сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-80-867

В.Н.Стрельцов

О РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ СПИНОВЫХ ЧАСТИЦ

1980

1. ВВЕДЕНИЕ

Ранее на основе подхода, отличающегося от традиционного, мы обсудили некоторые аспекты релятивистской квантовой механики бесспиновых частиц/1/. Этот подход основывается на предлагаемой релятивистски инвариантной формулировке трехмерной теоремы Фурье, что приводит к отличию соответствующих фурье-преобразований от обычно используемых. Кроме того, на основе применяемого в последнее время релятивистского описания систем с непрерывным распределением материи /массы, заряда и т.д./ в выражениях для интегральной вероятности, импульса и др. явным образом учитываются члены, зависящие от соответствующих плотностей тока.

Ниже этот подход применяется в рамках релятивистской квантовой механики спиновых частиц, описываемых комплексной векторной и спинорной волновыми функциями. По-прежнему все компоненты 4-векторов выбраны действительными. Метрический тензор $g^{ik}=0$ при $i \neq k$, $g^{00}=-g^{\alpha\alpha}=1$, где $i,k=0,1,2,3$ и $\alpha = 1,2,3$. При этом используется система единиц $c=\hbar=1$.

2. ВЕКТОРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

2.1. Релятивистское выражение для вероятности. Рассмотрим выражение для 4-вектора плотности тока вероятности частиц массы m, описываемых комплексной векторной волновой функцией ϕ_n

$$J_k = \frac{im^2}{2}\left(\overset{*}{\phi}_n \frac{\partial\phi^n}{\partial x^k} - \frac{\partial\overset{*}{\phi}_n}{\partial x^k}\phi^n\right). \qquad /2.1/$$

Опираясь на /2.1/ в специальной* K-системе, для полной вероятности W будем иметь

$$W=\int J^k dV_k = \frac{im^2}{2}\left[\int\left(\overset{*}{\phi}_n \frac{\partial\phi^n}{\partial x^0} - \frac{\partial\overset{*}{\phi}_n}{\partial x^0}\phi^n\right)dV_0 - \int\left(\overset{*}{\phi}_n \frac{\partial\phi^n}{\partial x^1} - \frac{\partial\overset{*}{\phi}_n}{\partial x^1}\phi^n\right)dV_1\right]. \qquad /2.2/$$

---

*Переход к ней от собственной K^0-системы, где, например, для симметричного волнового пакета $\vec{J}^{(0)}=0$, описывается специальными преобразованиями Лоренца с относительной скоростью $v_x=\beta=U^1/U^0$, где U^i - 4-скорость.

Здесь dV_k – 4-вектор элемента объема, который определяется так, что в K^0-системе $dV_i^{(0)}(dV^{(0)},0,0,0)$, а поэтому в K-системе

$$dV_1 = -\beta\, dV_0 = -\frac{K^1}{K^0} dV_0 , \qquad /2.3/$$

где $K^i = mU^i$ $(K^2 = K^3 = 0)$.

Перейдем теперь к импульсному представлению на основе ковариантного выражения

$$\phi_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\vec{k}Kk}{m^4 k^0} e^{-ikx} a_n(\vec{k}) . \qquad /2.4/$$

Вывод его и последующих двух формул в случае /1+1/-пространства дан в Приложении.

Подставим /2.4/ и комплексно сопряженное ему выражение в /2.2/ и проинтегрируем по конфигурационному пространству. При этом учтем, что релятивистски инвариантная трехмерная δ-функция в импульсном пространстве определяется формулой

$$\delta(\vec{k} - \vec{k}') = \frac{m^4}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{x}}{K^0} e^{-i(k-k')x} , \qquad /2.5/$$

где $d\vec{x} = dV_0$, m^4 обеспечивает безразмерность $\delta(\vec{k})$, а также

$$\int \frac{d\vec{k}Kk}{m^4 k^0} f(\vec{k})\delta(\vec{k} - \vec{k}') = f(\vec{k}') . \qquad /2.6/$$

В результате для вероятности W в импульсном пространстве получим следующее выражение:

$$W = \int \frac{d\vec{k}Kk}{m^4 K^0} \overset{*}{a}_n(\vec{k}) a^n(\vec{k}), \qquad /2.7/$$

которое отличается от соответствующего общеизвестного выражения множителем Kk^0/K^0. Это отличие сохраняется и в собственной K^0-системе, где /2.7/ переходит в

$$W = \int \frac{d\vec{k}}{m^4} k^0 \overset{*}{a}_n(\vec{k})\, a^n(\vec{k}) . \qquad /2.7'/$$

Отмеченное и последующие расхождения с общеизвестными результатами обусловлены фактически отличием формулы /2.4/ от соответствующей традиционной формулы.

