объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-80-87

Г.С.Погосян, Я.А.Смородинский, В.М.Тер-Антонян

ОСЦИЛЛЯТОРНЫЕ ФУНКЦИИ ВИГНЕРА

Направлено в "Journal of Physics. A"

1980

Как известно, для потенциалов, наделенных динамической группой симметрии, переменные в уравнении Шредингера обычно разделяются в нескольких системах координат. В случае центрально-симметричных потенциалов (кулоновское поле, изотропный осциллятор) такая повышенная разделяемость переменных приводит к своеобразной неоднозначности при введении функции Вигнера, так как при этом оператору конечных вращений уже можно поставить в соответствие несколько различных типов матричных элементов в зависимости от выбора базисных волновых функций. В самом деле, например, в случаях кулонова поля и изотропного осциллятора можно говорить о матричных элементах оператора конечных вращений как по сферическому, так и по параболическому и декартовому базису соответственно. В отличие от обычной функции Вигнера (сферический базис), универсальной для всех центрально-симметричных полей, функции Вигнера, построенные по остальным базисам, несут на себе информацию и о самом поле и, следовательно, отражают его динамическую симметрию.

В настоящей работе исследуется функция Вигнера для изотропного осциллятора произвольной размерности, причем в качестве базиса выбраны декартовы волновые функции. В дальнейшем для краткости мы будем говорить о них как об осцилляторных функциях Вигнера.

План статьи таков. Вначале вводятся двумерные осцилляторные функции Вигнера. Далее на их основе строятся осцилляторные функции Вигнера произвольной размерности и развивается диаграммная техника, позволяющая сравнительно легко определять явную зависимость этих функций от углов Эйлера.

I. При переходе от системы координат $S(x,y)$ к системе координат $S'(x',y')$, повернутой относительно первой на угол α, декартовы волновые функции кругового осциллятора преобразуются ортогональной матрицей *)

$$|j+m',j-m';x',y'\rangle=\sum_{m=-j}^{j}\langle j+m,j-m;x,y|j+m',j-m';x',y'\rangle\cdot|j+m,j-m;x,y\rangle \qquad (I)$$

Разложим коэффициенты этого преобразования по полярным волновым функциям с той же энергией. Так как $E^{\text{дек.}}=2j+1$, $E^{\text{пол}}=2p+|M|+1$, где $p\geqslant 0$ и целое, M – азимутальное квантовое число, то при равных энергиях $p=j-\frac{|M|}{2}$, так что $-2j\leqslant M\leqslant 2j$ и, следовательно,

$$\langle j+m,j-m;x,y|j+m',j-m';x',y'\rangle=$$

$$=\sum_{k=-j}^{j}\langle j+m,j-m;x,y|j-|k|,2k;z,\varphi\rangle e^{2ik\alpha}\langle j-|k|,2k;z,\varphi'|j+m',j-m';x',y'\rangle.$$

Входящие в эту формулу коэффициенты перехода от декартовых волновых функций к полярным были вычислены в работе /I/ и имеют вид

$$\langle j+m,j-m;x,y|j-|k|,2k,z,\varphi\rangle=(-i)^{j-m}(-1)^{j-|k|}d^{j}_{k,m}\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

причем d – функции Вигнера в смысле фазового соглашения определены согласно монографии /2/. Пользуясь этим результатом и теоремой сложения для d -функций, получим закон преобразования

*) Ниже выбрана система единиц, в которой $\hbar=m=\omega=1$, углы φ и φ' в системах S и S' связаны соотношением $\varphi'=\varphi+\alpha$.

$$|j+m',j-m';x',y'\rangle = \sum_{m=-j}^{j} d^{j}_{m'm}(2\alpha)\,|j+m,j-m;x,y\rangle \qquad (2)$$

Легко убедиться, что при $m'=-j$ и $\alpha=\frac{\pi}{4}$ отсюда получается известная теорема сложения для полиномов Эрмита. Формула (2) для случая $\alpha=\frac{\pi}{4}$ была получена в работе /3/. Заметим также, что из (2) следует интересное интегральное представление для d - функций через нормированные функции Эрмита

$$d^{j}_{m'm}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \bar{H}_{j+m}(x)\,\bar{H}_{j+m'}\left(x\cos\frac{\varphi}{2} - y\sin\frac{\varphi}{2}\right)\bar{H}_{j-m}(y)\,\bar{H}_{j-m'}\left(-x\sin\frac{\varphi}{2} + y\cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Явный вид преобразования (2) можно установить и не переходя к полярным волновым функциям, а рассматривая соотношение (I) при больших x и y и заменяя полиномы Эрмита соответствующими главными степенями аргументов.

