объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-80-823

А.А.Леонович, А.Б.Пестов

О ПОЛЯХ ТИПА ЯНГА-МИЛЛСА В ТЕОРИИ ТЕНЗОРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Направлено в "ДАН БССР".

1980

В работе[1] рассмотрено уравнение для 16-компонентной комплексной волновой функции. Установлено, что группой внутренней симметрии теории является 16-параметрическая группа $D=SO(4,2)\times U(1)$. Преобразования D-группы не могут быть индуцированы какими-либо преобразованиями пространственно-временных координат. Генераторы этой группы, в отличие от обычно рассматриваемых групп внутренней симметрии, преобразуются по тензорным представлениям группы Лоренца. Соответствующие сохраняющиеся нетеровские токи являются тензорными токами. Локализация параметров D-группы приводит к рассмотрению калибровочных тензорных полей со структурой, аналогичной структуре калибровочных полей, возникающих при локализации конформной группы. Со сходным положением мы встречаемся в теории тензорного волнового уравнения.

Тензорное волновое уравнение определяется инвариантными дифференциальными операторами внешнего дифференцирования и обобщенной дивергенции [2-5]. Волновая функция есть неоднородная дифференциальная форма[2] /сумма однородных дифференциальных форм/ $F=\sum_{p=0}^{4}\oplus F_p$. По отношению к группе Лоренца поле F преобразуется как прямое произведение двух дираковских спиноров. Техника исследования внешних дифференциальных форм хорошо развита. На ее основе показано[6], что поле F можно подчинить двум релятивистским уравнениям первого порядка.

Рассмотрим лагранжиан

$$\mathcal{L}_0=\frac{1}{2}(F,\delta F+dF)+\frac{1}{2}(\delta F+dF,F)+m(F,F), \qquad /1/$$

который приводит к уравнению движения

$$(\delta+d)F=-mF, \quad (\hbar=c=1). \qquad /2/$$

Мы используем обозначения работ[6,7] и поэтому не будем подробно останавливаться на определениях и разъяснениях, которые там даны. Положим, по определению,

$$(F,H)=\sum_{p=0}^{4}\bar{f}_{a_1\ldots a_p}h^{a_1\ldots a_p},\quad (F,H)_\mu=\sum_{p=0}^{3}i(\bar{f}^{a_1\ldots a_p}h_{\mu a_1\ldots a_p}-\bar{f}_{\mu a_1\ldots a_p}h^{a_1\ldots a_p}),$$

где черта означает комплексное сопряжение.

С помощью оператора J $(JF = \sum_{p=0}^{4} (-1)^{\frac{p(p+1)}{4}} * F_p, J^2 = -1)$, коммутирующего с оператором $\delta + d$, введем проекционные операторы $\Pi_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm iJ)$ и образуем поля $\Psi = \Pi_+ F, \Phi = \Pi_- F$. Инвариантность лагранжиана $\mathfrak{L}_0$ относительно преобразований

$$F \to e^{i\alpha} F, \qquad F \to e^{iJ\beta} F \qquad /4/$$

приводит к выражениям для сохраняющихся токов

$$J^e_\mu = (F, F)_\mu = (\Psi, \Phi)_\mu + (\Phi, \Psi)_\mu, \quad J^{e'}_\mu = (F, JF)_\mu = i(\Psi, \Phi)_\mu - i(\Phi, \Psi)_\mu. \qquad /5/$$

Поле $\Psi = (\psi, \psi_\mu, \psi_{\mu\nu})$ подчиняется уравнениям /7/

$$\partial^\sigma \psi_\sigma = m\psi,$$

$$\partial_\mu \psi_\nu - \partial_\nu \psi_\mu - i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\alpha \psi^\beta = m\psi_{\nu\mu}, \qquad /6/$$

$$\partial^\sigma \psi_{\sigma\mu} - \partial_\mu \psi = m\psi_\mu,$$

где $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ - единичный антисимметричный псевдотензор с $\epsilon_{0123} = 1$. Метрика пространства Минковского определяется тензором