2.2. <u>Оператор импульса</u>. Подействуем оператором x^1-компоненты импульса

$$\hat{p}^1 = -i \frac{\partial}{\partial x^1} \qquad /2.8/$$

под интегралом в формуле /2.2/. В результате получим

$$\bar{P}^1 = \frac{m^2}{2}\Big[\int\Big(\frac{\partial \overset{*}{\phi}_n}{\partial x^1}\cdot\frac{\partial \phi^n}{\partial x^0} + \frac{\partial \overset{*}{\phi}_n}{\partial x^0}\cdot\frac{\partial \phi^n}{\partial x^1}\Big)dV_0 - \int\Big(\overset{*}{\phi}_n\frac{\partial^2\phi^n}{\partial x^0\partial x^1} + \frac{\partial^2\overset{*}{\phi}_n}{\partial x^0\partial x^1}\phi^n\Big)dV_0 - 2\int\frac{\partial \overset{*}{\phi}_n}{\partial x^1}\cdot\frac{\partial \phi^n}{\partial x^1}dV_1 + \int\Big(\overset{*}{\phi}_n\frac{\partial^2\phi^n}{\partial x^{1\,2}} + \frac{\partial^2\overset{*}{\phi}_n}{\partial x^{1\,2}}\phi^n\Big)dV_1\Big]. \qquad /2.9/$$

Интегрируя второй член в /2.9/ по частям и используя волновое уравнение /положив для простоты $\partial\phi/\partial x^{2,3} = 0$ /,

$$\frac{\partial^2\phi_n}{\partial x^k\,\partial x_k} - m^2\phi_n = 0, \qquad /2.10/$$

найдем

$$\bar{P}^1 = \frac{m^2}{2}\Big[\int\Big(\frac{\partial \overset{*}{\phi}_n}{\partial x^1}\cdot\frac{\partial \phi^n}{\partial x^0} + \frac{\partial \overset{*}{\phi}_n}{\partial x^0}\cdot\frac{\partial \phi^n}{\partial x^1}\Big)dV_0 - \int\Big(\phi_n\frac{\partial\phi^n}{\partial x^0} + \frac{\partial \overset{*}{\phi}_n}{\partial x^0}\phi^n\Big)dx^2dx^3\Big|_{x^1=-\infty}^{x^1=\infty} - 2\int\frac{\partial \overset{*}{\phi}_n}{\partial x^1}\cdot\frac{\partial \phi^n}{\partial x^1}dV_1 + \int\Big(\overset{*}{\phi}_n\frac{\partial^2\phi^n}{\partial x^{0\,2}} + \frac{\partial^2\overset{*}{\phi}_n}{\partial x^{0\,2}}\phi_n - 2m^2\overset{*}{\phi}_n\phi^n\Big)dV_1\Big]. \qquad /2.9'/$$

После отбрасывания второго слагаемого и интегрирования по частям в последнем придем к следующему выражению:

$$\bar{P}^1 = \frac{m^2}{2}\Big[\int\Big(\frac{\partial \overset{*}{\phi}_n}{\partial x^1}\cdot\frac{\partial \phi^n}{\partial x^0} + \frac{\partial \overset{*}{\phi}_n}{\partial x^0}\,\frac{\partial \phi^n}{\partial x^1}\Big)dV_0 - 2\int\Big(\frac{\partial \overset{*}{\phi}_n}{\partial x^1}\,\frac{\partial \phi^n}{\partial x^1} + \frac{\partial \overset{*}{\phi}_n}{\partial x^0}\cdot\frac{\partial \phi^n}{\partial x^0} + m^2\overset{*}{\phi}_n\phi^n\Big)dV_1\Big], \qquad /2.9''/$$

