СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P2 - 8022

М.И.Широков

КВАНТОВОЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ О СКОРОСТИ СИГНАЛА

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 8022

М.И.Широков

КВАНТОВОЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ О СКОРОСТИ СИГНАЛА

S U M M A R Y

Local commutativity of the electromagnetic fields is considered usually as the causality condition. But does it really provide that signals propagate from source to detector with velocity not exceeding c? It is shown that the signal velocity does not exceed c indeed if one takes such sources as external current or electron which is excited by external force and if one detects such local quantities as field intensity in a a point or the coordinate of the electron of the atom-detector. This result is obtained in the frames of solvable and rather real models of the quantum electrodynamics. But we obtain a noncausal result if the electron momentum or energy is detected (while source is the same). And what is more, there exists such a sort of source which forces premature changes even in coordinate distribution of the detector electron.

So the relativistic causality in the considered cases depends on properties of the concrete detectors and sources. The local commutativity alone does not exclude the possibility of superluminar velocity.

§ I. Введение

I. В квантовой электродинамике выполняется известное условие локальной коммутативности. Например, все компоненты напряженности электрического поля коммутируют всюду, кроме бесконечно малой окрестности светового конуса. Обычно отсюда делается такое заключение: "Поэтому если две пространственно-временные точки не могут быть связаны световым сигналом, то напряженности поля в этих точках коммутируют друг с другом и допускают одновременное точное измерение. Это показывает, что квантованное электромагнитное поле распространяется с классической скоростью света c " (См. конец § 48 в книге Шиффа [1]). Конкретные расчеты (см § 2) подтверждают, что это действительно верно, но именно для полевых величин. Однако физический смысл имеют не только операторы полей, но и положительно- и отрицательно-частотные части их (что связано с корпускулярным аспектом теории). Для этих частей коммутационные соотношения уже не исчезают вне светового конуса, как и известная функция распространения фотона $\mathcal{D}_c$. Поэтому имеет смысл посмотреть, действительно ли теория является причинной в следующем смысле: конечна ли скорость распространения сигнала от источника к детектору- (-релятивистская причинность [2]). Обсуждение других формулировок принципа причинности и ссылки на литературу содержатся, например, в статье Ли и Вика [3].

2. История задачи о скорости сигнала в квантовой электродинамике насчитывает почти столько же лет, сколько и сама эта теория. Под руководством Гейзенберга С.Кикучи в 1930 г. [4] решил следующую задачу. *Источником сигнала служит атом. В момент $t = 0$ задано следующее начальное состояние: атом возбужден и фотонов нет.* Вычисляется плотность энергии электромагнитного поля, испущенного атомом, в момент $t > 0$ на расстоянии R от атома. В работе Ферми [5] вместо этого вычислялась вероятность возбуждения в момент $t > 0$

второго атома, находящегося на расстоянии R от первого. В обеих работах был получен причинный результат – точное равенство нулю (плотности энергии или вероятности возбуждения) до момента $t = R/c$. При этом, кроме обычного ограничения первым неисчезающим порядком теории возмущений, использовалось предположение, существенно упрощающее вычисления. Его можно изложить так: интегрирование по модулю импульса обменного фотона можно производить не от 0 до ∞, а от $-\infty$ до $+\infty$. Позже в работе[6] было показано, что полученный ранее результат[4,5] является в основном следствием этого предположения: точный расчет в рамках первого неисчезающего приближения не дает нуля до момента $t = R/c$.

Следует подчеркнуть, что в задачах, рассмотренных Кикучи и Ферми, истинно причинный результат и не должен был бы выглядеть (при точном расчете) как точное равенство нулю. Дело в том, что есть неисчезающая вероятность обнаружить электрон атома далеко от центра связывающего его потенциала, – например, вблизи второго электрона. Поэтому второй электрон без нарушения релятивистской причинности может возбудиться сразу же после момента $t=0$. Однако соответствующая вероятность крайне мала, если R много больше размеров атома ℓ, и она убывает с ростом R по экспоненциальному закону $exp(-R/\ell)$ (см. далее раздел 6 в § 3).

Непричинный эффект, полученный в[6], убывает с ростом R как некоторая обратная степень отношения R/λ, где λ – длина волны излучения, испускаемого и поглощаемого атомами, $\lambda \gg \ell$. Ввиду такой величины эффекта можно пренебречь неидеальностью локализации электрона атома-источника и атома-детектора. Это удобно сделать с помощью так называемого дипольного приближения, которое сводится к тому, что электрон атома испускает фотон не в той точке, где он находится, а в центре связывающего его потенциала. Оно применялось в[4, 5], как и во всех последующих расчетах аналогичных задач. Дипольное приближение отбрасывает описанный выше тривиальный вклад от неидеальной локализации источника и детектора.

Подчеркнем, что в задаче Ферми нетрудно освободиться от дипольного приближения и доказать, что полученный в [6] результат практически не изменится. Можно также показать, что он не зависит и от того, описывается ли электрон уравнением Дирака или в нерелятивистском приближении и каким именно потенциалом связан электрон [6]. Мы отмечаем это потому, что дипольное и нерелятивистское приближения и конкретный потенциал положены в основу тех моделей квантовой электродинамики, в рамках которых получены точные результаты для задач, поставленных в §§ 3, 4, 5.

Задача Ферми была еще раз рассмотрена в 1948 г. в рамках теории затухания (см. работы 20 и 22, цитированные Гайтлером [7] в конце § 20). Полученный в них строго причинный результат опять является следствием той же замены $\int_0^{\infty}$ на $\int_{-\infty}^{+\infty}$ и дипольного приближения (хотя действительно было показано, что в теории затухания положение дел с причинностью не хуже, чем в обычной теории возмущений).

После создания ковариантной теории возмущений обсуждение релятивистской причинности было продолжено в несколько другом аспекте. Обсуждались трудности, связанные с неравенством нулю функции распространения фотона $\mathcal{D}_c$ вне светового конуса. Было показано, что при некоторых условиях, например, в S-матрице, действительно можно заменить $\mathcal{D}_c$ на "хорошую" функцию $\mathcal{D}_{ret}$ (см. [8,9] x)). В § 5

x) Кроме [8,9], см. также литературу, цитированную в § 5 в [6], и работу Вандерса [10]. Вандерс считал, что локальная коммутативность обеспечивает причинность теории, ссылаясь на работу [11], где было показано, что любая амплитуда перехода может быть выражена в терминах вакуумных ожиданий инвариантных запаздывающих произведений полевых операторов. Однако это было показано на самом деле только для S-матричных элементов, как и в [9].

... /, ... , что эти условия и условия задачи о ... сигнала ... может ...

В 1964 г. в[6] было ... и несколькими способами рассчитана задача Ферми без замены $\int_0^\infty$ на $\int_{-\infty}^{+\infty}$. Был получен непричинный результат. Несколько иная задача (но в принципе та же) была рассчитана в[12] и был получен тот же непричинный результат.

В 1968 г. Ферретти[13] обратил внимание на недостаток постановки задачи Ферми, связанный с описанием возбужденных атомов "голыми" состояниями, т.е. собственными векторами свободной части H_0 полного гамильтониана. Этот вопрос подробно обсуждается далее в ... К сожалению, предложенный им новый способ расчета Ферретти осуществил для задачи, которая не может считаться задачей о скорости сигнала. С целью сведения к одномерному случаю он взял в качестве "атомов" два бесконечных плоских слоя. Установление факта возбуждения такого "атома" требует бесконечного времени. В задаче о скорости сигнала источник и детектор должны быть локализованы в конечных объемах, размеры которых много меньше расстояния R между ними. В работах[14, 15] была сделана попытка устранить тот же недостаток посредством другого способа описания возбужденных состояний атомов, учитывающего наличие взаимодействия. Вместо "голых" операторов рождения-уничтожения фотонов и квантов возбуждения атомов были введены "физические" операторы (бесчастичный вектор которых совпадает с физическим вакуумом). Результат, в отличие от[13], оказался непричинным. Однако, в основном, он может быть объяснен тем обстоятельством, что в терминах "физических" операторов взаимодействие оказывается нелокальным, - см. раздел 4 в[16]. Возможно введение других "физических" операторов, для которых степень нелокальности взаимодействия будет меньше, и тогда соответственно величина непричинного эффекта уменьшится. Той же причиной объясняется и результат[17], где вместо задания возбужденного состояния атома в момент $t = 0$ рассматривался конкретный процесс возбуждения атома при помощи изменения связывающего его потенциала.

3. На основании этой исторической справки можно заключить, что, несмотря на всеобщую убежденность в релятивистской причинности квантовой электродинамики, до сих пор никто еще не представил расчета конкретной задачи о скорости сигнала, подтверждающего такую причинность безупречным образом, хотя бы в рамках сделанных теоретических предположений. Мы полагаем, что первыми такими результатами являются расчеты задач, поставленных в §§ 2, 3, 4 настоящей работы.

Однако наряду с ними существуют и такие постановки задачи, для которых получается непричинный ответ (наши результаты суммированы в Заключении).

4. Введение мы закончим обсуждением нескольких технических вопросов теории представленных задач о скорости сигнала.

Все они относятся к классу нестационарных задач. Известны заявления о несуществовании оператора эволюции $U(t,0)$ для таких задач, основанные главным образом на теореме Хаага/18/. Однако в задаче о сигнале источник и детектор должны быть хорошо локализованы. В качестве источника мы берем, например, внешний ток, в качестве детектора (а также иногда и источника)-электрон во внешнем потенциале. Это разрушает трансляционную инвариантность теории, которая является одной из предпосылок теоремы Хаага.

Трудности с расходимостями мы обходим введением формфактора (конечно, это должно быть учтено при интерпретации результата).

Решение задач проводится в гейзенберговской картине. При этом мы не вычисляем волновых функций или амплитуд переходов, но сразу - квадраты их модулей или вероятностные распределения по значениям разных физических величин: напряженность поля, координата электрона атома-детектора и т.п.

Важным является учет "теоретического фона". (Это понятие подробно обсуждается далее).

§ 2. Скорость распространения электромагнитного поля, *генерируемого внешним током.*

В малой области V_A задано некоторое распределение плотностей внешнего тока и заряда $\vec{J}(x,t)$ и $J_0(x,t)$. Термин "внешний" означает, что J_μ не изменяется при излучении поля. Пусть $J_\mu = 0$ до момента $t=0$. В момент $t=0$ включается ток и одновременно начинает изменяться плотность заряда (это простейший вариант, более реальный – вибратор Герца – будет рассмотрен в § 3). Вычислению подлежит напряженность электрического поля $\vec{E}$ в области V_B, расположенной на расстоянии R от V_A. Предполагается, что если поле изменяет свое значение, то это регистрируется некоторым прибором, который в теоретическом описании не фигурирует (это может быть, например, классический пробный заряд).

Покажем, как решение этой простейшей квантовоэлектродинамической задачи о скорости сигнала можно свести к решению соответствующей задачи классической электродинамики.

Прежде всего подчеркнем существенное отличие от классики. Даже если ток не включается, электрическое и магнитное поля в V_B не могут одновременно точно равняться нулю в силу известных соотношений неопределенности. Далее, каждое из полей не может равняться нулю в течение конечного интервала времени (это можно рассматривать как следствие предыдущего факта и уравнений Максвелла). Поэтому мы должны решить еще одну задачу: как списать состояние поля до момента $t=0$. Наиболее естественно и просто считать, что до $t=0$ имелось состояние с наинизшей энергией поля - состояние вакуума Ω_0. Оно стабильно, поскольку является собственным состоянием гамильтониана H_0 свободного поля. Поскольку операторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ с ним не коммутируют, то они в этом состоянии не равны нулю. Естественно считать, что сигнал от включенного тока пришел в V_B в тот момент, когда $\vec{E}$ в V_B начало отличаться от своего вакуумного значения. Это вполне соответствует экспериментальной ситуации: сигналом считается отклонение от фона.

Начнем с рассмотрения изменения среднего значения $\vec{E}(r_B)$, $r_B \subset V_B$, по сравнению со средним вакуумным

$$\langle \mathcal{U}(t,0)\Omega_0, \vec{E}(r_B)\, \mathcal{U}(t,0)\Omega_0 \rangle - \langle \Omega_0, \vec{E}(r_B)\, \Omega_0 \rangle . \qquad (2.1)$$

Здесь $\mathcal{U}(t,0)$ есть оператор эволюции электромагнитного поля при наличии тока

$$i\, \partial \mathcal{U}/\partial t = H_t\, \mathcal{U}, \quad H_t = H_0 + \int d^3x\, J_\mu(x,t) A_\mu(x). \qquad (2.2)$$

Поскольку $\langle \mathcal{U}(t,0)\Omega_0, \vec{E}\, \mathcal{U}(t,0)\Omega_0 \rangle = \langle \Omega_0, \mathcal{U}^+ \vec{E}\, \mathcal{U}\, \Omega_0 \rangle$, то достаточно знать гейзенберговский оператор $\vec{E}(t) = \mathcal{U}^+ \vec{E}\, \mathcal{U}$, который в момент $t=0$ совпадает со шредингеровским. Возьмем $\vec{E}(t)$ в виде суммы оператора $\vec{E}_0(t)$ - решения свободных квантовых уравнений поля и частного c-числового решения уравнений с током (т.е. уравнений $\Box A_\mu = J_\mu$, где J_μ является c-числом), обращающегося в нуль при $t=0$. Легко видеть, что такое выражение будет удовлетворять уравнениям поля с током и коммутационным соотношениям

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_0(r,t) + \vec{F}_{кл}(r,t) . \qquad (2.3)$$

В качестве частного с-числового решения $\vec{E}_{кл}$ можно взять хорошо известное запаздывающее решение

$$\vec{E}_{кл}(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_0} d^3r' \; \vec{J}(\vec{r}', \; t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c)\Big/|\vec{r}-\vec{r}'| - \tag{2.4}$$
$$-\operatorname{grad}\int\limits_{V_0} d^3r' \; J_0(\vec{r}', \; t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c)\Big/|\vec{r}-\vec{r}'| \, .$$

Это выражение справедливо как в лоренцевской, так и в кулоновской калибровке (см./19/).

