а с собственными значениями $-|p|$ - как левополяризованные. Ясно, что вектор a_1 можно представить как суперпозицию таких состояний

$$a_1 = \sum_p \alpha_p a_p , \quad \alpha_p = (a_p, a_1) \qquad /30/$$

и более того, согласно /25/ и /28/, собственные значения $\hat{P}$ определяют энергию стационарных состояний фотона. Ввиду компактности V_3 множество собственных векторов a_p счетно. Оператор $\hat{P}$ очевидно аннулируется на векторах a_0, $\hat{P} a_0 = 0$, так что собственные векторы a_p не образуют базиса всего гильбертова пространства H векторов a. В связи с этим обратимся к оператору Лапласа, который фактически является ничем иным, как оператором де Рама /8/ в пространстве скаляров. Собственные функции оператора Лапласа в гильбертовом пространстве скаляров ϕ образуют ортонормированный базис ϕ_λ :

$$\Delta \phi_\lambda = \lambda^2 \phi_\lambda, \quad (\phi_\lambda, \phi_{\lambda'}) = \delta_{\lambda\lambda'}, \qquad /31/$$

$$\phi = \sum_\lambda \chi_\lambda \phi_\lambda, \quad \chi_\lambda = (\phi_\lambda, \phi).$$

Векторы $b_\lambda = \frac{1}{\lambda} d\phi_\lambda$ определяют искомый ортонормированный базис для векторов a_0 и вместе с векторами a_p образуют базис всего гильбертова пространства H. Действительно,

$$\hat{P} b_\lambda = 0, \quad (b_\lambda, b_{\lambda'}) = \frac{1}{\lambda\lambda'}(d\phi_\lambda, d\phi_{\lambda'}) = \frac{1}{\lambda\lambda'}(\phi_\lambda, \Delta\phi_{\lambda'}) =$$

$$= \frac{\lambda'}{\lambda}(\phi_\lambda, \phi_{\lambda'}) = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (a_p, b_\lambda) = 0.$$

Подставляя полученное разложение

$$a = \sum_p a_p(t) a_p + \sum_\lambda \beta_\lambda(t) b_\lambda \qquad /32/$$

и разложение /31/ в /24/ и /25/, находим, что

$$a_p(t) = c_p e^{ipt} + c_p^+ e^{-ipt}, \qquad /33/$$

а временная зависимость коэффициентов $\chi_\lambda(t)$, $\beta_\lambda(t)$ остается неопределенной с точностью до уравнения

$$\lambda\chi_\lambda(t) - \frac{\partial\beta_\lambda(t)}{\partial t} = 0. \qquad /34/$$

Накладывая условие Лоренца

$$\delta a_0 + \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0, \qquad /35/$$

которое дает еще одно уравнение для $\chi_\lambda(t)$, $\beta_\lambda(t)$

$$\lambda\beta_\lambda(t) + \frac{\partial\chi_\lambda(t)}{\partial t} = 0, \qquad /36/$$

определяем явную зависимость $\chi_\lambda(t), \beta_\lambda(t)$ от времени:

$$\chi_\lambda(t) = p_\lambda e^{i\lambda t} + p_\lambda^+ e^{-i\lambda t} \qquad /37/$$

$$\beta_\lambda(t) = q_\lambda e^{i\lambda t} + q_\lambda^+ e^{-i\lambda t} \qquad /38/$$

$$p_\lambda + iq_\lambda = 0, \quad p_\lambda^+ - iq_\lambda^+ = 0. \qquad /39/$$

4. Квантование электромагнитного поля

Глубокий подход к проблеме квантования полей сформулирован в работах /8,9/. Применяя полученные в них результаты к задаче квантования электромагнитного поля, мы прежде всего должны ввести скалярное произведение в пространстве решений уравнений Максвелла. Если e, $f = da$; e', $f' = da'$ - два решения уравнений Максвелла, то антисимметричное скалярное произведение определим, полагая

$$\langle a \,|\, a' \rangle = (a, e') - (a', e). \qquad /40/$$

Дифференцируя (a, e') по времени, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}(a, e') = \left(\frac{\partial a}{\partial t}, e'\right) + \left(a, \frac{\partial e'}{\partial t}\right) =$$

$$= (d\phi - e, e') + (a, \delta f') = -(e, e') + (f, f').$$

Приведенная выкладка показывает, что скалярное произведение не зависит от времени. Не зависит оно и от градиентного преобразования $a \to a + d\phi$.

Электромагнитное поле квантуется согласно статистике Бозе. Это означает, что поля $\hat{e}$, $\hat{f}$ на полной гиперповерхности $t = \text{const}$ рассматриваются как генераторы алгебры, являющейся обобщением на системы с бесконечным числом степеней свободы, алгебры квантовой механики. Общий элемент линейной оболочки генераторов имеет вид

$$\hat{f} = (a, \hat{e}) - (\hat{a}, e) \qquad /41/$$

Поскольку a, e; $\hat{a}$, $\hat{e}$ удовлетворяют уравнениям Максвелла, $(a,\hat{e})-(\hat{a},e)$ не зависит от времени. Поле a, e остается неквантованным. Формулой

$$\hat{f}\hat{f}' - \hat{f}'\hat{f} = i h \langle a \mid a' \rangle \qquad /42/$$

вводим антисимметричное скалярное произведение в оболочке генераторов /41/, что и означает квантование по статистике Бозе.

Нетрудно доказать, используя /15/, /18/, /19/, /2O/, /21/, что

$$\langle a \mid a' \rangle = (a_1', \frac{\partial a_1}{\partial t}) - (a_1, \frac{\partial a_1'}{\partial t}). \qquad /43/$$

Отсюда следует важный вывод: поля a_0, ϕ не квантуются, независимо от того, имеем мы условие Лоренца или нет; квантование электромагнитного поля с условием Лоренца в операторной форме невозможно.