которое может быть переписано в известном виде

$$\bar{P}^1 = \int T^{ik}\,dV_k, \qquad /2.11/$$

где T^{ik} - тензор энергии-импульса. Аналогичным образом действуя оператором энергии $i\partial/\partial x^0$, получим вместо /2.11/ выражение для /средней/ энергии. Чтобы перейти к импульсному пространству, снова воспользуемся формулой /2.4/. В результате для 4-импульса $\bar{P}^i$ получим выражение

$$\bar{P}^i = \int\frac{d\vec{k}\,K\,k}{m^4 K^0}\,k^i\,\overset{*}{a}_n(\vec{k})\,a^n(\vec{k}). \qquad /2.12/$$

Собственные функции оператора импульса /2.8/ в координатном представлении - плоские волны

$$\phi^n(x) = \frac{b^n}{(2\pi)^{3/2}} e^{-iKx} . \qquad /2.13/$$

Подставляя /2.13/ в /2.9/ /при условии $\overset{*}{b}_n b^n = 1$ / действительно найдем, что

$$P^1 = k^1 \delta(\vec{k} - \vec{k}') . \qquad /2.14/$$

В импульсном пространстве собственные функции $a^n(\vec{k})$ суть δ-функции. Подставляя в формулу /2.12/

$$\overset{*}{a}_n(\vec{k}) = b_n \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \qquad a^n(\vec{k}) = b^n \delta(\vec{k} - \vec{k}''), \qquad /2.15/$$

получим выражение

$$\bar{P}^1 = k^{1'}(k^{0'}/K^0)\delta(\vec{k}' - \vec{k}''), \qquad /2.14'/$$

совпадающее по сути дела с /2.14/ при условии $\vec{k}'' = \vec{K}$.

2.3. Оператор координаты. Опираясь на формулу /2.2/, определим среднее значение пространственной координаты x^1 с помощью следующего выражения

$$\bar{x}^1 = \int x^1 J^k dV_k =$$

$$= \frac{im^2}{2}\left[\int x \left(\overset{*}{\phi}_n \frac{\partial\phi^n}{\partial x^0} - \frac{\partial\overset{*}{\phi}_n}{\partial x^0}\phi^n\right) dV_0 - \int x^1 \left(\overset{*}{\phi}_n \frac{\partial\phi^n}{\partial x^1} - \frac{\partial\overset{*}{\phi}_n}{\partial x^1}\phi\right) dV_1\right]. \qquad /2.16/$$

Переходя к импульсному представлению, найдем

$$\bar{x}^1 = \int \frac{d\vec{k}}{m^3 K^0} k^0 \frac{1}{2i}\left[\overset{*}{a}_n(\vec{k}) \frac{\partial a^n(\vec{k})}{\partial k^1} - a^n(\vec{k}) \frac{\partial \overset{*}{a}_n(\vec{k})}{\partial k^1}\right]. \qquad /2.17/$$

Наличие множителя k^0 в последнем выражении делает невозможным использование в качестве оператора координаты $\hat{x}^1$ известной нерелятивистской формулы. Указанный релятивистский оператор будет иметь вид

$$\hat{x}^1 = -i\frac{\partial}{\partial k^1} - \frac{1}{2}\frac{ik^1}{k^{0\,2}} . \qquad /2.18/$$

Он отличается от известного оператора Вигнера-Ньютона [2] /при $K^1 = 0$ / знаком второго члена. Собственные волновые функции $\hat{x}^1$ в импульсном пространстве отличаются от плоских волн и имеют вид

$$a^n(\vec{k}) = b^n \left(\frac{K^0}{k^0}\right)^{1/2} e^{ikx} \quad . \qquad /2.19/$$

Подставляя /2.19/ в /2.17/, получим

$$\bar{x}^1 = x^1 \delta(\vec{x} - \vec{x}') . \qquad /2.20/$$

В координатном представлении для собственных функций оператора координаты будем иметь

$$\phi^n(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\vec{k} K k}{m^4 k^0} b^n \left(\frac{K^0}{k^0}\right)^{1/2} e^{ikx} \quad . \qquad /2.21/$$

Нетрудно видеть, что в K^0-системе $\phi^n(x)$ будут совпадать с известными локализованными функциями [2], т.е. определяться функциями Ханкеля первого рода порядка 5/4. Отличие $\phi^n(x)$ от δ-функции нельзя считать чисто релятивистским эффектом. Строго говоря, и в нерелятивистском случае мы будем иметь подобный результат, если введем ограничения на пределы интегрирования по k^α $(k^\alpha \ll m)$ в формуле для $\delta(\vec{x})$.