Среднее значение $\vec{E}_0(r_a,t)$ в вакуумном состоянии равно нулю ($\vec{E}_0$ линейно выражается через операторы рождения-уничтожения фотонов). Поэтому разность (2.1) равна $\vec{E}_{кл}(r_a,t)$. Таким образом, среднее $\langle \Omega_0 , \vec{E}(r_a,t)\,\Omega_0\rangle$ равно $\vec{E}_{кл}(r_a,t)$ и распространяется со скоростью c.

Рассмотрим далее среднее квадратичное отклонение $\vec{E}(r_a)$ от среднего $\vec{E}_{кл}(r_a,t)$

$$\langle \mathcal{U}(t,0)\Omega_0 , [\vec{E}(r_a)-\vec{E}_{кл}(r_a,t)]^2\, \mathcal{U}(t,0)\Omega_0\rangle = \tag{2.5}$$
$$= \langle\Omega_0 , [\vec{E}_0(r_a,t)+\vec{E}_{кл}(r_a,t)-\vec{E}_{кл}(r_a,t)]^2\,\Omega_0\rangle = \langle\Omega_0 , \vec{E}_0^2(r_a,t)\,\Omega_0\rangle .$$

Это означает, что центральный момент второго порядка распределения по напряженности электрического поля в точке r_a совпадает с простым моментом того распределения, которое это поле имеет в вакуумном состоянии. То же верно и для моментов высшего порядка. Таким образом, распределение по $\vec{E}(r_a)$ в случае включения тока получается просто сдвигом распределения в состоянии Ω_0 x). Сдвиг

---

x) К нашей теме имеет отношение только этот факт сдвига, но не вопрос о существовании высших моментов. Предполагается, что они определены так, что средние в (2.5), (2.6), (2.7) имеют смысл (например как средние от произведений операторов в близких точках).

отсутствует при $t< R/c$: поле начнет изменяться не раньше момента R/c . Это утверждение верно и для магнитного поля, и для плотности электромагнитной энергии $W(x)=[\vec{E}^2(x)+\vec{H}^2(x)]/8\pi$. Действительно, рассмотрим, например, распределение по $E^2(z_0)$. Для разности первых моментов в состояниях $\mathcal{U}(t,0)\Omega_0$ и Ω_0 получаем:

$$\langle\Omega_0,\ E^2(z_0,t)\,\Omega_0\rangle-\langle\Omega_0,\ E^2(z_0)\,\Omega_0\rangle= \tag{2.6}$$
$$=\langle\Omega_0,[E_0(z_0,t)+E_{\kappa\lambda}(z_0,t)]^2\Omega_0\rangle-\langle\Omega_0,E^2(z_0)\,\Omega_0\rangle=E^2_{\kappa\lambda}(z_0,t)\ .$$

Было использовано равенство $\langle\Omega_0,\ E_0\ \Omega_0\rangle=0$ и равенство

$$\langle\Omega_0,E_0^2(z_0,t)\,\Omega_0\rangle=\langle\Omega_0,\ E^2(z_0)\,\Omega_0\rangle\ ,$$

справедливое ввиду того, что $E_0(z,t)=exp(iH_0t)\,E(z)\,exp(-iH_0t)$ и $exp(-iH_0t)\,\Omega_0=\Omega_0$.

Далее имеем для разности вторых моментов

$$\langle\Omega_0,\ [E^2(z_0,t)]^2\ \Omega_0\rangle-\langle\Omega_0,\ [E^2(z_0)]^2\Omega_0\rangle= \tag{2.7}$$
$$=\langle\Omega_0,[\,4\ E_0^3E_{\kappa\lambda}+6\ E_0^2E^2_{\kappa\lambda}+4\,E_0\ E^3_{\kappa\lambda}+E^4_{\kappa\lambda}\,]\ \Omega_0\rangle\ .$$

Замечаем, что (2.7) равно нулю при $t< R/c$ ввиду того, что $E_{\kappa\lambda}(z_0,t)=0$ для таких t . Рассматривая аналогично высшие моменты, заключаем, что, хотя распределение по $E^2(z_0)$ или $W(z_0)$ уже не получается простым сдвигом вакуумного распределения, все отличия от последнего равны нулю при $t< R/c$.

Читатель может убедиться в том, что все изложенное остается справедливым и в том случае, если вместо Ω_0 взято некоторое другое состояние ψ , даже нестабильное. Но в этом случае (2.I) следует заменить на

$$\langle\,\mathcal{U}(t,0)\psi,\ \vec{E}(z_0)\ \mathcal{U}(t,0)\psi\rangle-\langle e^{-iH_0t}\psi,\ \vec{E}(z_0)\,e^{-iH_0t}\psi\rangle\ . \tag{2.8}$$

В случае нестабильного ψ "фон" тоже меняется со временем.

§ 3. Источник – внешний ток, детектор – осцилляторный электрон.

Мы продемонстрировали, что в своем полевом аспекте квантовая электродинамика является релятивистски причинной теорией. Однако квантовые детекторы могут реагировать и на положительно- или отрицательно-частотные части полей, т.е. на кванты соответствующего поля.

В этом параграфе мы рассмотрим следующий идеализированный детектор. Имеется электрон, локализованный внешним потенциалом в области около начала координат. Изменение его состояния под действием сигнала регистрируется некоторым прибором, который, в отличие от электрона, в теории не описывается.

Источником служит внешний ток, локализованный в некоторой области, расположенной на расстоянии R от начала координат и включаемый в момент $t=0$.

I. Система "источник-поле-электрон" будет описана точно решаемой моделью, довольно близкой к настоящей квантовой электродинамике. Электрон описывается в нерелятивистском приближении, и его спин не учитывается. С электромагнитным полем он взаимодействует только дипольно. В качестве внешнего потенциала, связывающего электрон, берется осцилляторный потенциал. Сходная модель подробно обсуждалась в /20, 2I, 16/. Гамильтониан нашей задачи отличается только присутствием дополнительного члена взаимодействия с плотностью внешнего тока $\vec{J}(x,t)$ и заряда $\rho(x,t)$.

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p}-e\vec{A})^2 + \frac{m\varkappa^2}{2}\vec{q}^{\,2} + \frac{1}{8\pi}\int d^3x\left[\vec{E}^2(x) + (\mathrm{rot}\,A(x))^2\right] + \int d^3x\,(\vec{J}(x,t)\vec{A}(x)) + e\int d^3x\,\rho(x,t)/|\vec{x}-\vec{q}| \qquad (3.I)$$

Мы выбрали кулоновскую калибровку для вектор-потенциала. В лоренцовской калибровке надо было бы учитывать дополнительное условие, что представляло бы дополнительную задачу (одним из способов учета является переход к кулоновской калибровке, см.,например/7/, приложение Ш).

Как показано в/16/, корректная формулировка дипольного приближения требует введения формфактора в член взаимодействия $-\frac{e}{m}(\vec{p}\vec{A}) + \frac{e^2}{2m}\vec{A}^2$. Поэтому под A в этом члене следует понимать значение в точке $x=0$ не самого вектор-потенциала $A(\vec{x})$ (что было бы обычной формулировкой дипольного приближения), а соответственно размазанной величины $\hat{A}(\vec{x}) = \int A(\vec{x}')\,F(|\vec{x}'-\vec{x}|)\,d^3x'$.

Разложим $A(\vec{x})$ по электрическим и магнитным мультиполям, (см. например/22/). Электрон взаимодействует только с дипольными электрическими фотонами, т.е. только с дипольной электрической частью $A(\vec{x})$, назовем ее $A_d(\vec{x})$:

$$\vec{A}_d(\vec{x}) = \int_0^\infty k^2 dk \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \sum_{M=0,\pm 1} \left[\vec{a}^{\,e}_{k1M}(\vec{x})\, a_M(k) + \vec{a}^{\,e*}_{k1M}(\vec{x})\, a^+_M(k)\right] \tag{3.2}$$

$$\left[a_M(k),\ a^+_{M'}(k')\right] = \delta_{MM'}\,\delta(k-k')/k^2 .$$

Ток $\vec{J}(\vec{x},t)$, однако,сосредоточен вдали от начала координат и испускает фотоны всех мультипольностей. Гамильтониан H может быть разбит на два оператора. Первый состоит из выражения (3.I), в котором всюду A заменено на A_d (и E на E_d). Обозначим его через H_d . Остаток $H-H_d$ не содержит электронных операторов, зависит только от операторов рождения-уничтожения фотонов высших мультипольностей и коммутирует с H_d . Состояние электрона поэтому определяется уравнением Шредингера $i\partial\psi/\partial t = H_d\psi$, где ψ зависит только от электронных и дипольных фотонных переменных. Поскольку ну ток считается сосредоточенным в малой области V_A около точки R, то

$$\int_{V_A} d^3x\ \vec{J}(x,t)\,\vec{A}_d(x) \cong \vec{A}_d(R)\int_{V_A} d^3x\ \vec{J}(x,t). \tag{3.3}$$

Фактически (3.3) есть запись дипольного приближения для взаимодействия $\mathbf{J}$ с A_d.

Пользуясь (3.2) и выражениями для $\vec{a}^{\,c}_{klm}$, полученными в § 12 в/22/, можно $\vec{A}_d(\vec{R})$ переписать в виде (считаем, что $\vec{R}$ лежит на оси z) :

$$\vec{A}_d(\vec{R}) = \int_0^\infty dk\sqrt{\frac{3k}{\pi}}\Big\{\Big[\frac{\sin kR}{kR}+\frac{\cos kR}{(kR)^2}-\frac{\sin kR}{(kR)^3}\Big](\vec{e}_x p_x(k)+\vec{e}_y p_y(k))+$$
$$+2\Big[-\frac{\cos kR}{(kR)^2}+\frac{\sin kR}{(kR)^3}\Big]\vec{e}_z\, p_z(k)\Big\}, \tag{3.4}$$

Здесь $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ единичные орты, направленные по осям координат, операторы $p_i(k)$, $i=x,y,z$ выражаются через операторы $a_M(k)$ и $a^+_M(k)$ из (3.2). Например, $p_z(k)=[a_0(k)+a_0^+(k)]\,k/\sqrt{2}$ (ср. формулу (5) в/21/). Между собой $p_i(k)$ коммутируют, их коммутационные соотношения с операторами $q_i(k)$, по которым разлагается $E_d(x)$, имеют вид $[q_i(k), p_j(k')] = \delta_{ij}\,\delta(k-k')$.

Мы приняли дипольное приближение для взаимодействия электрона и внешнего тока с полем. Запишем и кулоновское взаимодействие $e\int d^3x\,\rho(\vec{x},t)/|\vec{x}-\vec{q}|$ в аналогичном приближении. Пусть $\vec{x}=\vec{R}+\vec{z}$; поскольку $\rho(\vec{x},t)$ сосредоточено в малой области около точки $\vec{R}$, то $|\vec{z}|$ мал.

Значения координаты q электрона, бо́льшие размера осциллятора $\ell=1/\sqrt{m\varkappa}$, маловероятны. Поэтому считаем, что $|\vec{z}-\vec{q}|\ll R$ и тогда с точностью до членов, билинейных по z и q, имеем

$$\int d^3x\,\rho(\vec{x},t)/|\vec{x}-\vec{q}| = \int d^3z\,\rho(\vec{R}+\vec{z},t)/|\vec{R}+\vec{z}-\vec{q}| = \tag{3.5}$$
$$= \int \frac{d^3x\,\rho(\vec{R}+\vec{z},t)}{R}\left\{1+\frac{q_z+z_z}{R}+\frac{1}{2R^2}\left[3(q_z-z_z)^2-|\vec{q}-\vec{z}|^2\right]+\dots\right\}.$$

Многие члены этого разложения равны нулю, если полный заряд $\int\rho(x,t)d^3x$ равен нулю; среди других есть c -числа.