2. Для вычисления осцилляторных функций Вигнера при $n \geqslant 3$ можно, как это делалось выше, сначала перейти к сферическому базису и затем совершить поворот. Однако уже при $n=3$ коэффициенты такого перехода имеют довольно сложный вид /4/ и не поддаются последующему суммированию с помощью известных теорем сложения для d -функций и коэффициентов Клебша-Гордана. Поэтому ниже все вычисления проводятся непосредственно на языке декартовых волновых функций.

Вид оператора n -мерных конечных вращений, естественно, зависит от того, какое количество углов используется для перевода одной точки сферы в другую. В декартовом базисе наиболее просто выглядят повороты в отдельных координатных плоскостях, так как каждый такой поворот преобразует лишь соответствующую пару одномерных осцилляторных волновых функций по закону, полученному выше. Произвольное n -мерное вращение, как известно, эквивалентно определенным образом подобранной последовательности таких "элементарных" поворотов на $n(n-1)/2$ углов Эйлера.

В трехмерном случае оператор конечного вращения выражается через углы Эйлера Θ_1^2 , Θ_2^2 и Θ_1^1 следующим образом:

$$\hat{G}(3) = \hat{G}_{21}(\Theta_1^2)\, \hat{G}_{32}(\Theta_2^2)\, \hat{G}_{21}(\Theta_1^1). \tag{3}$$

Индексы операторов $\hat{G}_{j+1,\,j}$ указывают на координатную плоскость, в которой совершается поворот, а за положительное принято вращение от $j+1$ оси к j -ой. Так как волновые функции в системах $S(x,y,z)$ и $S'(x',y',z')$ относятся к одному значению энергии, то отличны от нуля матричные элементы $\langle j+m, j-m, n-2j \,|\, \hat{G}(3) \cdot | j'+m', j'-m', n-2j' \rangle$. Выражая, согласно (3), оператор $\hat{G}(3)$ через операторы $\hat{G}_{j+1,\,j}$ и отделяя вращение в плоскости (x, y) на угол Θ_1^1 , получим

$$\langle j+m, j-m, n-2j \,|\, \hat{G}(3) \,|\, j'+m', j'-m', n-2j' \rangle =$$

$$= \sum_{j''=0}^{n/2} \sum_{m''=-j''}^{j''} \langle j+m, j-m, n-2j \,|\, \hat{G}_{21}(\Theta_1^2)\, \hat{G}_{32}(\Theta_2^2) \,|\, j''+m'', j''-m'', n-2j'' \rangle \cdot$$

$$\langle j''+m'', j''-m'', n-2j'' \,|\, \hat{G}_{21}(\Theta_1^1) \,|\, j'+m', j'-m', n-2j' \rangle.$$

Вращение $\hat{G}_{21}(\Theta_1^1)$ не затрагивает координаты z , и поэтому последний матричный элемент отличен от нуля лишь при $j''=j'$, так что суммирование по j'' снимается. Коэффициент, содержащий произведение двух операторов вращения, в свою очередь, приводится к линейной комбинации произведений матричных элементов от операторов $\hat{G}_{21}(\theta_1^1)$ и $\hat{G}_{32}(\theta_2^2)$, и после учета аналогичных правил отбора имеем:

$$\langle j+m, j-m, n-2j \,|\, \hat{G}(3) \,|\, j'+m', j'-m', n-2j' \rangle =$$

$$= \sum_{m''=-j'}^{j'} \sum_{\tilde{m}=-j}^{j} \langle j+m, j-m \,|\, \hat{G}_{21}(\theta_1^2) \,|\, j+\tilde{m}, j-\tilde{m} \rangle \langle j-\tilde{m}, n-2j \,|\, \hat{G}_{32}(\theta_2^2) \,|\, j'-m'', n-2j' \rangle \cdot$$

$$\langle j'+m'', j'-m'' \,|\, \hat{G}_{21}(\theta_1^1) \,|\, j'+m', j'-m' \rangle \, \delta_{j+\tilde{m},\, j'+m''}.$$