2.4. <u>Полевые величины в импульсном представлении</u>. Произведем разбиение волновой функции на положительно- и отрицательно-частотные части. Перейдем далее к импульсному представлению на основе выражений

$$\phi_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\vec{k} K k}{m^4 k^0} [a_n^+(\vec{k}) e^{-ikx} + \overset{*}{a}{}_n^-(\vec{k}) e^{ikx}],$$

$$\overset{*}{\phi}_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\vec{k} K k}{m^4 k^0} [\overset{*}{a}{}_n^+(\vec{k}) e^{ikx} + a_n^-(\vec{k}) e^{-ikx}]. \qquad /2.22/$$

В результате для заряда поля $(Q = eW)$ и 4-импульса P^i получим

$$Q = e \int \frac{d\vec{k} K k}{m^4 K^0} [\overset{*}{a}{}_n^+(\vec{k}) a^{+n}(\vec{k}) - \overset{*}{a}{}_n^-(\vec{k}) a^{-n}(\vec{k})] , \qquad /2.23/$$

$$P^i = \int \frac{d\vec{k} K k}{m^4 K^0} k^i [\overset{*}{a}{}_n^+(\vec{k}) a^{+n}(\vec{k}) + \overset{*}{a}{}_n^-(\vec{k}) a^{-n}(\vec{k})] .$$

Здесь $\overset{*}{a}{}^+$ (a^-) трактуется как оператор рождения частицы с 4-импульсом k^i и зарядом $+1$ (-1), а операторы a^+ и $\overset{*}{a}{}^-$ - как соответствующие операторы уничтожения*. Что касается тензора спинового момента

$$S_{\ell m} = \int S^{i}_{\ell m} dV_i \ , \qquad /2.24/$$

где

$$S_{\ell m} = \overset{*}{\phi}_m \frac{\partial\phi_\ell}{\partial x_i} + \frac{\partial\overset{*}{\phi}_\ell}{\partial x_i}\phi_m - \overset{*}{\phi}_\ell \frac{\partial\phi_m}{\partial x_i} - \frac{\partial\overset{*}{\phi}_m}{\partial x_i}\phi_\ell \ - \qquad /2.25/$$

тензор плотности спинового момента, то после перехода к импульсному представлению для $S_{\ell m}$ найдем

$$S_{\ell m} = i\int \frac{d\vec{k}Kk}{m^4K^0}[\overset{*}{a}{}^+_\ell(\vec{k})\, a^+_m(\vec{k}) - \overset{*}{a}{}^+_m(\vec{k})\, a^+_\ell(\vec{k}) - a^-_\ell(\vec{k})\,\overset{*}{a}{}^-_m(\vec{k}) + a^-_m(\vec{k})\,\overset{*}{a}{}^-_\ell(\vec{k})].$$

/2.26/

3. ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1/2

3.1. Релятивистское выражение для вероятности. Возьмем формулу для 4-вектора плотности тока вероятности частиц со спином 1/2, описываемых спинорной волновой функцией ψ

$$J^k = m^3\bar{\psi}(x)\gamma^k\psi(x), \qquad /3.1/$$

где $\bar{\psi} = \overset{*}{\psi}\gamma^0$, а матрицы γ^k выбраны в виде

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

/3.2/

Опираясь на /3.1/, в специальной K-системе для полной вероятности W будем иметь

$$W = \int J^k dV_k = m^3(\int\bar{\psi}\gamma^0\psi dV_0 + \int\bar{\psi}\gamma^1\psi\, dV_1). \qquad /3.3/$$

Ограничиваясь только решениями с положительной энергией

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d\vec{k}Kk}{m^4K^0}\sum_s a_s(\vec{k})\, u^s(\vec{k})\, e^{-ikx} \ , \qquad /3.4/$$

---

*Предыдущие результаты могут быть фактически отнесены и к бесспиновым частицам, поскольку переход к ним связан формально с опусканием индекса "n" во всех предшествующих выражениях. Таким образом, наши прежние выводы изменяются.