Будем представлять себе включаемый внешний ток в виде вибратора Герца[23]: два противоположно заряженных шарика в момент $t=0$ соединяются проводником. Тогда до момента $t=0$ имеется ненулевая плотность заряда $\rho(x,o)$. Ее действие на электрон в силу (3.5) сводится к небольшому постоянному смещению центра колебаний осцилляторного электрона. Например, член $q_x\int d^3x\; z_x\,\rho(x,o)/R^3$ из (3.5) вместе с $m\varkappa^2 q_x^2/2$ из (3.I) дает $\frac{m\varkappa^2}{2}\left(q_x+e\mathcal{D}_x/m\varkappa^2R^3\right)^2$, где $\mathcal{D}_x$ - дипольный момент распределения заряда. Считая, что этот эффект учтен (небольшим изменением величины R), мы можем далее рассматривать в качестве кулоновского взаимодействия оператор $e\int d^3x\,[\rho(\vec{x},t)-\rho(\vec{x},o)]/|\vec{x}-\vec{q}|$. В приближении (3.5) он дает вклад в H, пропорциональный $1/R^3$. Выпишем для примера только член этого вклада, пропорциональный q_x:

$$q_x\frac{e}{R^3}\int_{V_A} d^3z\;\; z_x\left[\rho(\vec{R}+\vec{z},t)-\rho(\vec{R}+\vec{z},o)\right]\equiv\frac{e}{R^3}q_x\,\Delta_x(t), \tag{3.6}$$

где Δ_x - дипольный момент распределения $[\rho(x,t)-\rho(x,o)]$.

Как видно из (3.3), (3.4) и из (3.5), два последних члена в (3.I) разлагаются на сумму трех коммутирующих операторов с индексами x, y, z. Так же можно представить и первую строчку членов в (3.I) (см. раздел I в [21]). Мы имеем $H_d=h_x+h_y+h_z$, $[h_i,h_j]=0$. Это означает, что x -овая компонента тока влияет только на распределение по электронной координате q_x (или по p_x). Ввиду этого достаточно рассмотреть случай $J_x \neq 0$, $J_y = J_z = 0$, когда эволюцией состояния электрона управляет только h_x. Введем новые электронные операторы $p_1 = p_x / \sqrt{m \varkappa^2}$, $q_1 = q_x \sqrt{m \varkappa^2}$. Опуская индекс x у фотонных операторов, запишем h_x в виде

$$
\begin{aligned}
h_x(t) = {} & \frac{q_1^2}{2} + \frac{\varkappa^2}{2} p_1^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty dk \left[q^2(k) + k^2 p^2(k) \right] + \\
& + \varkappa \int_0^\infty dk \sqrt{2k}\, \mathcal{E}(k)\, p_1 p(k) + \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty dk \sqrt{2k}\, \mathcal{E}(k)\, p(k) \right]^2 + \\
& + \frac{1}{R} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \int_0^\infty dk \left[\sin kR + \frac{\cos kR}{kR} - \frac{\sin kR}{(kR)^2} \right] p(k) \cdot \int_{V_A} d^3x \; J_x(\vec{x}, t) \\
& + e q_1 \Delta_x(t) / R^3 \sqrt{m \varkappa^2} .
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Здесь $\mathcal{E}(k) = - e g(k) \sqrt{2k / 3\pi m}$, где $g(k)$ – формфактор, соответствующий размазке $F(x)$ $F(|\vec{x}|) = \int d^3k \, \exp(i \vec{k} \vec{x})\, g(k)$.

Между $\Delta_x(t)$ и $\int d^3x \; J_x(\vec{x}, t)$ имеет место такая связь (вывод см. в /23/):

$$
\partial \Delta_x(t) / \partial t = \int d^3x \; J_x(\vec{x}, t). \tag{3.8}
$$

Часть h_x, не содержащая членов с J и Δ (эти члены равны нулю до момент $t = 0$) в работе /16/ была приведена к виду "суммы квадратов"

$$
h_x(t=0) = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega \left(\hat{q}_\omega^2 + \omega^2 \hat{p}_\omega^2 \right) = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega \; \omega \left(b_\omega^+ b_\omega + b_\omega b_\omega^+ \right) \tag{3.9}
$$

с помощью ортогональных преобразований X и U (см. прилож. А в /16/):

$$
p_1 = \int_0^\infty d\omega \; U_{1\omega} \hat{p}_\omega \; ; \qquad q_1 = \int_0^\infty d\omega \; U_{1\omega} \hat{q}_\omega \; ;
$$

$$
p(k) = \int_0^\infty d\nu \; X_{k\nu} \int_0^\infty d\omega \; U_{\nu\omega} \hat{p}_\omega \; ; \qquad q(k) = \int_0^\infty d\omega \, (XU)_{k\omega} \hat{q}_\omega
$$

Вставим в последние два члена в (3.7) выражения $p(k)$ и q_1 через $b_\omega = (\sqrt{\omega}\,\hat{p}_\omega - i\hat{q}_\omega/\sqrt{\omega})/\sqrt{2}$ и $b_\omega^+ = (\sqrt{\omega}\,\hat{p}_\omega + i\hat{q}_\omega/\sqrt{\omega})/\sqrt{2}$:

$$q_1 = i\int_0^\infty d\omega\, U_{1\omega}\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(b_\omega - b_\omega^+\right) \;; \quad p(k) = \int_0^\infty d\omega\,(XU)_{k\omega}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(b_\omega + b_\omega^+\right) \qquad (3.10)$$

и найдём уравнения движения для гейзенберговских операторов $b_\omega(t)$:

$$\frac{\partial b_\omega(t)}{\partial t} = i\left[h_x^{\text{гейз}}(t),\, b_\omega(t)\right] = -i\omega b_\omega(t) - ij(\omega,t) + \rho(\omega,t). \qquad (3.11)$$

(Заметим, что $h_x^{\text{гейз}}(t)$ через $b_\omega(t)$, $b_\omega^+(t)$ выражается так же, как шредингеровский оператор $h_x(t)$ через b_ω, b_ω^+).

В (3.11) использованы обозначения

$$j(\omega,t) = \frac{\partial\Delta_x(t)}{\partial t}\,\frac{1}{R}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\int_0^\infty dk\left[\sin kR + \frac{\cos kR}{kR} - \frac{\sin kR}{(kR)^2}\right](XU)_{k\omega} \qquad (3.12)$$

$$\rho(\omega,t) = \Delta_x(t)\,\frac{e}{R^3\mu}\sqrt{\frac{\omega}{2m}}\,U_{1\omega}. \qquad (3.13)$$

Как видно, уравнение для оператора b с номером ω не содержит операторов b с другими ω'. Именно поэтому выгодно выражать $h_x(t)$ через операторы b_ω, b_ω^+.

Решение (3.11), превращающееся при $t=0$ в шредингеровские операторы b_ω, имеет вид

$$b_\omega(t) = e^{-i\omega t}\left\{b_\omega + \int_0^t dt'\, e^{i\omega t'}\left[-ij(\omega,t') + \rho(\omega,t')\right]\right\}. \qquad (3.14)$$

3. Переходим к исследованию изменения состояния электрона, вызванного внешним током. Будем считать, что до момента $t=0$ система находилась в стабильном состоянии Ω, описываемом собственным вектором полного гамильтониана $h_x(t=0)$ с наинизшей

энергией (физический вакуум). В нашей точно решаемой модели такой вектор определяется уравнениями $b_\omega \Omega = 0$ для всех ω (см.(3.9)).

4. Сначала в качестве характеристики изменения состояния электрона рассмотрим изменение распределения по его координате. Начнем с вычисления среднего значения x-овой компоненты координаты в состоянии $\mathcal{U}(t,0)\Omega$, получающемся из состояния Ω к моменту $t > 0$ под действием внешнего тока. Под $\mathcal{U}(t,0)$ понимается оператор, удовлетворяющий уравнению $i\,\partial\mathcal{U}/\partial t = h_x(t)\,\mathcal{U}$. Рассмотрим разность

$$\langle \mathcal{U}(t,0)\Omega,\ q_1\ \mathcal{U}(t,0)\Omega\rangle - \langle \Omega,\ q\ \Omega\rangle = \langle \Omega,\ q_1(t)\Omega\rangle. \quad (3.15)$$

Поскольку q_1 линейно выражается через b_ω, b_ω^+ и $b_\omega \Omega = 0$, то $\langle \Omega,\ q_1\ \Omega\rangle = 0$. Выражение гейзенберговского оператора $q_1(t)$ через $b_\omega(t)$ и $b_\omega^+(t)$ получается, если обе части (3.10) положить слева на $\mathcal{U}^+(t,0)$, справа - на $\mathcal{U}(t,0)$. Используя (3.14), находим

$$q_1(t) = i\int_0^\infty d\omega\ U_{1\omega}\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left\{e^{-i\omega t}b_\omega - e^{i\omega t}b_\omega^+\right\} + Cq_1(t) \quad (3.16)$$

$$Cq_1(t) = i\int_0^\infty d\omega\ U_{1\omega}\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left\{e^{-i\omega t}\int_0^t dt' e^{i\omega t'}\left[\rho(\omega,t') - ij(\omega,t')\right] - c.c.\right\}. \quad (3.17)$$

Через $Cq_1(t)$ обозначена c-числовая часть оператора $q_1(t)$; именно ей равен метричный элемент $\langle \Omega,\ q_1(t)\Omega\rangle$, ввиду $b_\omega \Omega = 0$.

Подставим в (3.17) выражения (3.12) и (3.13). С помощью интегрирования по частям можно преобразовать член, содержащий $j(\omega,t') \sim \partial\Delta_x/\partial t$:

$$\int_0^t dt' e^{i\omega t'}\,\partial\Delta_x(t')/\partial t' = e^{i\omega t}\Delta_x(t) - i\omega\int_0^t dt'\,\Delta_x(t')e^{i\omega t'}$$

(Использовано, что $\Delta_x(t=0)=0$). Получаем

$$C q_1(t) = i\int_0^\infty d\omega \Big\{ e^{-i\omega t}\int_0^t dt' e^{i\omega t'} \Delta_x(t') \frac{e}{R^3\sqrt{m}\,\varkappa}\,\frac{\omega}{2}\,U^2_{1\omega} -$$

$$- \frac{i}{R}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\int_0^\infty dk \Big(\sin kR + \frac{\cos kR}{kR} - \frac{\sin kR}{(kR)^2}\Big)(X(l))_{k\omega}\,U_{1\omega}\Big[\Delta_x(t) - i\omega e^{-i\omega t}\int_0^t dt' \exp(i\omega t')\Delta_x(t')\Big] \qquad (3.17)$$

$$- c.c. \Big\}.$$

В приложении А показано, что $Cq_1(t)$ точно равна нулю при $t<(R-\ell)/c$, если в качестве размазывающей функции $\Gamma(|\vec{x}|)$ взята финитная функция, равная нулю при $|\vec{x}|>\ell$ (ее фурье-образ $g(k)$ равен $\sin k\ell/k\ell$). Подчеркнем, что без учета кулоновского члена $Cq_1\Delta_x(t)/R^3\sqrt{m}\,\varkappa$ мы бы получили, что $Cq_1(t)\sim 1/R^3$ при $t<(R-\ell)/c$.

Теперь рассмотрим среднее от квадрата разности $q_1 - Cq_1(t)$ в момент $t>0$

$$\Delta^{(2)}(t) = \big\langle \mathcal{U}(t,0)\Omega, [q_1 - Cq_1(t)]^2\, \mathcal{U}(t,0)\Omega \big\rangle = \qquad (3.18)$$

$$= \big\langle \Omega, [q_1(t) - Cq_1(t)]^2\, \Omega \big\rangle .$$

Разность $q_1(t) - Cq_1(t) \equiv Qq_1(t)$ равна операторной части $q_1(t)$ – см. (3.16). Она от тока не зависит и соответствует той эволюции состояния электрона, когда ток все время равен нулю. Ее можно назвать квазисвободной, поскольку в отличие от свободной она учитывает взаимодействие электрона с квантованным электромагнитным полем. Имеем

$$Qq_1(t) = e^{ih(t\cdot 0)t}\, q_1\, e^{-ih(t\cdot 0)t}, \quad e^{-ih(t\cdot 0)t}\,\Omega = \Omega$$

и поэтому

$$\Delta^{(2)}(t) = \big\langle \Omega, [Qq_1(t)]^2\, \Omega \big\rangle = \big\langle \Omega, q_1^2\, \Omega \big\rangle . \qquad (3.19)$$

Вместо квадрата в (3.18) и (3.19) можно поставить любое $n > 2$. Все центральные моменты совпадают с простыми моментами распределения по q_1 в состоянии Ω. Распределение по q_1 после включения тока получается простым сдвигом того распределения, которое имелось до включения тока. Сдвиг равен $Cq_1(t)$ и исчезает при $t < (R - b)/c$. Прибор, измеряющий координату электрона, почувствует включение тока только после момента $(R-b)/c$.

5. Рассмотрим распределение по импульсу электрона. Вычисление среднего типа (3.15) от гейзенберговского оператора $p_1(t) = p_x(t)/\sqrt{m\varkappa}$,

$$p_1(t) = \int_0^\infty d\omega \; U_{1\omega} \frac{i}{\sqrt{2\omega}} \left[b_\omega(t) + b_\omega^+(t) \right]$$

производится точно так же, как для $q_1(t)$. Для сдвига распределения по импульсам получаем (см. (А.13) в прилож. А).

$$C p_1(t) \sim \frac{1}{R\,(R\varkappa)^2} \int_0^t dt' \Delta_x(t') \quad , \qquad t < (R-b)/c . \qquad (3.20)$$

Это означает, что отношение величины $C p_1(t)$ при $t < R/c$ к величине $C p_1(t)$ при $t > R/c$ (когда $C p_1(t) \sim 1/R$ - см. приложение А) имеет порядок величины $1/(R\varkappa)^2$. Напомним, что $\varkappa$ есть характеристика нашего детектора; $1/\varkappa$ есть длина волны фотона, испускаемого возбужденным электроном атома-детектора. В обычных опытах по измерению (групповой) скорости света имеем $R\varkappa \gg 1$. В /6/ обсуждался опыт, в котором $R\varkappa \sim 1$. В задаче о скорости сигнала R должно быть много больше размеров детектора d. Для детектора реальных размеров условия $R \sim 1/\varkappa$ и $R \gg d$ выполнимы только в том случае, если детектор может регистрировать фотоны радиоволнового диапазона.