Переходя далее от суммирования по $\tilde{m}$ *и* m'' *к суммированию* по $t = j'+m''$ и $k = j+\tilde{m}$ и пользуясь тем, что, согласно (2),

$$\langle j+m, j-m; x_k, x_{k+1} \,|\, j'+m', j'-m'; x'_k, x'_{k+1} \rangle = \qquad (4)$$

$$= \langle j+m, j-m \,|\, \hat{G}_{k+1,k}(\alpha) \,|\, j'+m', j'-m' \rangle = d^{\,j}_{m'm}(2\alpha),$$

получим явное выражение для трехмерной осцилляторной функции Вигнера:

$$\langle j+m, j-m, n-2j \,|\, \hat{G}(3) \,|\, j'+m', j'-m', n-2j' \rangle =$$

$$= \sum_{t=0}^{2\min(j,j')} d^{\,j}_{t-j,\,m}(2\theta_1^2)\, d^{\,\frac{n-t}{2}}_{2j'-\frac{n+t}{2},\,2j-\frac{n+t}{2}}(2\theta_2^2)\, d^{\,j'}_{m',\,t-j'}(2\theta_1^1). \qquad (5)$$

Пределы, в которых суммирование по t, можно явно не выписывать, если подразумевать, что t пробегает только те значения, при которых абсолютное значение нижних, зависящих от t индексов d-функций не превышает значения соответствующего верхнего индекса.

Как видно из (3), при $\theta^2_2 = 0$ имеет место чистое вращение в плоскости (x, y) на угол $\theta^1_1 + \theta^2_1$, а при $\theta^1_1 = \theta^2_1 = 0$ – такое же вращение на угол θ^2_2 в плоскости (z, y), так что в этих случаях выражение (4) должно переходить в d -функцию от аргументов $2(\theta^1_1 + \theta^2_1)$ и $2\theta^2_2$ соответственно. Пользуясь равенством $d^j_{mm'}(0) = \delta_{mm'}$ и теоремой сложения для d -функций, легко убедиться в справедливости такого перехода.

В четырехмерном случае вращение определяется шестью углами Эйлера, а оператор $\hat{G}(4)$ выражается через операторы поворота в координатных плоскостях формулой /5/:

$$\hat{G}(4) = \hat{G}_{21}(\theta^3_1)\hat{G}_{32}(\theta^3_2)\hat{G}_{43}(\theta^3_3)\hat{G}_{21}(\theta^2_1)\hat{G}_{32}(\theta^2_2)\hat{G}_{21}(\theta^1_1), \tag{6}$$

осцилляторная функция Вигнера вычисляется аналогичным образом и равна

$$\langle j+m, j-m, k-2j, n-k \,|\, \hat{G}(4) \,|\, j'+m', j'-m', k'-2j', n-k' \rangle =$$

$$= \sum_{\mu,\lambda,\sigma} d^{j'}_{m',\sigma-j'}(2\theta^1_1)\, d^{\mu}_{\sigma-\mu,\lambda-\mu}(2\theta^2_1)\, d^{\frac{k'+\sigma}{2}}_{2j'-\frac{k'+\sigma}{2},\,2j-\frac{k'+\sigma}{2}}(2\theta^2_2)\,\cdot \tag{7}$$

$$\cdot\, d^{j}_{\lambda-j,m}(2\theta^3_1)\, d^{\frac{k+\lambda}{2}}_{2\mu-\frac{k+\lambda}{2},\,2j-\frac{k+\lambda}{2}}(2\theta^3_2)\, d^{\frac{n}{2}-\mu}_{k'-\mu-\frac{n}{2},\,k-\mu-\frac{n}{2}}(2\theta^3_3).$$

Суммирование здесь ведется в пределах, о которых говорилось выше в связи с формулой (5). При $\theta^3_1 = \theta^3_2 = \theta^3_3 = 0$ вращение (6) вырождается в трехмерное, а формула (7) переходит в (5).