перейдем к импульсному представлению. С учетом соотношений *

$$\overset{*}{u}_s u_{s'} = \delta_{ss'} \frac{K^0}{m}, \quad \overset{*}{u}_s \gamma^0 \gamma^\alpha u_{s'} = \delta_{ss'} \frac{K^\alpha}{m} \qquad /3.5/$$

и формул /2.5/ и /2.6/ для вероятности W в импульсном пространстве получим следующее выражение:

$$W = \int \frac{d\vec{k}Kk}{m^4 K^0} \sum_s \overset{*}{a}_s(\vec{k}) a_s(\vec{k}). \qquad /3.6/$$

3.2. Оператор импульса. Подействуем оператором x^1 -компоненты импульса

$$\hat{p}^1 = -i \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\overset{*}{\hat{p}}{}^1 = i \frac{\partial}{\partial x^1} \right) \qquad /3.7/$$

на волновую функцию $\psi(\overset{*}{\psi})$ в подынтегральных выражениях/3.3/. В результате получим

$$\bar{P}^1 = \frac{im^3}{2} \left[\int \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^1} \gamma^0 \psi - \bar{\psi} \gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial x^1} \right) dV_0 + \right. \qquad /3.8/$$
$$\left. + \int \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^1} \gamma^1 \psi - \bar{\psi} \gamma^1 \frac{\partial \psi}{\partial x^1} \right) dV_1 \right].$$

Здесь под интегралами стоят соответственно компоненты T^{10} и T^{00} тензора энергии-импульса частиц со спином 1/2. Аналогичным образом действуя оператором энергии $i\partial/\partial x^0$, получим вместо /3.8/ выражение для /средней/ энергии.

Чтобы перейти к импульсному представлению, снова воспользуемся формулой /3.4/. В результате с учетом /3.5/ для 4-импульса получим

$$\bar{P}^i = \int \frac{d\vec{k}Kk}{m^4 K^0} k^i \sum_s \overset{*}{a}_s(\vec{k}) a_s(\vec{k}). \qquad /3.9/$$

Собственные функции оператора импульса в координатном представлении - плоские волны

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s u_s e^{-ikx} \quad . \qquad /3.10/$$

Подставляя /3.10/ в /3.8/ и принимая во внимание /2.3/, /2.5/, /2.6/ и /3.5/, действительно найдем, что

---

*Здесь мы полагаем фактически, что спиноры u_s являются функциями U^i 4-скорости движения K-системы относительно K^0. В случае $u_s \equiv u_s(\vec{k})$ будем иметь результаты, аналоничные /в смысле зависимости от Kk / предыдущим.

$$\bar{P}^1 = k^1\, \delta(\vec{k} - \vec{k}'),\qquad /3.11/$$

В импульсном пространстве собственные функции оператора импульса суть релятивистские δ-функции. Подставляя в /3.9/

$$\overset{*}{a}_s(\vec{k}) = \overset{*}{a}_s\, \delta(\vec{k}-\vec{k}'),\ a_s(\vec{k}) = a_s\, \delta(\vec{k}-\vec{k}'',\ (\overset{*}{a}_s a_{s'} = \delta_{ss'}),\qquad /3.12/$$

в соответствии с /3.11/ получим

$$\bar{P}^1 = k^{1\prime}\, \delta(k' - k'').\qquad /3.13/$$

3.3. <u>Оператор координаты</u>. По аналогии с /2.16/ определим среднее значение пространственной координаты x^1 с помощью следующего выражения

$$\bar{x}^1 = \int x^1 \bar{\psi} \gamma^0 \psi\, dV_0 + \int x^1 \bar{\psi} \gamma^1 \psi\, dV_1 .\qquad /3.14/$$

В результате перехода к импульсному представлению найдем

$$\bar{x}^1 = \int \frac{d\vec{k}}{m^3} \sum_s \overset{*}{a}_s(k)\, \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial a_s(\vec{k})}{\partial k^1} .\qquad /3.15/$$

Легко видеть, что последнее выражение может быть получено на основе формулы /3.6/ для полной вероятности, если в качестве оператора координаты использовать обычный нерелятивистский оператор $-i\partial/\partial k^1$. Собственные волновые функции $\hat{\vec{x}}$ в импульсном пространстве - плоские волны

$$\psi(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s a_s e^{-ikx} .\qquad /3.16/$$

Подставляя /3.16/ в /3.15/, придем к требуемому выражению /2.20/. В координатном представлении для собственных функций оператора координаты будем иметь

$$\psi(x) = \sum_s u_s\, \delta(\vec{x} - \vec{x}') .\qquad /3.17/$$

Подставляя /3.17/ в /3.14/ и учитывая /3.5/, снова придем к /2.20/.