Координата и импульс составляют полный набор операторов для (бесспинового) электрона, через них можно выразить все другие физические величины.

Полученный для $Cp_1(t)$ результат означает, что и распределение по энергии электрона начинает отличаться от "фонового" распределения сразу после включения тока:

$$\left\langle \Omega, \left[\frac{p_x^2(t)}{2m} + \frac{m\varkappa^2}{2} q_x^2(t) \right] \Omega \right\rangle - \left\langle \Omega, \left[\frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\varkappa^2}{2} q_x^2 \right] \Omega \right\rangle = \qquad ([illegible].11)$$

$$= \frac{1}{2m} \left[Cp_x(t) \right]^2 + \frac{m\varkappa}{2} \left[Cq_x(t) \right]^2 .$$

6. Заметим, что мы не получили бы для $Cq_1(t)$ точного нуля в интервале времен $(0, (R-\ell)/c)$, если бы не использовали дипольного приближения. Действительно, с вероятностью $\sim exp(-R^2/\ell^2)$, $\ell = 1/\sqrt{m\varkappa}$ электрон присутствует в области локализации тока и поэтому может изменить свое состояние сразу после включения тока. А в момент $t > 0$ фотон, испущенный током, может оказаться уже на расстоянии $R - ct$ от центра осцилляторного потенциала, где вероятность присутствия электрона $\sim exp\left[-(R-ct)^2/\ell^2 \right]$.

Какова величина этого эффекта по сравнению с вычисленной величиной $Cp_1(t)$ при $t < R/c$? Если отношение R к размеру осцилляторного атома равно 2000, то можем ожидать, что отношение вероятностей возбуждения электрона в момент $t = R/2$ и момент $t > R$ содержит множитель $exp\ (-\ (1000)^2)$. А соответствующее отношение $Cp_1(t = R/2) / Cp_1(t > R)$ сравнимо с единицей при $R\varkappa = 1$! Таким образом, естественный (тривиальный) непричинный эффект за счет неидеальной (нефинитной) локализации электрона, который отбрасывается дипольным приближением, является совершенно несущественным по сравнению с обнаруженным.

7. С одной стороны, можно думать, что непричинное поведение распределения по импульсам и энергии не должно нас беспокоить: прибор, измеряющий импульс, не может быть локализованным в малой области.

С другой стороны, если распределение по импульсам начинает изменяться сразу после включения тока, то амплитуда распределения по координатам электрона (точнее, матрица плотности в координатном представлении) тоже изменяется сразу. Действительно, если вместе с квадратом модуля этой амплитуды до момента $t = R/c$ не менялась бы фаза, то эта функция и в импульсном представлении была бы причинной. Мы не знаем, существуют ли приборы небольших размеров, реагирующие на фазу амплитуды распределения по координатам.

Поэтому мы оставляем открытым вопрос о том, означает ли полученный результат, что релятивистская причинность теории нарушена.

§ 4. Источник и детектор – осцилляторные электроны. Параметрическое возбуждение источника.

До сих пор источник сигнала идеализировался внешним током, не изменяющимся при излучении поля. Не зависят ли полученные результаты от этой идеализации? В этом параграфе берется квантовый источник – возбуждаемый внешним полем электрон, меняющий свое состояние при испускании фотона.

I. Этот усложненный вариант задачи о скорости сигнала можно описать следующей моделью, все еще точно решаемой.

Два нерелятивистских электрона (мезона) локализованы в осцилляторных ямах с центрами в точках $+R/2$ и $-R/2$ (лежащих на оси z). Каждый из электронов дипольно взаимодействует с кванто–

ванным электромагнитным полем. В этом случае использование обычного мультипольного разложения вектор-потенциала (относительно центра локализации первого электрона, например) не позволяет разделить гамильтониан на два коммутирующие оператора, один из которых содержал бы только электронные и дипольные фотонные операторы (состояние второго электрона меняется и при поглощении фотонов высших мультипольностей). Упрощение, вносимое дипольным приближением, наиболее полно реализуется при употреблении вместо мультипольных других функций, названных в /24/ двухточечными. В то время как обычные мультиполи все исчезают в одной точке (начале координат), за исключением лишь трех электрических дипольных функций, только шесть из двухточечных поперечных функций не равны нулю в двух точках $+R/2$ и $-R/2$. Ввиду удвоения числа неисчезающих функций фотонные операторы рождения-уничтожения приобретают дополнительный индекс λ, принимающий два значения. Выбирается кулоновская калибровка, так что вектор-потенциал A поперечен: $\operatorname{div} \vec{A} = 0$. Кулоновское взаимодействие электронов учитывается в приближении, соответствующем дипольному, аналогично предыдущему параграфу. Модель подробно описана в /14, 15/. Там показано, что полный гамильтониан разделяется на три коммутирующих оператора $H = h_x + h_y + h_z$. Мы выпишем только один из них, а именно, h_x, опуская в дальнейшем индекс x:

$$h = \frac{\varkappa}{2}(p_1^2+q_1^2) + \frac{\varkappa}{2}(p_2^2+q_2^2) + \frac{1}{2}\int_0^\infty dk \sum_\lambda k\left[p_\lambda^2(k)+q_\lambda^2(k)\right] +$$

$$+\frac{e^2}{R^3 m\varkappa} q_1 q_2 + \sqrt{\varkappa}\, p_1(\bar{\varepsilon}_1 \bar{p}) + \sqrt{\varkappa}\, p_2(\bar{\varepsilon}_2 \bar{p}) + \frac{1}{2}(\bar{\varepsilon}_1 \bar{p})^2 + \frac{1}{2}(\bar{\varepsilon}_2 \bar{p})^2. \qquad (4.1)$$

Употреблено сокращение $(\bar{\varepsilon}_1 \bar{p}) \equiv \int_0^\infty dk \sum_\lambda \varepsilon_1^\lambda(k)\, p_\lambda(k)$.

Другие обозначения:

$$\varepsilon_1^\lambda(k) = -c\sqrt{\frac{2k}{3\pi m}}\, g(k) f_\lambda(k,R)\,, \quad \varepsilon_2^\lambda(k) = \lambda\, \varepsilon_1^\lambda(k)\,; \quad \lambda = -1, +1 \tag{4.2}$$

$$f_\lambda(k,R) = \left\{ 1 + \lambda \frac{3}{2} \left[\frac{\sin kR}{kR} + \frac{\cos kR}{(kR)^2} - \frac{\sin kR}{(kR)^3} \right] \right\}^{1/2}. \tag{4.3}$$

Здесь $g(k)$ – формфактор обрезания, необходимого для оправдания дипольного приближения. Операторы p_1 и q_1 связаны с первоначальными операторами электронов p_{1x} и q_{1x} (последний "отсчитывается" от точки $+R/2$) следующим образом: $p_1 = p_{1x}/\sqrt{m\varkappa}$; $q_1 = q_{1x}\sqrt{m\varkappa}$ (аналогично-для p_2 и q_2).

Гамильтониан имеет вид суммы двух квадратичных форм: формы от операторов q и от p . Для приведения его к виду "суммы квадратов" ("диагонализация") сначала приведем форму от q к виду суммы квадратов с единичными коэффициентами с помощью двух канонических преобразований (сохраняющих перестановочные соотношения):

$$\begin{aligned} q_1 &= (q_+' - q_-')/\sqrt{2}\,; & q_2 &= (q_+' + q_-')/\sqrt{2}\,; \\ p_1 &= (p_+' - p_-')/\sqrt{2}\,, & p_2 &= (p_+' + p_-')/\sqrt{2} \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} q_+' &= q_+''/\sqrt{\xi_+}\,, & q_-' &= q_-''/\sqrt{\xi_-}\,; & q_\lambda(k) &= q_\lambda''(k)/\sqrt{k} \\ p_+' &= p_+''\cdot\sqrt{\xi_+}\,; & p_-' &= p_-''\sqrt{\xi_-}\,; & p_\lambda(k) &= p_\lambda''(k)\cdot\sqrt{k}\,. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Здесь $\xi_\pm = \varkappa \pm e^2/R^3 m\varkappa$. После подстановки (4.4) в (4.I) можно убедиться, что h разделяется на два оператора h_+ и h_-. В h_+ входят электронные и фотонные операторы p и q только с индексом $\lambda = +$, в h_- – только с индексом $\lambda = -$. Поэтому $[h_+, h_-] = 0$. После преобразования (4.5) каждый из операторов h_λ приобретает ви[д пе]рвых двух строк в (3.7) (или вид (5) в/I6/):

$$h_\lambda = \frac{1}{2} q_\lambda^2 + \frac{\varkappa \xi_\lambda}{2} p_\lambda^2 + \frac{1}{2}\int_0^\infty dk \left[q_\lambda^2(k) + k^2 p_\lambda^2(k) \right] + \tag{4.6}$$

$$+ \sqrt{\varkappa \xi_\lambda} \int_0^\infty dk \sqrt{2k}\, \mathcal{E}_\lambda(k)\, p_\lambda\, p_\lambda(k) + \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty dk \sqrt{2k}\, \mathcal{E}_\lambda(k)\, p_\lambda(k) \right]^2 .$$

Здесь $\mathcal{E}_\lambda(k)$, $\lambda = \pm$, обозначают: $\mathcal{E}_+(k) = \mathcal{E}_1^+(k)$ [illegible], $\mathcal{E}_-(k) = -\mathcal{E}_1^-(k)$. Приведение h_λ к виду "суммы квадратов" произведено в /16/ (роль константы $\varkappa$ играет теперь $\sqrt{\varkappa \xi_\lambda}$). Тем самым задача "диагонализации" (4.I) сведена к решенной задаче для модели с одним осциллирующим электроном.

$$h = \frac{1}{2}\int_0^\infty d\omega \sum_\lambda \left[\hat{q}_\lambda^2(\omega) + \omega^2 \hat{p}_\lambda^2(\omega) \right] = \frac{1}{2}\int_0^\infty d\omega \sum_\lambda \omega \left[b_\lambda^+(\omega) b_\lambda(\omega) + b_\lambda(\omega) b_\lambda^+(\omega) \right] \tag{4.7}$$

$$b_\lambda(\omega) = \left[\sqrt{\omega}\, \hat{p}_\lambda(\omega) - i \hat{q}_\lambda(\omega)/\sqrt{\omega} \right] / \sqrt{2} ;$$

$$\left[b_\lambda(\omega), b_{\lambda'}^+(\omega') \right] = \delta_{\lambda\lambda'}\, \delta(\omega - \omega') . \tag{4.8}$$

В дальнейшем нам понадобятся выражения q_1 и q_2 через диагонализующие операторы $b_\lambda(\omega)$, $b_\lambda^+(\omega)$. Они получаются с помощью преобразований (4.4), (4.5) и преобразования (А.5) из /16/:

$$q_1 = \frac{i}{2}\int_0^\infty d\omega \sum_\lambda \lambda\, U_\lambda(\omega) \sqrt{\frac{\omega}{\xi_\lambda}} \left[b_\lambda(\omega) - b_\lambda^+(\omega) \right]$$

$$q_2 = \frac{i}{2}\int_0^\infty d\omega \sum_\lambda U_\lambda(\omega) \sqrt{\frac{\omega}{\xi_\lambda}} \left[b_\lambda(\omega) - b_\lambda^+(\omega) \right]. \tag{4.9}$$

2. Во всех работах, упомянутых в историческом обзоре во Введении (кроме /17/), задача о скорости сигнала ставилась как задача Коши: было задано в момент $t = 0$, что атом-источник является возбужденным, процесс приготовления возбужденного состояния не рассматривался. Мы предлагаем иную постановку задачи, в которой возбужденное состояние источника приготовляется изменением некоторого

внешнего поля, действующего на электрон.

До момента $t=0$ имеем стабильное состояние физического вакуума Ω (он определяется уравнениями $b_\lambda(\omega)\Omega=0$ для всех λ, ω). В момент $t=0$ около первого электрона начинаем включать электрическое поле $\dot{E}(t)$, которое можно считать однородным в малой области, где локализован электрон. Соответствующая потенциальная энергия $e(\vec{q}_1\,\vec{E}(t))$ может быть объединена вместе с членом $m\varkappa^2(\bar{R}_1-R/2)^2$ в выражение вида

$$\frac{m\varkappa^2}{2}\left[\bar{R}_1-\bar{R}/2+\vec{\tau}(t)\right]^2 \equiv \frac{m\varkappa^2}{2}\left[\vec{q}_1+\vec{\tau}(t)\right]^2.$$

Оператор $\vec{q}_1$ "отсчитывается" от точки $R/2$: точке $q_1=0$ соответствует нахождение электрона в точке $R/2$. Формально в момент $t=0$ осцилляторная яма для первого электрона начинает смещаться как целое, так что центр ямы уже не совпадает с точкой $R/2$. Разумеется, для того, чтобы дипольное приближение осталось справедливым, надо считать, что $|\vec{\tau}(t)|<\ell$ при всех t ; $\ell=1/\sqrt{m\varkappa}$ — "размер" осциллятора.