3. Перейдем к n -мерному случаю. Оператор конечных n -мерных вращений $\hat{G}(n)$ можно представить в виде следующего произведения операторов поворота в координатных плоскостях /5/:

$$\hat{G}(n) = \hat{G}^{(n-1)}(\theta_1^{n-1}, \dots \theta_{n-1}^{n-1}) \cdots \hat{G}^{(1)}(\theta_1^1) \tag{8}$$

$$\hat{G}^{(k)}(\theta_1^k, \dots \theta_k^k) = \hat{G}_{21}(\theta_1^k) \cdots \hat{G}_{k+1,k}(\theta_k^k). \tag{9}$$

Из формулы (8) следует, что n -мерная осцилляторная функция Вигнера может быть выражена через матричные элементы операторов (9) следующим образом:

$$\langle N_1, \dots N_n | \hat{G}(n) | N_1', \dots N_n' \rangle = \sum_{p_1^{(n-1)} \dots p_{n-1}^{(n-1)}} \cdots \sum_{p_1^{(2)} p_2^{(2)}} \langle N_1, \dots N_n | \hat{G}^{(n-1)} | p_1^{(n-1)}, \dots p_{n-1}^{(n-1)}, N_n' \rangle \cdot \tag{10}$$

$$\langle p_1^{(n-1)}, \dots p_{n-1}^{(n-1)} | \hat{G}^{(n-2)} | p_1^{(n-2)}, \dots p_{n-2}^{(n-2)}, N_{n-1}' \rangle \cdots \langle p_1^{(2)}, p_2^{(2)} | \hat{G}^{(1)} | N_1', N_2' \rangle,$$

причем $p_1^{(i)} + \dots + p_i^{(i)} = N_1' + \dots + N_i'$.

Введем обозначение

$$p_1^{(1)} = N_1' \ ; \ p_i^{(n)} = N_i \ , i = 1, 2, \dots n \ ,$$

с помощью которого (10) можно переписать в более компактной форме:

$$\langle N_1, \dots N_n | \hat{G}(n) | N_1', \dots N_n' \rangle =$$

$$= \sum_{p_1^{(i)}, \dots p_i^{(i)}} \prod_{j=1}^{n-1} \langle p_1^{(j+1)}, \dots p_{j+1}^{(j+1)} | \hat{G}^{(j)}(\theta_1^j, \dots \theta_j^j) | p_1^{(j)}, \dots p_j^{(j)}, N_{j+1}' \rangle. \tag{11}$$

Пользуясь (9), выделим из произведения операторов поворота в координатных плоскостях крайний правый множитель и воспользуемся тем, что, согласно (2),

$$\hat{G}_{j+1,j}(\theta_j^j) | p_j^{(j)}, N_{j+1}' \rangle =$$

$$= \sum_m \langle \frac{p_j^{(j)} + N_{j+1}'}{2} + m, \frac{p_j^{(j)} + N_{j+1}'}{2} - m | \hat{G}_{j+1,j}(\theta_j^j) | p_j^{(j)}, N_{j+1}' \rangle \cdot | \frac{p_j^{(j)} + N_{j+1}'}{2} - m, \frac{p_j^{(j)} + N_{j+1}'}{2} + m \rangle,$$