Вычислим теперь релятивистски ковариантную величину $d\bar{x}^1/d\tau$, описывающую изменение $\bar{x}^1$ в зависимости от собственного времени τ /вдоль элемента мировой трубки/. С учетом того, что выбор элемента объема соответствует нормальному сечению мировой трубки, в частности,будем иметь

$$\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial \tau} = u^0 \int x^1 \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^0}\gamma^0\psi + \bar{\psi}\gamma^0\frac{\partial \psi}{\partial x^0}\right) dV_0 + $$
$$+ u^1 \int J^1 dV_1 + u^1 \int x^1 \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^1}\gamma^1\psi + \bar{\psi}\gamma^1\frac{\partial \psi}{\partial x^1}\right) dV_1 , \qquad /3.18/$$

где $u^i = dx^i/d\tau$ - 4-скорость.

Воспользовавшись уравнением Дирака

$$(i\gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} - m)\psi(x) = 0 \qquad /3.19/$$

и комплексно сопряженным ему уравнением и проведя интегрирование по частям в первом и третьем интегралах /3.18/, получим, с учетом обращения в нуль последнего интеграла, что

$$\frac{d\bar{x}^1}{d\tau} = u^0 \int J^1 dV_0 + u^1 \int J^1 dV_1 . \qquad /3.18'/$$

При этом величина $\int J^1 dV_0$ может в каком-то смысле трактоваться как среднее значение скорости $\bar{v}_x$. Однако это отнюдь не означает, что, например, величина $\gamma^0\gamma^1$ может рассматриваться как оператор скорости. Дело в том, что введение понятия оператора исторически неразрывно связано с нерелятивистским пределом квантовой механики, когда плотность вероятности и элемент пространственного объема являются фактически скалярами. В этом случае инвариантная величина - вероятность - определяется выражением

$$W = \int \overset{*}{\psi}\psi\, dV_0 . \qquad /3.20/$$

Поэтому процедуру вычисления среднего значения некоторой величины $\bar{f}$ можно рассматривать как результат воздействия оператора $\hat{f}$ в /3.20/

$$\bar{f} = \int \overset{*}{\psi}\hat{f}\psi\, dV_0 . \qquad /3.21/$$

С другой стороны, если убрать оператор под интегралом в /3.21/, то мы, очевидно, вернемся к формуле для вероятности /3.20/. Однако, если аналогичным образом убрать оператор $\gamma^0\gamma^1$ под интегралом $\int J^1 dV_0$, то мы отнюдь не придем к требуемому выражению /3.3/, содержащему также член $\int J^1 dV_1$. С учетом сказанного величину $\alpha_x = \gamma^0\gamma^1$ нельзя считать оператором скорости дираковских частиц. Таким образом устраняется известная трудность, выражающаяся в том, что собственные значения компоненты отмеченного оператора скорости частиц со спином 1/2 по абсолютной величине всегда равны скорости света.

3.4. Полевые величины в импульсном представлении. Включим в наше рассмотрение решения с отрицательной энергией, т.е. произведем разбиение волновой функции на положительно- и отрицательно-частотные части. Перейдем далее к импульсному представлению на основе выражений

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\vec{k}Kk}{m^4 k^0} [\sum_s a_s^+(\vec{k}) u^{+,s}(\vec{k}) e^{-ikx} + \overset{*}{a}_s^-(\vec{k}) u^{-,s}(\vec{k}) e^{ikx}],$$

$$\overset{*}{\psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\vec{k}Kk}{m^4 k^0} [\sum_s \overset{*}{a}^+(\vec{k}) \bar{u}^{+,s}(\vec{k}) \gamma^0 e^{ikx} + a^-(\vec{k}) \bar{u}^{-,s}(\vec{k}) \gamma^0 e^{-ikx}]. \qquad /3.22/$$