После $t=0$ в h_x появляется новый операторный член $m\varkappa^2 q_x \tau_x(t)$, так что к (4.I) добавляется член $\varkappa q_1\tau_1(t)$, $\tau_1(t)<1$

$$h_1(t)=h_x(t=0)+\varkappa q_1\tau_1(t) \quad ; \quad q_1=q_{1x}\sqrt{m\varkappa}\ ; \ \tau_x=\tau_1/\sqrt{m\varkappa}. \tag{4.I0}$$

Используя (4.7) и (4.9), можно $h_1(t)\equiv h(t)$ представить в виде

$$h(t)=\int d\omega\sum_\lambda \omega b_\lambda^+(\omega)\,b_\lambda(\omega)+\varkappa\tau_1(t)\cdot\frac{i}{2}\int d\omega\sum_\lambda \lambda\,U_\lambda(\omega)\sqrt{\frac{\omega}{\xi_\lambda}}\left[b_\lambda(\omega)-b_\lambda^+(\omega)\right]. \tag{4.II}$$

Уравнение для гейзенберговских операторов $b_\lambda(\omega,t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}b_\lambda(\omega,t)=i\left[h^{\text{(ей)}}(t),\ b_\lambda(\omega,t)\right]=-i\omega b_\lambda(\omega,t)-\frac{1}{2}\varkappa\,\tau_1(t)\lambda\,U_\lambda(\omega)\sqrt{\frac{\omega}{\xi_\lambda}} \tag{4.I2}$$

имеет следующее решение, превращающееся при $t=0$ в шредингeровский оператор $b_\lambda(\omega)$:

$$b_\lambda(\omega,t)=e^{-i\omega t}\left[b_\lambda(\omega)-\frac{i}{2}\varkappa\lambda U_\lambda(\omega)\sqrt{\frac{\omega}{\xi_\lambda}}\int_0^t dt' e^{i\omega t'} z_1(t')\right]. \qquad (4.13)$$

Как и в § 3, найдем сначала среднее от оператора координаты второго электрона q_2 в состоянии $U(t,0)\Omega$, получающемся из состояния Ω в результате описанной процедуры изменения потенциала для первого электрона. После момента $t=0$ состояние первого электрона начинает изменяться и через посредство взаимодействия, описываемого второй строкой членов в (4.I), начнет изменяться и состояние второго электрона. Имеем:

$$\langle U(t,0)\Omega,\, q_2\, U(t,0)\Omega\rangle=\langle\Omega, q_2(t)\Omega\rangle, \qquad (4.14)$$

где гейзенберговский оператор $q_2(t)=U^+(t,0)q_2 U(t,0)$ так же выражается через гейзенберговские операторы $b_\lambda(\omega,t)$, $b_\lambda^+(\omega,t)$, как q_2 - через $b_\lambda(\omega)$, $b_\lambda^+(\omega)$ (см. (4.9)). Подставляя в это выражение (4.13), получаем для C -числовой части оператора $q_2(t)$

$$Cq_2(t)=\frac{-i\varkappa}{4}\int_0^t dt' z_1(t')\int_0^\infty d\omega\sum_\lambda \lambda U_\lambda^2(\omega)\frac{\omega}{\xi_\lambda}\left[e^{-i\omega(t-t')}-e^{i\omega(t-t')}\right]. \qquad (4.15)$$

Среднее (4.I4) равно $Cq_2(t)$. Интеграл по ω вычислен в приложении Б. Величина $Cq_2(t)$ точно равна нулю при $t<(R-2b)/c$, где b - радиус (финитной) размазки взаимодействия. Так же, как и в § 3, можно показать, что распределение по q_2 получается сдвигом распределения в состоянии Ω на величину $Cq_2(t)$.

3. В отличие от распределения по координате, распределение по импульсу p_2 второго электрона опять начинает изменяться раньше момента $(R-2b)/c$. Распределение по p_2 получается сдвигом распределения в состоянии Ω на величину $\langle\Omega, p_2(t)\Omega\rangle=Cp_2(t)$,

где $Cp_2(t)$ - c -числовая часть оператора $p_2(t)$, выраженного через шредингеровские операторы $b_\lambda(\omega)$, $b_\lambda^+(\omega)$:

$$p_2(t) = \frac{1}{2}\int_0^\infty d\omega \sum_\lambda U_\lambda(\omega)\sqrt{\frac{\varepsilon_\lambda}{\omega}}\left[b_\lambda(\omega,t) + b_\lambda^+(\omega,t)\right]. \tag{4.16}$$

Оказывается (см. прилож. Б), что при $t<(R-2\ell)/c$ $\langle\Omega, p_2(t)\Omega\rangle$ не равно нулю, но пропорционально e^2/R^3.

4. Рассмотрим распределение по энергии $h_{2e} = \frac{\varkappa}{2}(p_2^2+q_2^2)$ второго электрона.

Представим каждый из операторов $q_2(t)$ и $p_2(t)$ в виде $q_2(t) = Qq_2(t) + Cq_2(t)$, где $Qq_2(t)$ есть гейзенберговский оператор координаты в случае $\gamma_1(t) = 0$ при всех t:

$$Qq_2(t) = e^{iht} q_2 e^{-iht},$$

где $h = h(t=0)$. Поскольку

$$\langle\Omega, \{p_2^2(t) + q_2^2(t)\}\Omega\rangle = \tag{4.17}$$
$$= \langle\Omega, \{[Qp_2(t)]^2 + [Qq_2(t)]^2\}\Omega\rangle + \langle\Omega, \{[Cp_2(t)]^2 + [Cq_2(t)]^2\}\Omega\rangle,$$

то разность средних от оператора $h_{2e} = \varkappa(p_2^2+q_2^2)/2$ в состояниях $\mathcal{U}(t,0)\Omega$ и Ω равна

$$\langle\Omega, \tfrac{\varkappa}{2}[p_2^2(t)+q_2^2(t)]\Omega\rangle - \langle\Omega, \tfrac{\varkappa}{2}[p_2^2+q_2^2]\Omega\rangle = \tag{4.18}$$
$$= \frac{\varkappa}{2}\{[Cp_2(t)]^2 + [Cq_2(t)]^2\}.$$

Использовано, что первый матричный элемент в правой части (4.17) равен

$$\langle e^{-iht}\Omega, [p_2^2+q_2^2]e^{-iht}\Omega\rangle = \langle\Omega,[p_2^2+q_2^2]\Omega\rangle$$

ввиду $\exp(-iht)\Omega = \Omega$. Даже не рассматривая разностей высших моментов (ср. (2.7)), можем заключить, что распределение по h_{2e}

в состоянии $U(t,0)\Omega$ начинает отличаться от распределения в состоянии Ω сразу после момента $t=0$ из-за непричинного поведения $Cp_1(t)$.

5. Отметим, что качественно такие же результаты получаются при другом способе параметрического возбуждения первого электрона, возможном в нашей модели. С помощью внешнего электрического поля определенной конфигурации можно изменять константу осцилляторного потенциала для первого электрона $\varkappa^2 \to \varkappa^2(t) = \varkappa^2(1+\Lambda(t))$, где $\Lambda(t)=0$ до момента $t=0$. В этом случае для гейзенберговских операторов $b_\lambda(\omega,t)$ вместо (4.12) получается система хотя и линейных, но зацепляющихся (по ω) уравнений, которую удается решить (точнее, свести задачу к обыкновенному интегральному уравнению Фредгольма второго рода для некоторой функции t)

§ 5. Модифицированная задача Ферми.

Как в случае, когда источником является внешний ток, так и в случае квантового источника – атома, возбуждаемого внешним полем, мы получили качественно одинаковые результаты. Распределение по координате электрона атома-детектора ведет себя "причинным" образом, распределение же по импульсу или энергии непричинно. Однако оказывается, что величина непричинного эффекта получается гораздо меньшей, чем в задаче Ферми, если $R \gg$ длины волны $1/\varkappa$. В последней вероятность найти электрон детектора при $t < R/c$ в первом возбужденном состоянии оказывается пропорциональной $[e^2/Rm(R-t)\varkappa]^2$ при условии $(R-t)\varkappa \gg 1$, – см/6/ и § 3 в /15/. Соответственно, вероятность того, что он приобретет энергию $\varkappa$, пропорциональна $\varkappa[e^2/Rm(R-t)\varkappa]^2$. В § 3 и § 4 мы получили, что средняя энергия электрона увеличивается к моменту

$t \sim R/c$ на величину $\sim \varkappa\{c^2/Rm(R\varkappa)^2\}$. По-видимому, это различие объясняется, главным образом, недостатком в самой постановке задачи Ферми, подробно обсуждаемом далее в разделе 3. В модифицированной задаче, близкой к постановке Ферми, но свободной от этого недостатка, величина причинного эффекта для энергии становится сравнимой с той, что была получена в § 3 и § 4. Однако обнаруживается новая важная особенность: даже и распределение по координатам электрона детектора не ведет себя причинным образом. Начнем с двух предварительных замечаний.

1. Задача Ферми является типичной задачей Коши (с начальным условием). Рассмотренные до сих пор задачи можно рассматривать как задачи Коши в следующем частном случае. Пусть внешний ток или добавочный внешний потенциал включаются на конечное время, так что после момента $t=\tau$ они равны своим значениям до момента $t=0$. Тогда в момент $t=\tau$ мы имеем некоторое известное состояние $\mathcal{U}(\tau,0)\Omega$, которое далее изменяется квазисвободно, так что среднее от координаты электрона детектора в момент $t>\tau$ будет равно

$$\langle e^{-ih(t-\tau)}\mathcal{U}(\tau,0)\Omega,\ q_1 e^{-i(t-\tau)h}\mathcal{U}(\tau,0)\Omega\rangle ; \quad h = h(t<0). \tag{5.1}$$

2. В § 3 и § 4 не обязательно было считать, что до момента $t=0$ имелось стабильное состояние физического вакуума. Положим, что в момент $t=0$ имели нестабильное состояние "голого" вакуума Ω_0 как начальное состояние, т.е. состояние с невозбужденными атомами и без фотонов. В тот же момент $t=0$ включается внешний ток или поле. Если это не сделано, то в последующие времена имеем некоторое меняющееся распределение по координатам или импульсам атома-детектора. Естественно считать это распределение

"фоном", ибо его изменение со временем не связано с изменением состояния источника, является "беспричинным". Сигналом следует считать отличие от этого распределения, возникающее в случае включения внешнего тока или поля.

Как мы видели в § 3 и 4, гейзенберговский оператор $q_1(t)$ имеет вид $Qq_1(t)+Cq_1(t)$, где $Qq_1(t)$ есть его квазисвободная часть, которой равен $q_1(t)$ в случае, когда ток или поле не включалось и гамильтониан все время равен $H=H(t=0)$. Поэтому

$$\langle \mathcal{U}(t,0)\Omega_0,\, q_1\, \mathcal{U}(t,0)\Omega_0\rangle - \langle e^{-iht}\Omega_0,\, q_1\, e^{-iht}\Omega_0\rangle = \tag{5.2}$$
$$= \langle \Omega_0, q_1(t)\Omega_0\rangle - \langle \Omega_0, e^{iht} q_1 e^{-iht}\Omega_0\rangle = \langle \Omega_0,\, Cq_1(t)\,\Omega_0\rangle .$$

Мы получили тот же результат, что и в случае, когда вместо Ω_0 бралось Ω - см. раздел 3 в § 3 и раздел 2 в § 4.

Можно показать, что в качестве "фонового" можно брать и другие стабильные или нестабильные состояния ψ. Постановка задачи со стабильным "фоновым" состоянием Ω представляется более естественной, чем описанная комбинация задачи Коши и задачи с заданной внешней силой. Однако именно эта комбинация оказывается более близкой к постановке Ферми /5/ или Кикучи /4/.

3. Обсудим недостаток постановки задачи по Ферми /13, 14/. Ферми вычислял матричный элемент вида $\langle 1\,2^* | \exp(-iHt) | 1^* 2\rangle$, где начальное состояние 1^*2 означает: атом 1 возбужден, атом 2 не возбужден, фотонов нет. Обозначение 12^* аналогично. Подчеркнем, что условие отсутствия фотонов в начальный момент $t=0$ важно: в противном случае атом 2 мог бы до момента R/c возбудиться фотоном, находящимся недалеко от него. Однако условие отсутствия фотонов в конечном состоянии 12^* на самом деле не соответствует

задаче о скорости сигнала. Оно подразумевает, что повсюду в пространстве есть приборы, регистрирующие фотоны и отбираются случаи, когда эти приборы ничего не зарегистрировали. На самом деле необходимо, чтобы детектор был локализован в конечном объеме, т.е. надо измерять только состояние атома 2. Задаче о скорости сигнала более соответствует величина

$$\sum_{n\gamma} \left| \langle 12^{*} n\gamma \,|\, \exp(-iHt) \,|\, 1^{*}2 \rangle \right|^{2}, \tag{5.3}$$

где $|2^{*} n\rangle$ есть состояние с n - фотонами а $\sum_{n\gamma}$, кроме суммирования по n, означает также, например, интегрирование по импульсам этих фотонов. Следует напомнить, что обсуждаемые сейчас начальные и конечные состояния являются собственными состояниями свободной части H_0 полного гамильтониана ("голые" состояния). Поэтому, вопреки интуиции, состояние $1^{*}2$ может, например, перейти в состояние $12^{*}\gamma\gamma$, и это происходит в том же порядке e^{2} теории возмущений, в котором $1^{*}2$ может переходить в 12^{*}. Поэтому (5.3) не равно просто $\left| \langle 12^{*} | \exp(-iHt) | 1^{*}2 \rangle \right|^{2}$.