где суммирование по m ведется в пределах $2|m| \leq p_j^{(i)} + N_{j+1}'$.
Пронося далее вектор состояния $\langle p_{j+1}^{(i+1)}|$ через произведение первых $j-1$ операторов поворота в координатных плоскостях и пользуясь условием ортонормировки одномерных осцилляторных волновых функций, придем к соотношению

$$\langle p_1^{(i+1)}, \dots p_{j+1}^{(i+1)} | \prod_{\ell=1}^{j} \hat{G}_{\ell+1,\ell}(\theta_\ell^j) | p_1^{(i)}, \dots p_j^{(i)}, N_{j+1}' \rangle =$$

$$= \langle p_j^{(i)} + N_{j+1}' - p_{j+1}^{(i+1)}, p_{j+1}^{(i+1)} | \hat{G}_{j+1,j}(\theta_j^j) | p_j^{(i)}, N_{j+1}' \rangle \cdot$$

$$\cdot \langle p_1^{(i+1)}, \dots p_j^{(i+1)} | \prod_{\ell=1}^{j-1} \hat{G}_{\ell+1,\ell}(\theta_\ell^j) | p_1^{(i)}, \dots p_{j-1}^{(i)}, p_j^{(i)} + N_{j+1}' - p_{j+1}^{(i+1)} \rangle .$$

Продолжая эту процедуру понижения числа множителей в произведении операторов поворота в координатных плоскостях после $j-1$ шагов, получаем:

$$\langle p_1^{(i+1)}, \dots p_{j+1}^{(i+1)} | \prod_{\ell=1}^{j} \hat{G}_{\ell+1,\ell}(\theta_\ell^j) | p_1^{(i)}, \dots p_j^{(i)}, N_{j+1}' \rangle =$$

$$= \prod_{k=1}^{j} \langle J_{jk} + m_{jk}, J_{jk} - m_{jk} | \hat{G}_{j-k+2}(\theta_{j-k+1}^j) | J_{jk} + m_{jk}', J_{jk} - m_{jk}' \rangle . \tag{12}$$

Величины J_{jk} , m_{jk} и m_{jk}' определены следующим образом:

$$2 J_{jk} = N_{j+1}' + \sum_{\nu=j-k+1}^{j} p_\nu^{(i)} - \sum_{\nu=j-k+2}^{j+1} p_\nu^{(i+1)} + p_{j-k+2}^{(i+1)}$$

$$2 m_{jk} = N_{j+1}' + \sum_{\nu=j-k+1}^{j} p_\nu^{(i)} - \sum_{\nu=j-k+2}^{j+1} p_\nu^{(i+1)} - p_{j-k+2}^{(i+1)}$$

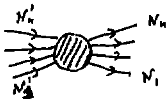
$$2 m_{jk}' = \sum_{\nu=1}^{j-k+1} p_\nu^{(i)} - \sum_{\nu=1}^{j-k+2} p_\nu^{(i+1)} + p_{j-k+1}^{(i)} .$$

Пользуясь теперь формулой (4), приходим к окончательному результату:

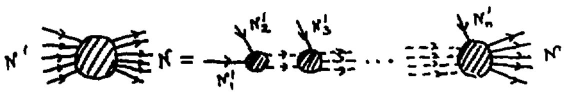
$$\langle \varkappa_1,\dots\varkappa_n|\hat{G}(n)|\varkappa'_1,\dots\varkappa'_n\rangle = \sum_{p_1^{(i)},\dots p_i^{(i)}} \prod_{j=1}^{n-1}\prod_{k=1}^{j} d^{\,J_{jk}}_{m_{jk},\,m'_{jk}}\left(2\theta^{j}_{j-k+1}\right) \qquad (13)$$

Можно убедиться, что при $n=2,3$ и 4 формула (13) переходит в (4), (5) и (7).

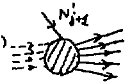
4. Полученным выше результатам можно придать наглядность, если воспользоваться следующей аналогией. Оператор $\hat{G}(n)$ связывает состояния $|\varkappa_1,\dots\varkappa_n;x_1,\dots x_n\rangle$ и $|\varkappa'_1,\dots\varkappa'_n;x'_1,\dots x'_n\rangle$ и поэтому матричный элемент $\langle\varkappa_1,\dots\varkappa_n|\hat{G}(n)|\varkappa'_1,\dots\varkappa'_n\rangle$ можно интерпретировать как "амплитуду перехода системы из состояния $\varkappa'$ в состояние $\varkappa$ и поставить в соответствие этой амплитуде диаграмму

$\langle\varkappa_1,\dots\varkappa_n|\hat{G}(n)|\varkappa'_1,\dots\varkappa'_n\rangle =$ 