В результате для заряда поля $(Q = eW)$ и 4-импульса P^i получим

$$Q = e \int \frac{d\vec{k}Kk}{m^4 K^0} \sum_s [\overset{*}{a}_s^+(\vec{k}) a_s^+(\vec{k}) + a_s^-(\vec{k}) \overset{*}{a}_s^-(\vec{k})]. \qquad /3.23/$$

$$P^i = \int \frac{d\vec{k}Kk}{m^4 K^0} k^i \sum_s [\overset{*}{a}_s^+(\vec{k}) a_s^+(\vec{k}) - a_s^-(\vec{k}) a_s^-(\vec{k})]. \qquad /3.24/$$

При этом нормированные спиноры были выбраны в виде

$$\begin{aligned}
u^{+,1} &= N[K^3/(K^0+m),\ K^+/(K^0+m),\ 1,\ 0],\\
u^{+,2} &= N[K^-/(K^0+m),\ -K^3/(K^0+m),\ 0,\ 1],\\
u^{-,1} &= N[1,\ 0,\ K^3/(K^0+m),\ K^+/(K^0+m)],\\
u^{-,2} &= N[0,\ 1,\ K^-/(K^0+m),\ -K^3/(K^0+m)],
\end{aligned} \qquad /3.25/$$

где $N = (K^0+m)^{1/2}(2m)^{-1/2}$, $K^{\pm} = K^1 \pm iK^2$, а в рассматриваемом специальном случае $K^2 = K^3 = 0$. Напомним, что, например, на основе /3.24/ $\overset{*}{a}_s^+$ трактуется как оператор рождения частицы с положительной энергией k^0 и импульсом $\vec{k}$, a_s^- – оператор рождения частицы с отрицательной энергией $-k^0$ и импульсом $\vec{k}$. a_s^+ и $\overset{*}{a}_s^-$ трактуются как соответствующие операторы уничтожения.

Что касается тензора спинового момента

$$S^{\ell m} = \int S^{\ell m, k} dV_k. \qquad /3.26/$$

где

$$S^{\ell m,k} = \bar{\psi}(x)(\gamma^k \sigma^{\ell m} + \sigma^{\ell m}\gamma^k)\psi(x) \qquad /3.27/$$

- тензор плотности спинового момента, а σ - так называемый матричный тензор спина

$$\sigma^{\ell m} = \frac{i}{2}(\gamma^\ell \gamma^m - \gamma^m \gamma^\ell), \qquad /3.28/$$

то после перехода к импульсному представлению, например, для компоненты S^{23}, найдем

$$S^{23} = -\frac{1}{2}\int \frac{d\vec{k}Kk}{m^4K^0}[\overset{*}{a}{}_1^+(\vec{k})a_2^+(\vec{k}) + \overset{*}{a}{}_2^+(\vec{k})a_1^+(\vec{k}) + a_1^-(\vec{k})\overset{*}{a}{}_2^-(\vec{k}) + a_2^-(\vec{k})\overset{*}{a}{}_1^-(\vec{k})]. \qquad /3.29/$$

Здесь необходимо подчеркнуть, что именно предположение о зависимости спиноров от K, а не от k, приводит к совпадению формул /3.23/ и /3.29/ с соответствующими общеизвестными выражениями. В противном случае появляются дополнительные члены, зависящие от k. Отметим также, что использование /2.5/ приводит к устранению экспоненциального множителя, описывающего "дрожание", в выражении для плотности тока /см., например, [3] /.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше при релятивистском описании векторных частиц и частиц со спином 1/2 мы исходили из выражений для полной вероятности и среднего 4-импульса, которые отличались от обычно используемых выражений тем, что в них члены, учитывающие относительность одновременности, не равны нулю. На основе введенного релятивистски инвариантного представления для трехмерного интеграла Фурье были получены соответствующие выражения в импульсном пространстве, отличные от общеизвестных. При этом релятивистский оператор координаты для бозонов отличается от оператора Вигнера-Ньютона, но собственные волновые функции в координатном пространстве оказываются одинаковыми. Для частиц со спином 1/2 он имеет вид соответствующего нерелятивистского оператора, а его собственные функции в координатном и импульсном представлениях суть релятивистски инвариантная трехмерная δ-функция и плоская волна соответственно. На основе рассмотрения ковариантной формулы для первой производной по /собственному/ времени от средней координаты $\bar{x}^1$ была устранена известная трудность, возникающая при введении оператора скорости для частиц со спином 1/2.