Изменив так предмет вычисления, мы должны далее учесть другое неизбежное следствие употребления "голого" формализма: в момент $t>0$ детектор 2 может быть найден возбужденным, даже если атом 1 вначале не был возбужден (атом 2 может возбудиться с испусканием фотона).

Поэтому из (5.3) мы должны вычесть "фон". В /13/ "фон" определен фактически как эффект в случае, когда атом I просто отсутствовал, а не был в основном состоянии (как мы считали в § 4 и будем считать далее).

Изложив недостаток задачи Ферми и способ его устранения, предложенный Форротти/13/, отметим, что первоначальная задача имела определенные достоинства простоты. Если в качестве конечного допускается только состояние $|2^*\rangle$, то равен нулю матричный элемент $\langle 12^*|\exp(-iHt)|\Omega_0\rangle$, где Ω_0 – "голый" вакуум. В то же время, если в качестве одного из конечных состояний допускается $|2^*\rangle'$, то $\langle 12^*\rangle'|\exp(-iHt)|\Omega_0\rangle \neq 0$. Таким образом, в постановке Ферми "фон" отсутствует. Заметим далее, что матричный элемент $\langle 12^*|\exp(-iHt)|1^*2\rangle$ дает правильную зависимость от R при $t > R/c$ (а именно, он пропорционален $1/R$) и действительно очень мал при $t < R/c$ в обычных экспериментах по измерению (групповой) скорости света. Все же излагаемая далее близкая постановка задачи (но свободная от отмеченного недостатка) дает лучший результат с точки зрения причинности – см. далее (5.10).

4. Пусть "источником" является заданное в момент $t=0$ начальное состояние (как и в задаче Ферми): возбужден лишь первый атом. Но вместо регистрации факта возбуждения атома 2 (измерения его энергии), будем считать, что детектор измеряет распределение по координате q_2 электрона второго атома (фотонов он не регистрирует). Как и для задачи с внешним током или полем, будем считать моментом прихода сигнала тот момент, когда распределение по q_2 начинает отличаться от "фонового" распределения в состоянии $\exp(-iHt)\Omega_0$, где Ω_0 – "голый" вакуум, т.е. собственное состояние первой строки в (4.1) с наименьшим собственным значением.

Начальное состояние "атом 1 возбужден, атом 2 не возбужден, фотонов нет" в модели с двумя осцилляторными электронами можно записать как $a_1^+\Omega_0$, где a_1^+ – оператор, переводящий основное состояние осцилляторного электрона в первое возбужденное, $a_1^+=(p_1+iq_1)/\sqrt{2}$

Вычислим для модели, изложенной в § 4, разность

$$Q_2^{(2)}(t) = \langle e^{-iht} a_1^+ \Omega_0,\ q_2^2 e^{-iht} a_1^+ \Omega_0 \rangle - \langle e^{-iht} \Omega_0,\ q_2^2 e^{-iht} \Omega_0 \rangle =$$

$$= \langle a_1^+ \Omega_0,\ q_2^2(t)\, a_1^+ \Omega_0 \rangle - \langle \Omega_0,\ q_2^2(t)\, \Omega_0 \rangle \ . \tag{5.4}$$

Здесь фигурируют квадраты оператора q_2. После этого вычисления читатель сможет легко проверить, что среднее от q_2 равно нулю.

Выражение $\langle a_1^+\Omega_0,\ q_2^2(t)\, a_1^+\Omega_0\rangle = \langle \Omega_0,\ a_1 q_2^2(t) a_1^+ \Omega_0\rangle$ проще всего вычислить путем перетаскивания оператора a_1^+ налево, а a_1 – направо (до "встречи" с вектором Ω_0, который аннулируется оператором a_1). При этом возникает коммутатор $[\, q_2(t),\ a_1^+]$. Поскольку он оказывается c-числом (см. ниже), то

$$\langle \Omega_0,\ a_1 q_2^2(t) a_1^+ \Omega_0 \rangle = \langle \Omega_0,\ q_2^2(t)\, \Omega_0 \rangle + 2\, [q_2(t), a_1^+][q_2(t), a_1^+]^! \ . \tag{5.5}$$

Подставляя (5.5) в (5.4), получаем, что $Q_2^{(2)}(t) = 2\, |\, [q_2(t),\ a_1^+] \,|^2$.
Для вычисления $[q_2(t),\ a_1^+]$ выразим a_1^+ и $q_2(t)$ через шредингеровские диагонализующие операторы $b_\lambda(\omega)$, $b_\lambda^+(\omega)$. С помощью преобразований (4.4), (4.5) и (А.5) из [16] получаем

$$a_1^+ = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^\infty d\omega \sum_\lambda \lambda\, U_\lambda(\omega) \Big[\Big(\sqrt{\frac{\xi_\lambda}{\omega}} + i\sqrt{\frac{\omega}{\xi_\lambda}} \Big) b_\lambda^+(\omega) + \Big(\sqrt{\frac{\xi_\lambda}{\omega}} - \sqrt{\frac{\omega}{\xi_\lambda}} \Big) b_\lambda(\omega) \Big] \ . \tag{5.6}$$

Гейзенберговский оператор $q_2(t)$ так же выражается через гейзенберговские операторы $b_\lambda(\omega, t)$ (которые в этой задаче очень просто зависят от времени: $b_\lambda(\omega;t) = \exp(-i\omega t)\, b_\lambda(\omega)$) как q_2 через шредингеровские $b_\lambda(\omega)$ – см. (1.9):

$$q_2(t) = \frac{i}{2} \int d\omega \sum_\lambda U_\lambda(\omega) \sqrt{\frac{\omega}{\xi_\lambda}}\, \big[e^{-i\omega t} b_\lambda(\omega) - e^{i\omega t} b_\lambda^+(\omega) \big] \ . \tag{5.7}$$

С помощью (5.6) и (5.7) вычисляем $[q_2(t), a_1^+]$ и получаем

$$Q_2^{(2)}(t) = \frac{1}{16}\left|\int_0^\infty d\omega \sum_\lambda \lambda U_\lambda^2(\omega)\left[e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\right] + \int_0^\infty d\omega \sum_\lambda \lambda U_\lambda^2(\omega)\frac{\omega}{\xi_\lambda}\left[e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}\right]\right|^2. \quad (5.8)$$

Оба интеграла по ω вычислены в приложении Б. Первый там обозначен через P_2, второй-через Q_2. Поскольку P_2 – действительный, а Q_2 – чисто мнимый, то $Q_2^{(2)}(t) = \frac{1}{16}[P_2^2(t) + |Q_2(t)|^2]$. При $t < (R-2\ell)/c$ интеграл $Q_2(t)$ равен нулю, а $P_2(t) \neq 0$. Получаем, что $Q_2^{(2)}(t) \sim [1/R^3]^2$ при $t < (R-2\ell)/c$.

Этот результат уже достаточен для утверждения, что распределение по q_2 начинает изменяться сразу после момента $t = 0$, а не после $t = (R-2\ell)/c$, как это было в случае задач с внешним током и полем (можно, впрочем, показать, что все прочие разности четных моментов $Q_2^{(2n)}(t)$ пропорциональны R^{-6} до момента $t = (R-2\ell)/c$). Это утверждение справедливо и в случае начальных состояний вида $(n!)^{-1/2}(a_1^+)^n\Omega_0$, $n = 1, 2 \ldots$:

$$Q_n^{(2)}(t) = \frac{1}{n!}\langle \Omega_0, a_1^n q_2^2(t) a_1^{+n}\Omega_0\rangle - \langle \Omega_0, q_2^2(t)\Omega_0\rangle = 2n\left|[q_2(t), a_1^+]\right|^2 \quad (5.9)$$

и для произвольной их суперпозиции (нормированной на единицу). Надо только оговориться, что n в нашей задаче нельзя брать произвольно большим: волновая функция n-ого возбужденного состояния осциллятора становится все менее локализованной с ростом n.

Поскольку среднее от q_2^2 непричинно, то и среднее от оператора энергии второго электрона $\varkappa(p_2^2 + q_2^2)/2 = \varkappa a_2^+ a_2$ в состоянии $exp(-iht)\Omega_0$ тоже ведет себя непричинно. Без вывода приводим результат для $t < R/c$:

$$N_2(t) = \langle a_1^+\Omega_0, a_2^+(t) a_2(t) a_1^+\Omega_0\rangle - \langle \Omega_0, a_2^+(t) a_2(t)\Omega_0\rangle \sim \left[\frac{e^2}{(mR)(R\varkappa)} \frac{c}{R}\right]^2. \quad (5.10)$$

5. Можно показать, что величина $N_2(t)$ имеет отношение к задаче Ферретти /I3/. С помощью разложения $a_2^{+}a_2$ по проекционным операторам на состояния с определенным числом фононов сорта 2 (см. формулу (I2) в /I6/) можно установить сходство и различие изложенного подхода и подхода Ферретти.

Во Введении подчеркивалось, что одномерность задачи, решенной Ферретти, не позволяет ее считать задачей о скорости сигнала. Отметим любопытное следствие одномерности - отсутствие кулоновского взаимодействия. Действительно, сила притяжения между двумя бесконечными пластинами конденсатора не зависит от расстояния между ними (поле внутри конденсатора однородно). Возможно, что этим обстоятельством обусловлен причинный результат, полученный Ферретти. На основании полученных нами результатов нельзя ожидать причинного поведения распределения по энергии в трехмерном варианте задачи Ферретти.

§ 6. Заключение

Господствует убеждение, что локальная коммутативность, имеющая место в квантовой электродинамике, обеспечивает конечность скорости распространения сигнала. Мы констатируем, что до сих пор никто еще не представил этому подтверждения в виде решения конкретной задачи о скорости сигнала, безупречного хотя бы в рамках той идеализации и тех приближений, которые неизбежны в теоретической постановке задачи. В данной работе представлено несколько постановок таких задач, в которых скорость сигнала оказывается не больше скорости света c.

Первая из них демонстрирует запаздывающее распространение напряженности поля в квантовой электродинамике ([.] В этой задаче подразумевалось, что существует детектор, реагирующий именно на напряженность поля или другую полевую величину.

В других задачах детектор состоял из связанного внешним полем электрона (который может изменять свое состояние) и прибора, который измеряет координату электрона. В отличие от электрона, прибор в теоретической модели задачи не описывается. Причинный результат получается как в случае, когда источником сигнала служит внешний ток, так и в случае, когда источником является атом, возбуждаемый путем изменения внешнего потенциала.

Наряду с этими существуют постановки задач, дающие непричинный результат. В первой из них предполагается, что прибор, регистрирующий состояние электрона детектора, измеряет распределение по импульсам электрона. С классической точки зрения,невозможно понять, почему "преждевременное" изменение импульса электрона не сопровождается изменением его координаты. С квантовой точки зрения противоречия нет: фаза волновой функции может меняться (в координатном представлении) при неизменном модуле - см. § 3, раздел 7. Мы оставляем открытым вопрос о том, означает ли такое поведение распределения по импульсам действительное нарушение релятивистской причинности. Дело в том, что прибор, точно измеряющий импульс, не может считаться локализованным. А в задаче о сигнале размеры детектора должны быть много меньше расстояния R между источником и детектором.

Другая задача, дающая непричинный результат, предполагает прибор, измеряющий координату электрона детектора. Но "источником" в ней служит заданное начальное состояние: при $t=0$ атом-источник находится в одном из возбужденных состояний. В § 5 показано, что и задачу с "приготовленным" (внешним полем) возбужденным состоянием можно рассматривать в частном случае как задачу Коши с начальным состоянием. Таким образом, распределение по координате ведет себя причинным образом не для всех возможных (хорошо локализованных) начальных состояний. Можно было бы объявить, что допускаются только "приготовленные" начальные состояния, как более естественные. Но это было бы новым требованием, дополнительным к условию локальной коммутативности. К тому же не означало бы это ограничения квантово-механического принципа суперпозиции?

Ниже предлагается одно из возможных истолкований этих результатов (не исключающее, конечно, возможности других объяснений). Локальная коммутативность полей может с уверенностью гарантировать релятивистскую причинность теории только в ее полевом аспекте. Однако теория имеет еще и корпускулярный аспект: детекторы могут реагировать и на неполевые физические величины (например, на фотоны). Поэтому локальная коммутативность не может гарантировать конечности скорости сигнала для всевозможных источников и детекторов.