При таком подходе разложение (10) матричного элемента оператора $\hat{G}(n)$ по матричным элементам операторов $\hat{G}^{(i)}$ графически представится в виде последовательности "переходов"

 (14)

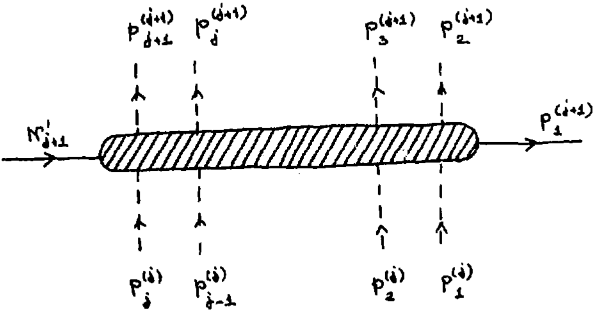
Подразумевается, что по пунктирным линиям ведется суммирование, а промежуточные блоки, содержащие одну сплошную линию, соответствуют матричным элементам операторов $\hat{G}^{(i)}$, а именно:

$$\langle p_1^{(j+1)},\dots p_{j+1}^{(j+1)} \,|\, \hat{G}^{(j)}(\theta_1^j,\dots\theta_j^j) \,|\, p_1^{(j)},\dots p_j^{(j)}, N'_{j+1} \rangle = p^{(j)}$$  $p^{(j+1)}$ (I5)

Согласно условию, предшествующему формуле (II), при $j=1$ и $j=n$ эти блоки переходят в первый и последний блок разложения (I4). Для каждого блока справедлив закон сохранения

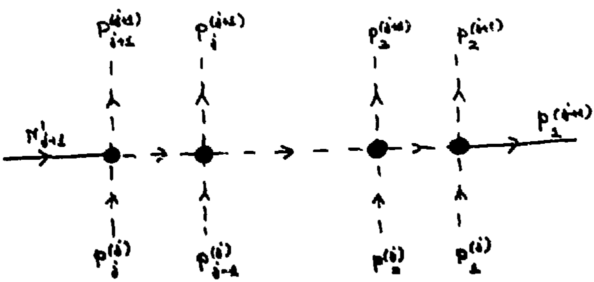
$$p_1^{(j+1)} + \dots\, p_{j+1}^{(j+1)} = p_1^{(j)} + \dots\, p_j^{(j)} \qquad 1.$$

Графическое разложение (I4) топологически эквивалентно диаграмме, приведенной на рис. I. Блок (I5) на этой диаграмме выглядит так:



(I6)

В соответствие с формулой (I2) структура этого блока имеет вид



(I7)

В отличие от разложения (I4), в (I7) промежуточные пунктирные линии при заданных внешних имеют определенный индекс, так что переход от (I6) к (I7) не связан с добавочным суммированием. Диаграмма на рис. I и разложение (I7) позволяют выразить амплитуду перехода $\langle N | \hat{G}(n) | N' \rangle$ через амплитуды элементарных переходов двух линий в две (см. рис. 2).

В этой диаграмме число пересечений, т.е. элементарных блоков, равно $n(n-1)/2$. Это соответствует тому, что с каждым из таких блоков связан поворот в координатной плоскости на определенный эйлеров угол. Число суммирований в формуле (I3) равно

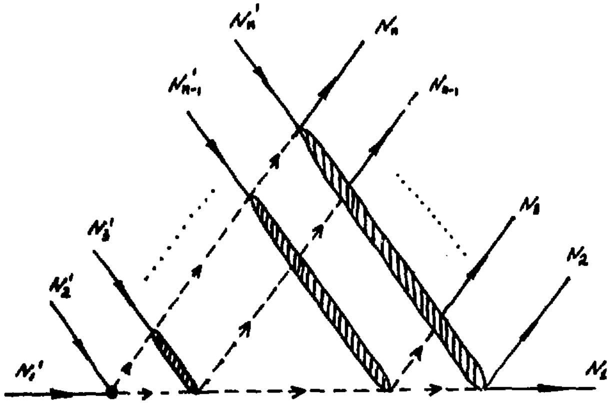


Рис. I.