Автор благодарит Г.Н.Афанасьева за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Релятивистски инвариантный интеграл Фурье. δ-функция

Рассмотрим интеграл Фурье

$$\phi(x^1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk^1 \int_{-\infty}^{\infty}\phi(\chi^1)\, e^{ik^1(\chi^1-x^1)} d\chi^1 . \qquad /П.1/$$

В рамках теории относительности стоящие под интегралом величины dk^1, $d\chi^1$ и показатель экспоненты преобразуются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Поэтому встает вопрос о релятивистски инвариантной формулировке теоремы Фурье. Оказывается, что это можно сделать, если в некоторой системе отсчета (K^0) все координатные векторы $\overset{0}{x}{}^i$ будут удовлетворять требованию $\overset{0}{x}_{(0)} = 0$ /в частности, $d\overset{0}{x}_{(0)} = 0$ /. Тогда релятивистски инвариантное выражение в K^0 будет тождественно /П.1/, а в произвольной системе отсчета K будет в общем случае иметь вид

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} dv^{inv} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\vec{\chi})\, e^{ik(\chi-x)} dV^{inv} , \qquad /П.2/$$

где

$$dv^{inv} = dv_i U^i = dvU, \; dV^{inv} = dV_i U^i . \qquad /П.3/$$

С учетом того, что в частном случае /1+1/-пространства

$$dv_0 \equiv d\vec{k} = dk^1 , \quad dv_1 = - dk^0 ,$$

$$dV_0 \equiv d\vec{\chi} = d\chi^1 , \quad dV_1 = - d\chi^0 \qquad /П.4/$$

и принимая во внимание равенства

$$k^0 = (m^2 + k^{1^3})^{1/2} , \quad \chi^1 = \frac{U^1}{U^0}\chi^0 , \qquad /П.5/$$

легко найдем

$$\phi(x^1) = \frac{1}{2n}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^1}{k^0} kU \int_{-\infty}^{\infty}\phi(\chi^1)\, e^{ik(\chi-x)} \frac{d\chi^1}{U^0} . \qquad /П.2'/$$

В соответствии с обычным определением трансформанты Фурье будем полагать

$$a(k^1) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\chi^1)\, e^{ik\chi} \frac{d\chi^1}{U^0} . \qquad /П.6/$$

При этом для релятивистски инвариантного преобразования Фурье будем иметь

$$\phi(\chi^1) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^1}{k^0} k U e^{-ikx} \quad a(k^1) . \qquad /П.7/$$

На основании /П.2'/ легко ввести релятивистски инвариантную δ-функцию. Она будет иметь вид

$$\delta(\chi^1 - x^1) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^1}{k^0} kU e^{i(\chi - x)k} . \qquad /П.8/$$

С учетом /П.8/ выражение /П.2'/ может быть переписано в форме

$$\phi(x^1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\chi^1}{U^0} \phi(\chi^1) \delta(\chi^1 - x^1) . \qquad /П.9/$$

Для релятивистски инвариантного обращенного интеграла Фурье будем иметь

$$a(k^1) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx^1}{U^0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a(\kappa^1) e^{ix(\kappa - k)} \frac{d\kappa^1}{\kappa^0} \kappa U, \qquad /П.10/$$

а соответствующие /П.8/ и /П.9/ формулы в импульсном пространстве приведены в тексте, где мы также перешли к общему случаю /1+3/ измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрельцов В.Н. ОИЯИ, Р2-12395, Дубна, 1979.
2. Newton T.D., Wigner E.P. Rev.Mod.Phys., 1949, 21, p.400. /Пер. с англ.: Вигнер Е. Этюды о симметрии, "Мир", М., 1971, с.277/.
3. Бьеркен Дж.Д., Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория. "Наука", М., 1978, т.1, §11.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 декабря 1980 года.