Обсудим полученные результаты с точки зрения возможного эксперимента. Величина непричинного эффекта во всех рассмотренных задачах получается настолько малой, что не противоречит известным опытам по измерению групповой скорости света - см. § 3, раздел 5 (Заметим, что константу с можно измерять многими способами /25/. Мы имеем в виду эксперименты, которые можно рассматривать как опыты по измерению скорости передачи сигнала). Мы не предлагаем конкретного специального опыта по следующей причине. Из наших результатов следует, что само существование непричинного эффекта зависит от того, что на самом деле измеряет данный конкретный детектор. Результат, полученный в § 5, можно рассматривать как указание на существование зависимости и от выбора источника. Поэтому исследование свойств различных реальных детекторов и источников должно предшествовать предложению конкретного опыта[x)]. Отметим одно конкретное указание, вытекающее из наших расчетов. Расстояние между детектором и источником не должно быть большим, необходимо лишь, чтобы экспериментатор мог с уверенностью судить, действительно ли сигнал пришел раньше "положенного времени".

Автор весьма благодарен И.А.Егановой, которая внесла большой вклад в расчет задачи (4.14), описанной в § 4, произведя, в частности, независимые вычисления интегралов.

---

x) Интересно все же посмотреть, не вникая в эти вопросы, что дает в одном конкретном случае формула (5.10), означающая, что отношение числа возбужденных атомов детектора в момент $t = \frac{1}{2}R/c$ к их числу после $t = R/c$ имеет порядок величины $(R/\lambda)^2$. М.И.Подгорецкий предложил взять в качестве источника лазер, дающий короткий импульс $\lesssim 10^{-9}$ сек. Пусть число фотонов в импульсе равно 10^{20}. Расстояние R между лазером и детектором предположим равным 9м, так что для световых волн $\lambda \simeq 10^{-15}$см имеем $(R/\lambda)^2 = 10^{16}$. Согласно теории относительности, детектор должен начать реагировать на лазерный импульс не ранее, чем через $3\cdot 10^{-8}$сек после начала его испускания. Согласно же (5.10), уже к моменту $1/2\ R/c = 1{,}5\cdot 10^{-8}$ сек детектор 100%-эффективности может зарегистрировать $\sim 10^{20}\cdot 10^{-16} = 10^4$ фотонов. Формулы (3.20) и (3.21) или (Б.12) и (4.18) вместо этого числа дают $10^{20}(R/\lambda)^{-4} = 10^{-12}$ фотонов.

Приложение A. Вычисление $Cq_1(t)$ и $Cp_1(t)$

Для вычисления $Cq_1(t)$ (см. (3.17)), надо сначала вычислить интеграл по κ. Преобразования X и U были выписаны в приложении A к /16/. Для нахождения $(XU)_{\kappa\omega} \equiv \int_0^{\infty} d\nu\, X_{\kappa\nu} U_{\nu\omega}$ надо заменить главные значения $P\,1/x$, фигурирующие в X и U, согласно формуле $P\,1/x = 1/x+i\varepsilon - i\pi\,\delta(x)$. Результат можно представить в виде

$$(XU)_{\kappa\omega} = \left|\,\omega^2(1+\varphi(\omega)) - \varkappa^2\right|^{-1} \times$$

$$\times \left\{ P\,\frac{\omega^2 \alpha(\omega)\,\alpha(\kappa)}{\omega^2-\kappa^2} + \delta(\kappa-\omega)\left[\omega^2(1+\rho(\omega)) - \varkappa^2\right]\right\}. \tag{A.1}$$

Здесь $\alpha(\kappa) \equiv \sqrt{2\kappa}\;\varepsilon(\kappa)$, функция $\varepsilon(\kappa)$ выписана в (3.7);

$$\varphi(\omega) = \rho(\omega) + i\pi\,\varepsilon^2(\omega) \equiv \rho(\omega) + i\eta(\omega),$$

$$\rho(\omega) = 2P\int_0^{\infty} d\kappa\, \frac{\varepsilon^2(\kappa)}{\kappa^2-\omega^2} = \frac{1}{\pi}\,P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi\,\varepsilon^2(t)}{t-\omega}\,dt. \tag{A.2}$$

Функция $U_{1\omega}$, фигурирующая в (3.17), выписана в приложении A в /16/, ее можно записать и в других видах:

$$U_{1\omega} = \frac{\varkappa\,\alpha(\omega)}{\sqrt{[1+\rho(\omega)]^2 + \eta^2(\omega)}}\left|\,\omega^2 - \varkappa^2 + F(\omega)\right|^{-1} = \frac{\varkappa\,\alpha(\omega)}{\left|\omega^2(1+\varphi(\omega)) - \varkappa^2\right|}. \tag{A.3}$$

Мы использовали соотношение $F = \varkappa^2\left[1 - 1/(1+\varphi)\right]$, - см. прилож. A в /16/, корень в (A.3) можно записать и как $|1+\varphi(\omega)|$.

Введем обозначение

$$h(\omega) = \left\{\omega^2[1+\varphi(\omega)] - \varkappa^2\right\}^{-1}. \tag{A.4}$$

Имеют место легко проверяемые соотношения

$$\omega\,\alpha^2(\omega)\,|h|^2 = -\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\,h(\omega)\,; \quad \left[\omega^2(1+\rho) - \varkappa^2\right]|h|^2 = \mathrm{Re}\,h(\omega). \tag{A.5}$$

С их помощью получим

$$\left(X U\right)_{k\omega}' U_{/\omega} = \varkappa \left\{ \omega \,\mathrm{Im}\, h(\omega) \frac{2}{\pi} P \frac{\alpha(k)}{k^2-\omega^2} + \mathrm{Re}\, h(\omega)\, \alpha(\omega)\, \delta(k-\omega) \right\}. \tag{A.6}$$

Вычисление интеграла по K от произведения функции (А.6) и функции $u(k) \equiv \sin kR + \frac{\cos kR}{kR} - \frac{\sin kR}{(kR)^2}$, являющейся нечетной функцией k, сводится к вычислению интеграла

$$\frac{2}{\pi} P \int_0^\infty dk \; \frac{\alpha(k)\, u(k)}{(k^2-\omega^2)}.$$

В его числителе фигурирует уже четная функция k, поскольку $\alpha(k) = \sqrt{2k}\, \mathcal{E}(k)$ тоже нечетная функция k (предполагается, что формфактор $g(k)$ четен). Поэтому этот интеграл равен

$$\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} dk \; \frac{\alpha(k)\, u(k)}{k\,(k-\omega)}.$$

Это есть преобразование Гильберта функции $\gamma(k) = \alpha(k)\, u(k)/k$. Оно равно действительной части аналитической в верхней полуплоскости функции $f(z) = \pi^{-1} P \int_{-\infty}^{\infty} dk\; \gamma(k)/(k-z)$ при $z = \omega + i0$. Сама функция $\gamma(k)$ равна $\mathrm{Im}\, f(\omega)$ /26/. Поэтому

$$\int_0^\infty dk \left[\sin kR + \frac{\cos kR}{kR} - \frac{\sin kR}{(kR)^2}\right] (XU)_{k\omega}\, U_{/\omega} =$$

$$= \varkappa \left[\omega \,\mathrm{Im}\, h(\omega)\, \mathrm{Re}\, f(\omega) + \mathrm{Re}\, h(\omega)\, \omega\, \mathrm{Im}\, f(\omega)\right] = \varkappa\, \omega\, \mathrm{Im}\, h(\omega) f(\omega) \tag{A.7}$$

$$f(z) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} dk \, \frac{1}{k-z} \left[\sin kR + \frac{\cos kR}{kR} - \frac{\sin kR}{(kR)^2}\right] \frac{(-2e)}{\sqrt{3\pi m}}\, g(k). \tag{A.8}$$

Выберем в качестве $g(k)$ функцию $\sin kb / kb$, соответствующую размазывающей функции $F(|\vec{z}|) = \int d^3x\, \exp(i\vec{k}\vec{z})\, g(k)$, равной нулю при $|\vec{z}| > b$. Параметр b должен удовлетворять неравенсты, $\varkappa \ll 1/b \ll \sqrt{m\varkappa}$ – см. /16/. Тогда для случая, когда z лежит в верхней полуплоскости

$$f(z) = \frac{-2e}{\sqrt{3\mu m}} f_1(z), \quad f_1(z) = \frac{\sin 2b}{2b} e^{i2b}\left[1 + \frac{i}{zR} - \frac{1}{(zR)^2}\right] + \frac{1}{(zR)^2}, \qquad (A.9)$$

Теперь заметим, что первый член в квадратной скобке в (3.17) пропадает из-за того, что интеграл $\int d\omega (XU)_{k\omega} U_{n\omega} = \int d\nu X_{k\nu} \int d\omega U_{\nu\omega} U_{n\omega}$ равен нулю: у ортогонального преобразования U строка с номером n ортогональна всем строкам с номером ν /10/.

Подставляя (A.3), (A.5) и (A.7) в (3.17), получаем для $Cq_1(t)$:

$$Cq_1(t) = \frac{e\varkappa}{\pi R\sqrt{m}}\int_0^t dt'\Delta_x(t')\int_0^\infty d\omega\left\{e^{-i\omega(t-t')} - e^{i\omega(t-t')}\right\} i\,\mathrm{Im}\,h(\omega)\left[-\frac{1}{R^2} + \omega^2 f_1(\omega)\right]. \quad (A.10)$$

Как мы сейчас увидим, $\mathrm{Im}\,h(\omega)\left[-\frac{1}{R^2} + \omega^2 f_1(\omega)\right] = \frac{1}{2i}\{h[\ ] - h^*[\ ]^*\}$ является нечетной функцией ω. Поэтому $\int_0^\infty d\omega$ можно превратить в $\int_{-\infty}^\infty d\omega$:

$$Cq_1(t) = \frac{e}{2\pi}\frac{\varkappa}{R\sqrt{m}}\int_0^t dt'\Delta_x(t')\int_{-\infty}^\infty d\omega\, e^{-i\omega(t-t')}\frac{\sin\omega b}{\omega b}\,\times$$
$$\times\left\{\frac{e^{i\omega R}[\omega^2 + i\omega/R - 1/R^2]}{\omega^2[1+\varphi(\omega)] - \varkappa^2} - \frac{e^{-i\omega R}[\omega^2 - i\omega/R - 1/R^2]}{\omega^2[1+\varphi^*(\omega)] - \varkappa^2}\right\}. \qquad (A.11)$$

Поскольку $\varphi(\omega) = \rho(\omega) + i\pi \varepsilon^2(\omega)$ и $\varepsilon^2(\omega)$ есть нечетная функция ω, а $\rho(\omega)$ – четная (см. (A.2)), то имеем $\varphi^*(\omega) = \varphi(-\omega)$ и поэтому фигурная скобка в (A.11) нечетная функция ω. Член $-1/R^2$ в квадратной скобке в (A.10) происходит от кулоновского взаимодействия тока с электроном (первый член в фигурной скобке в (3.17)). Мы видим, что он точно компенсирует последний член в $\omega^2 f_1(\omega)$ (см. (A.9)). Покажем, что (A.11) точно равно нулю при $t < (R-b)/c$.

Функция $\varphi(\omega)$ является пределом при $\mathrm{Im}\,z \to +0$ функции $\varphi(z) = \frac{2e^2}{3mb}e^{i2b}\frac{\sin 2b}{2b}$, аналитичной в верхней полуплоскости и всюду ... но, меньше R, чем 1. Функция $\varphi^*(\omega)$ является граничным значением функции $\varphi^*(z^*)$, аналитичной внизу. Можно доказать, что $h^{-1}(z) = z^2(1+\varphi(z)) - \varkappa^2$ не имеет нулей <u>вверху</u>, а $z^2(1+\varphi^*(z^*)) - \varkappa^2$ <u>внизу</u>. Для более сложного случая это сделано в приложении . Если $t<(R-b)/c$, то и подавно $t-t'<(R-b)/c$ при $0<t'<t$. Тогда часть интеграла (А.II) с $exp(i\omega R)$ можно замыкать верхней полуокружностью и, ввиду отсутствия полюсов вверху у подынтегральной функции, эта часть равна нулю. Часть интеграла, содержащая $exp(-i\omega R)$, замыкается снизу и тоже равна нулю (при любых t, если, конечно, $R>b$). Интегрирование по t' с "весом" $\Delta_\varkappa(t')$ нулевого результата конечно не меняет.

Для $t>(R+b)/c$ интеграл с $exp(i\omega R)$ приходится замыкать снизу, и тогда в игру вступают полюса функции $h(z)$, которые у нее есть в <u>нижней</u> полуплоскости.