Диаграмма, топологически эквивалентная разложению (I4).

$(n-1)(n-2)/2$ и совпадает с числом элементарных петель на диаграмме рис. 2. Каждому пересечению, согласно (4), соответствует амплитуда элементарного "перехода"

$$= \langle A, B | \hat{G}(\theta) | A', B' \rangle = d^{\frac{A+B}{2}}_{\frac{A'-B'}{2},\, \frac{A-B}{2}}(2\theta) \qquad (18)$$

Оператор $\hat{G}(\theta)$ в последнем соотношении конечно, должен быть снабжен индексами координатных осей, определяющих плоскость, в которой совершается поворот. Мы эти индексы опустили, т.к. они однозначно определяются самой диаграммой на рис. 2.

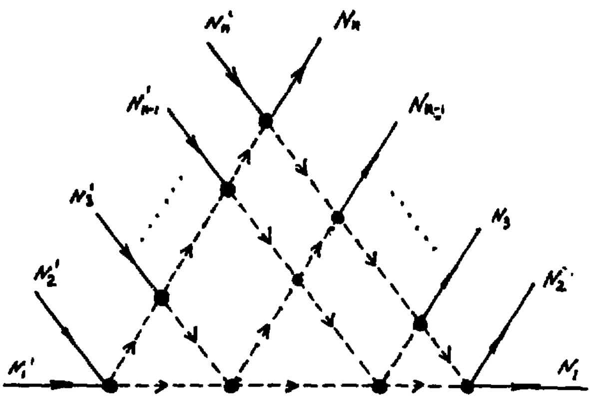


Рис. 2.

Диаграмма, выражающая n -мерную осцилляторную функцию Вигнера через d -функции, зависящие от углов, на которые совершаются повороты в координатных плоскостях.

Сводка правил расчета такова. Для каждого конкретного n чертим соответствующую диаграмму, отмечаем на ней углы Эйлера и расставляем индексы, соответствующие всем линиям. Число нефиксированных индексов должно быть равно числу элементарных петель на диаграмме. Далее, каждому пересечению ставится в соответствие d -функция от угла, "прикрепленного" к этому пересечению. Индексы d -функции расставляются согласно правилу (I8), а по нефиксированным индексам проводится суммирование, причем в суммировании принимают участие значения, для которых d -функция имеет смысл. Подробнее последнее условие нами объяснялось выше в связи с формулой (5).

Продемонстрируем эти правила на конкретных примерах при $n = 3, 4, 5$. Если индексы волновых функций выбрать так, как это делалось в пункте 2, то получаются диаграммы, изображенные на рис. 3 и рис. 4.

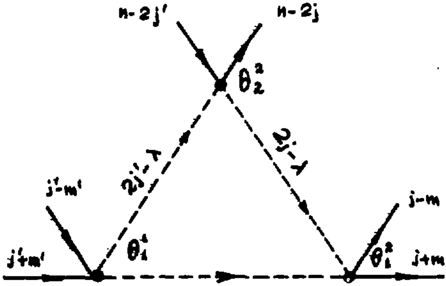


Рис. 3.

Диаграмма для трехмерной осцилляторной функции Вигнера.

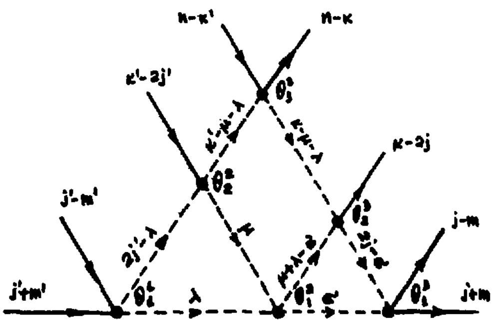


Рис. 4.

Диаграмма для четырехмерной осцилляторной функции Вигнера.