Чтобы проквантовать поля a_0, ϕ, будем исходить из уравнений /25/ и уравнений

$$\frac{\partial^2 a_0}{\partial t^2} + \Delta a_0 = 0 \qquad /44/$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \Delta \phi = 0, \qquad /45/$$

которым отвечает независимое от времени антисимметричное скалярное произведение

$$\langle a, \phi \mid a', \phi' \rangle = (a, \frac{\partial a'}{\partial t}) - (a', \frac{\partial a}{\partial t}) + (\phi', \frac{\partial \phi}{\partial t}) - (\phi, \frac{\partial \phi'}{\partial t}). \qquad /46/$$

Квантование полей a, ϕ в таком подходе приводит к формулировке Ферми, в которой условие Лоренца трактуется как ограничение на векторы состояния

$$(\hat{p}_\lambda + i\hat{q}_\lambda)\Psi = 0. \qquad /47/$$

Найдем вторично-квантованные операторы энергии $\hat{\epsilon}$. Полагая в /4O/ $a' = \frac{\partial a}{\partial t}$, $e' = \frac{\partial e}{\partial t}$, получим

$$\langle a \mid \frac{\partial a}{\partial t} \rangle = (a, \frac{\partial e}{\partial t}) - (\frac{\partial a}{\partial t}, e) =$$

$$=(a, \delta f) - (d\phi - e, e) = (f, f) + (e, e) > 0.$$

Таким образом,

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{2}\langle \hat{a} \mid \frac{\partial \hat{a}}{\partial t} \rangle = \sum_p p^2 (\hat{c}_p \hat{c}_p^+ + \hat{c}_p^+ \hat{c}_p). \qquad /48/$$

В формулировке Ферми полагаем

$$a_1' = \frac{\partial a_1}{\partial t}, \quad a_0' = \frac{\partial a_0}{\partial t}, \quad \phi' = \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

и получаем

$$\hat{\epsilon}_\Phi = \sum_p p^2 (\hat{c}_p \hat{c}_p^+ + \hat{c}_p^+ \hat{c}_p) + \sum_\lambda \lambda^2 (\hat{q}_\lambda \hat{q}_\lambda^+ + \hat{q}_\lambda^+ \hat{q}_\lambda) -$$

$$- \sum_\lambda \lambda^2 (\hat{p}_\lambda \hat{p}_\lambda^+ + \hat{p}_\lambda^+ \hat{p}_\lambda). \qquad /49/$$

Ограничение /47/ на векторы состояния обеспечивает положительность среднего значения $\hat{\epsilon}_\Phi$. Операторы энергии /48/, /49/, поставляемые группой трансляций по времени, выделяют единственное вакуумное состояние.

В заключение заметим, что в случае, когда V_3 есть E_3 и, стало быть, M есть мир Пуанкаре-Минковского, оператор поляризации дает квантовомеханическое обоснование разложения 4-вектор-потенциала на поперечную, продольную и временную части. Его собственные значения в импульсном пространстве будут равны $|p| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$, и, если $\vec{e}^{\,+}(\vec{p})$, $\vec{e}^{\,-}(\vec{p})$ таковы, что

$\hat{P}\vec{e}^{\,+} = |p|\vec{e}^{\,+}$, $\hat{P}\vec{e}^{\,-} = -|p|\vec{e}^{\,-}$, то для $\vec{e} = \frac{1}{2}(\vec{e}^{\,+}+\vec{e}^{\,-})$, $\vec{e}_2 = -\frac{i}{2}(\vec{e}^{\,+}-\vec{e}^{\,-})$ имеют место равенства $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$, $\vec{p}\cdot\vec{e}_1 = \vec{p}\cdot\vec{e}_2 = 0$, $\sum_{\lambda=1}^{2} e_{i\lambda}\, e_{k\lambda} = \delta_{ik} - \frac{p_i\, p_k}{(\vec{p}\cdot\vec{p})}$, где $e_{i\lambda}$ - компоненты векторов $\vec{e}_\lambda$ $(\lambda = 1,2)$.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору Н.А.Черникову за постановку задачи, постоянное внимание к работе и ценные советы.

Литература

1. N.A.Chernikov, E.A.Tagirov. Ann.Inst.Henri Poincare, vol.IX, N2, Sect.A, Paris, 1968;
   Препринт ОИЯИ, Р2-3777, Дубна, 1968.
2. *Н.А.Черников, Н.С.Шавохина. ТМФ, 15, 91, 1973; Препринт ОИЯИ, Р2-6173, Дубна, 1971.*
3. *А.Б.Пестов, Н.А.Черников, Н.С.Шавохина. Препринт ОИЯИ, Р2-7829, Дубна, 1974.*
4. *Э.Картан. Интегральные инварианты, Гостехиздат, М.-Л., 1940.*
5. *Ж. де Рам. Дифференцируемые многообразия. М., ИИЛ, 1957.*
6. *А.Лихнерович. Теория связностей в целом и группы голономии. М., ИИЛ, 1960.*
7. *Г.Зейферт, В.Трельфалль. Топология, М.-Л., ГОНТИ, 1938,*
8. *Н.А.Черников, Н.С.Шавохина. Препринт ОИЯИ, Р2-6109, Дубна, 1971.*
9. *Н.А.Черников. Материалы III совещания по нелокальной теории поля, ОИЯИ, 2-7161, Дубна, 1973.*

Рукопись поступила в издательский отдел
4 июля 1974 года.