Вычисление $Cp_1(t)$ проводится точно так же и приводит к выражению

$$Cp_1(t) = \frac{e\varkappa}{2i\pi R\sqrt{m}} \int_0^t dt' \Delta_\varkappa(t') \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega(t-t')} \frac{\sin\omega b}{\omega b} \times \left\{ e^{i\omega R}\left[\omega + i/R - 1/\omega R^2\right] h - e^{-i\omega R}\left[\omega - i/R + 1/\omega R^2\right] h^* \right\}. \tag{А.12}$$

Часть подынтегральной функции, содержащая $exp(i\omega R)$, теперь имеет полюс при $\omega=0$, как и часть с $exp(-i\omega R)$. Сумма этих частей полюса при $\omega=0$ не имеет. Смещая этот полюс в нижнюю полуплоскость $1/\omega R^2 \to 1/(\omega+i\varepsilon)R^2$, можно легко вычислить $Cp_1(t)$ при $t<(R-b)/c$. Интеграл с $exp(i\omega R)$ опять равен нулю, а интеграл с $exp(-i\omega R)$ имеет только один полюс при $\omega = -i\varepsilon$. Получаем

$$Cp_1(t) = \frac{e\varkappa}{R\sqrt{m}\,(R\varkappa)^2} \int_0^t dt' \Delta_\varkappa(t'). \tag{А.13}$$

Для сравнения приведем величину $Cp_1(t)$ при $t > R/c$. Вычисления в этом случае гораздо сложней (надо учитывать полюса $h(z)$ в нижней полуплоскости). Пусть $\Delta_x(t')$ не равно нулю только в интервале $(0,\tau)$, где τ мало: $\varkappa\tau \ll 1$. Тогда в случае $t>(R+l)/c+\tau$

$$C p_1(t) \cong \frac{-e\varkappa}{R\sqrt{m}} \cos \varkappa(t-R) \int_0^{\tau} dt' \Delta_x(t'). \qquad (А.14)$$

Приложение Б

Величина $Cq_1(t)$ определяется выражением (4.15), содержащим интеграл

$$Q_2(\tau) = \int_0^{\infty} d\omega \left[e^{-i\omega\tau} - e^{i\omega\tau}\right] \sum_\lambda \lambda\, U_\lambda^2(\omega) \frac{\omega}{\xi_\lambda}, \quad \tau = t - t'. \qquad (Б.1)$$

Используем для функций $U_\lambda^2(\omega)$ второе представление из формулы (16) в /16/. Заметим, что вместо $\varkappa^2$ в эту формулу следует подставить $\varkappa\xi_\lambda = \varkappa^2 + \lambda e^2/mR^3 = \varkappa^2(1+\lambda\delta)$, $\delta = e^2/m\varkappa^2R^3$.

$$U_\lambda^2(\omega) = \frac{i}{\pi\omega}\left\{\frac{-\varkappa^2(1+\lambda\delta)}{\omega^2[1+\varphi_\lambda(\omega)] - \varkappa^2(1+\lambda\delta)} - c\, c\right\}. \qquad (Б.2)$$

Входящая сюда комплексная функция φ_λ определяется функцией $\mathcal{E}_\lambda(\kappa)$ из (4.6): $\varphi_\lambda(\omega)$ есть предел при $z \to \omega + i0$ функции

$$\varphi_\lambda(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \quad \pi\mathcal{E}_\lambda^2(\kappa)/(\kappa - z), \qquad (Б.3)$$

аналитической в верхней полуплоскости (см. приложение А в /16/). Мы имеем $\varphi_\lambda(\omega) = \rho_\lambda(\omega) + i\pi\mathcal{E}_\lambda^2(\omega)$, где $\mathcal{E}_\lambda^2(\omega)$ – нечетная функция ω а $\rho_\lambda(\omega)$ – четная (сравни (А.2)), и поэтому $\varphi_\lambda^*(\omega) = \varphi_\lambda(-\omega)$.

Ввиду этого $\omega U_\lambda^2(\omega)$ есть нечетная функция ω и интеграл Q_2 равен

$$Q_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega\tau} \sum_\lambda \lambda\, U_\lambda^2(\omega)\, \frac{\omega}{\xi_\lambda}\,. \qquad (Б.4)$$

С помощью (Б.2) сумма по λ в Q_2 может быть преобразована к виду

$$\sum_\lambda \lambda\, U_\lambda^2(\omega)\frac{\varkappa\omega}{\varkappa\xi_\lambda} = \frac{2i\varkappa}{\pi}\left\{\frac{\omega^2(\varphi_+-\varphi_-)-\varkappa^2 S}{[\omega^2(1+\varphi_+)-\varkappa^2(1+S)][\omega^2(1+\varphi_-)-\varkappa^2(1+S)]} - c.c.\right\}. \qquad (Б.5)$$

Вычисления интегралов (Б.3) для случая $g(\kappa) = \sin\kappa l/\kappa l$ дают

$$\frac{1}{2}[\varphi_+(z)-\varphi_-(z)] = \frac{e^2}{mR}\left\{\frac{\sin^2 zl}{(zl)^2}e^{izR}\left[1+\frac{i}{zR}-\frac{1}{(zR)^2}\right] + \frac{1}{(zR)^2}\right\}. \qquad (Б.6)$$

Как и в приложении А, мы получаем

$$\omega^2(\varphi_+-\varphi_-)/2 - \varkappa^2 S =$$
$$= \frac{e^2}{mR}\,\frac{\sin^2\omega l}{(\omega l)^2}\,e^{i\omega R}\left[\omega^2 + i\omega/R - 1/R^2\right] + \frac{e^2}{mR^3} - \varkappa^2\frac{e^2}{m\varkappa^2R^3} \qquad (Б.7)$$

и Q_2 становится похожим на интеграл по ω в (А.11):

$$Q_2(\tau) = \frac{2i\varkappa e^2}{\pi m R}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega\tau}\,\frac{\sin^2\omega l}{(\omega l)^2}\left\{\frac{e^{i\omega R}[\omega^2+i\omega/R-1/R^2]}{[\omega^2(1+\varphi_+)-\varkappa\xi_+][\omega^2(1-\varphi_-)-\varkappa\xi_-]} - c.c.\right\}. \qquad (Б.8)$$

Доказательство того, что $Q_2(\tau)$ равно нулю при $\tau < (R-2l)/c$, совершенно аналогично проведенному для (А.11). Надо только показать, что функции $h_\pm^{-1}(z) = z^2(1+\varphi_\pm(z)) - \varkappa\xi_\pm$ не имеют нулей вверху, а функции $[h_\pm^{-1}(z^*)]^*$ — внизу.

Рассмотрим выражение $z^2(1+\varphi(z))-\varkappa^2$, где φ обозначает либо φ_+, либо φ_-, а $\varkappa^2$ – либо $\varkappa\xi_+$, либо $\varkappa\xi_-$. Оно равно нулю, если его действительная и мнимая части по отдельности равны нулю. Пусть $z=\omega+iy$, $\varphi(z)=Re\,\varphi+i\,Jm\,\varphi\equiv R+iJ$. Тогда $z^2(1+\varphi)-\varkappa^2=0$ означает, что

$$(1+R)(\omega^2-y^2)-\omega y\,J-\varkappa^2=0\,,\qquad 2(1+R)\,\omega y+(\omega^2-y^2)\,J=0\,. \tag{Б.9}$$

Покажем, что $J\equiv Jm\,\varphi(z)=\Pi\cdot\omega y$, где $\Pi>0$. Действительно, из (Б.3) получаем, учитывая нечетность функции $\mathcal{E}^2_\lambda(\kappa)$, (предполагается, что $g(\kappa)$ – четная):

$$Jm\,\varphi_\lambda(z)=4\omega y\int_0^\infty d\kappa\,\frac{\kappa\,\mathcal{E}^2_\lambda(\kappa)}{[(\kappa+\omega)^2+y^2][(\kappa-\omega)^2+y^2]}\,. \tag{Б.10}$$

Интеграл положителен, поскольку $\mathcal{E}^2_\lambda(\kappa)>0$ при $\kappa\geq0$ (иначе гамильтониан h не был бы эрмитовым). Подставляя в (Б.9) $\Pi\omega y$ вместо J, видим, что второе уравнение удовлетворяется, если $2(1+R)+(\omega^2-y^2)\Pi=0$ или если $\omega y=0$. В первом случае, подставляя $1+R=-\Pi(\omega^2-y^2)/2$ в левую часть первого уравнения, получаем строго отрицательное выражение

$$-(\omega^2-y^2)^2\,\Pi/2-\Pi\omega^2y^2-\varkappa^2\neq0\,.$$

Случай $\omega y=0$ распадается на два подслучая: $\omega=0$ и $y=0$. При $\omega=0$ левая часть первого уравнения превращается опять в строго отрицательную величину $-(1+R)\,y^2-\varkappa^2$, поскольку при $\omega=0$

$$R_\lambda\equiv Re\,\varphi_\lambda(z)=2\int_0^\infty d\kappa\;\kappa\,\mathcal{E}^2_\lambda(\kappa)/(\kappa^2+y^2)>0\,.$$

Случай $y=0$ надо рассматривать отдельно (интеграл (Б.10) при $y=0$ не существует). При $y=0$ имеем $Jm\,\varphi_\lambda(\omega)=\pi\,\mathcal{E}^2(\omega)$

... (I..) превращается в

$$(1+R)\,\omega^2 - \varkappa^2 = 0 \quad , \qquad \omega^2 \ldots \varepsilon^2(\omega) = 0 \, .$$

...шением первого уравнения должно быть ω , близкое к $\varkappa$, по-
...кольку $R = Re\, \varphi(\omega) = \rho \int dk \;\; \varepsilon^2(k)/k \;\; \omega \ll 1$ ... .
Для ... ω ... функция взаимодействия $\mathcal{E}_\lambda(\omega)$ ...
... post factum . Напомним, что ... электродинамике формфактор $g(k)$, входящий в $\mathcal{E}_\lambda(k)$, ...
... отличается от I при $k \lesssim \varkappa$ — см. [16]

Для ... $\langle \Omega, p_z(t)\,\Omega \rangle = C\,p_z(t)$ получаем

$$C p_z(t) = \ldots \frac{\varkappa}{4} \int_0^\infty dt' \, \chi_1(t') \, P_1(t-t') \, , \qquad (\ldots)$$

$$P_1(\tau) \ldots \int_0^\infty d\omega \sum_\lambda \lambda \, U_\lambda^2(\omega) \left[e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau} \right] .$$

Для вычисления $P_1(\tau)$ удобней использовать для $U_\lambda^2(\omega)$ ...
вое представление из формулы (I6) в [16] . Сумма по λ ... —
интегральная функция для P_1 оказываются гораздо более ...
кими, чем в случае Q_1 . Не происходит взаимного уничтожения ...
(I.7). Как и в случае (I.I2), опять есть (устранимая) ...
в точке $\omega = 0$. Вычисления гораздо труднее, чем для (I...). Ре-
зультат при $t < (R-2d)/c$ имеет вид

$$C p_z(t) \cong -\frac{e^2 \varkappa}{m R\, (\varkappa R)^2} \int_0^t dt' \, \chi_1(t') \left[e^{-\eta(t-t')} \cos \varkappa(t-t') - 1 \right] , \quad \eta = \frac{e^2 \varkappa^2}{3m} \quad (\ldots)$$

Литература

1. Л.Шифф. Квантовая механика, ИИЛ, Москва, 1957.
2. S.Coleman. Acausality. Subnuclear Phenomena A.ed.Zichichi Acad.Press New York, 1970, p.282.
3. T.D.Lee, G.C.Wick. Phys.Rev. D2, 1033 (1970).
4. S.Kikuchi, Zs.f.Phys. 66, 558 (1930).
5. E.Fermi . Rev.Mod.Phys. 4, 87 (1932).
6. М.Широков, Препринт ОИЯИ Р-1719, Дубна, 1964; ЯФ 4, 1077 (1966).
7. В.Гайтлер. Квантовая теория излучения. ИИЛ, Москва, 1956.
8. M.Fierz. Helv.Phys.Acta 23, 731(1950). Перевод в сб. Новейшее развитие квантовой электродинамики, ред.Д.Иваненко, ИИЛ, Москва, 1954.
9. S.T.Ma. Nucl.Phys. 7, 163 (1958).
10. G.Wanders. Nuovo Cim. 14, 168 (1959).
11. H.Lehmann, K.Symanzik, W.Zimmermann. Nuovo Cim. 6, 319 (1957).
12. Б.Бон, М.Широков. ЯФ 7, 1316 (1968).
13. B.Ferretti. Old and New Problems in Elementary Particles, New York, 1968, p.108.
14. Н.Еганова, М.Широков. Сообщение ОИЯИ Р2-4615,Дубна, 1969.
15. И.Еганова, Препринт ОИЯИ Р2-4836, Дубна (1970),Известия АН Азерб. ССР, сер.физ.-мат.наук,1971, 1, 34.
16. М.Широков, Препринт ОИЯИ Р2-4112,Дубна,1964; ЯФ 21, вып.1(1975).
17. М.Широков, Сообщение ОИЯИ Р2-5338, Дубна (1970).
18. Р.Стритер, А.Вайтман. РСТ, спин , статистика и все такое. Наука, Москва, 1966.

19. O.Brill, B.Goodman. Amer.Journ.Phys. 35, 832 (196).
20. N.G.van Kampen. Mat.-Fys.Medd.Dan.Vid.Selsk. 26, N.15 (1951).
21. И.Еганова, М.Широков. № 9, 1097 (1969).
22. М.Роуз. Поля мультиполей, ИИЛ, Москва, 1957.
23. И.Е.Тамм. Основы теории электричества. Наука, Москва, 1966, §98.
24. И.Еганова, М.Широков. Препринт ОИЯИ Р4-3354, Дубна, 1967.
25. J.Sanders. The Velocity of Light. Pergamon Press, Oxford, 1965.
26. Е.Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье, ИИЛ, Москва, 1948, гл.5.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 июня 1974 года