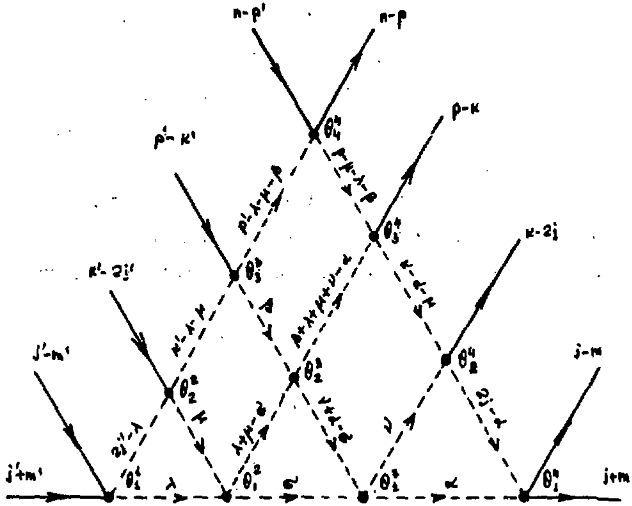


Рис. 5.

Диаграмма для пятимерной осцилляторной функции Вигнера.

Сформулированные правила в случае диаграмм рис. 3 и рис. 4 приводят к полученным ранее формулам (5) и (7), а для диаграммы на рис. 5 получается результат

$$\langle j+m, j-m, k-2j, p-k, n-p \,|\, \hat{G}(5) \,|\, j'+m', j'-m', k'-2j', p'-k', n-p' \rangle =$$

$$= \sum_{\mu,\nu,\lambda,\sigma,\alpha,\beta} d^{j'}_{m',\lambda-j'}(2\theta_1^1)\, d^{\frac{\lambda+\mu}{2}}_{\frac{\lambda-\mu}{2},\sigma-\frac{\lambda+\mu}{2}}(2\theta_1^2)\, d^{\frac{k'-\lambda}{2}}_{2j'-\frac{k'-\lambda}{2},\mu-\frac{k'-\lambda}{2}}(2\theta_2^2)\, d^{\frac{\nu+\alpha}{2}}_{\sigma-\frac{\nu+\alpha}{2},\frac{\alpha-\nu}{2}}(2\theta_1^3)$$

$$d^{\frac{\lambda+\mu+\beta-\sigma}{2}}_{\frac{\lambda-\mu-\sigma-\beta}{2},\nu+\alpha-\frac{\sigma+\beta+\lambda+\mu}{2}}(2\theta_2^3)\, d^{\frac{p'-\lambda-\mu}{2}}_{k'-\frac{\lambda+\mu+p'}{2},\beta-\frac{p'-\lambda-\mu}{2}}(2\theta_3^3)\, d^{j}_{\alpha-j,m}(2\theta_1^4)$$

$$d^{\frac{k-\alpha}{2}}_{\nu-\frac{k-\alpha}{2},2j-\frac{k+\alpha}{2}}(2\theta_2^4)\, d^{\frac{p+\alpha-\nu}{2}}_{\beta+\lambda+\mu-\frac{p+\nu+\alpha-\lambda}{2},k-\frac{p+\alpha+\nu}{2}}(2\theta_3^4)\, d^{\frac{n-\lambda-\beta-\mu}{2}}_{p'-\frac{n+\beta+\lambda+\mu}{2},p-\frac{n+\beta+\lambda+\mu}{2}}(2\theta_4^4).$$

Таким образом диаграммный метод сводит задачу о нахождении осцилляторной функции Вигнера к простым геометрическим построениям.

Мы глубоко признательны А.Н.Сисакяну за проявленный интерес к работе и плодотворные обсуждения.

Литература

1. Погосян Г.С., Тер-Антонян В.М., Торосян Г.Т. Препринт ПЛРФ-77-04,Изд. Ереванского государственного университета,Ереван, 1977.
2. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. "Квантовая теория углового момента". Л., 1975.
3. Погосян Г.С., Тер-Антонян В.М. ТМФ, 1979, т.10, № 1.
4. Погосян Г.С., Тер-Антонян В.М. ОИЯИ, П2-11962, Дубна, 1978.
5. Виленкин Н.Я. "Специальные функции и теория представлений групп", М., 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 февраля 1980 года.