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+---).$$

Из уравнений /6/ и им комплексно сопряженных путем исключения m получим уравнение непрерывности

$$\partial^\nu \Pi_{\mu\nu}(\psi) = 0, \qquad /7/$$

где

$$\Pi_{\mu\nu}(\psi) = g_{\mu\nu}(\bar\psi\psi - \bar\psi_\alpha \psi^\alpha) + \psi_\mu \bar\psi_\nu + \bar\psi_\mu \psi_\nu - \bar\psi_{\mu\alpha} \psi^{\alpha}_{\nu\cdot} + $$
$$+ \psi \bar\psi_{\mu\nu} - i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \bar\psi^\alpha \psi^\beta -$$

- действительный тензорный ток, аналогичный векторному току вероятности в теории Дирака. Исходя из равенства /7/, нетрудно сформулировать интегральный закон сохранения. Отметим, что величина $\Pi_{00}(\psi)$ существенно положительна, поскольку

$$\Pi_{00}(\psi) = \bar\psi\psi + \sum_{a=0}^{3} (\bar\psi_a \psi_a + \bar\psi_{0a} \psi_{0a}).$$

Рассмотрим отображение $\Psi' = \Sigma\Psi$, задаваемое самодуальным бивектором $\Sigma_{\alpha\beta}$

$$\psi' = -\frac{1}{8} \Sigma_{\alpha\beta} \psi^{\alpha\beta}, \qquad /8/$$

$$\psi'_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \Sigma_{\mu\sigma} \psi^\sigma_{\cdot\nu} - \frac{1}{2} \Sigma_{\nu\sigma} \psi^\sigma_{\cdot\mu} + \Sigma_{\mu\nu} \psi\right), \quad \psi'_\mu = \frac{1}{2} \Sigma_{\mu\sigma} \psi^\sigma. \qquad /8/$$

Преобразование /8/ вектор переводит в вектор, а скаляр и самодуальный бивектор здесь выступают как единое целое. Бивекторы $\Sigma^{ij}_{\alpha\beta} = E^{ij}_{\alpha\beta} - i\tilde{E}^{ij}_{\alpha\beta}$, где $E^{ij}_{\alpha\beta} = \delta^i_\alpha \delta^j_\beta - \delta^i_\beta \delta^j_\alpha$ задают операторы $\Sigma^{ij} = -\Sigma^{ji}$, действующие в пространстве решений волнового уравнения. Латинские индексы i, j нумеруют бивекторы и пробегают значения 0,1, 2,3. Операторы Σ^{ij} удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям

$$[\Sigma_{ij}, \Sigma_{k\ell}] = \frac{1}{2} f_{ij}{}^{mn}{}_{k\ell} \Sigma_{mn} \qquad /9/$$

со структурными константами группы $SO(3,1)$. Операторы Σ_{ij} коммутируют с операторами сдвига P_i и не коммутируют с генераторами группы Лоренца $M_{k\ell}$:

$$[\Sigma_{ij}, M_{k\ell}] = \frac{1}{2} f_{ij}{}^{mn}{}_{k\ell} \Sigma_{mn}. \qquad /10/$$

Принципиально важно, что в рамках рассматриваемой схемы существование группы внутренней симметрии следует из однородности пространства-времени [8]. Таким образом, в рамках исследуемого волнового уравнения оказывается возможным включить внутренние симметрии в класс пространственно-временных симметрий.

Лагранжиан $\mathfrak{L}_0$ инвариантен относительно глобального преобразования

$$\Psi(x) \to \exp\left(\frac{1}{2} g \Sigma^{ab} \omega_{ab}\right) \Psi(x), \qquad \Phi(x) \to \exp\left(\frac{1}{2} g \bar\Sigma^{ab} \omega_{ab}\right) \Phi(x). \qquad /11/$$

Соответствующий сохраняющийся ток имеет вид

$$J^{ab}_\mu = (\Psi, \bar\Sigma^{ab} \Phi)_\mu + (\Phi, \Sigma^{ab} \Psi)_\mu. \qquad /12/$$

Взаимодействия, обусловленные сохраняющимися токами /5/, рассматривались в [7]. Здесь же рассмотрим кратко взаимодействие вида

$$\mathfrak{L}_{\text{вз.}} = \frac{1}{2} g A^{\ \mu}_{ab\cdot} J^{ab}_{\ \cdot\cdot\mu}, \qquad /13/$$

где $A^{ab}_{\cdot\cdot\mu} = -A^{ba}_{\cdot\cdot\mu}$ - действительное тензорное поле.

Волновое уравнение при наличии внешнего поля $A^{ab}_{\cdot\cdot\mu}$ получается заменой в /6/

$$\partial_\mu \to \nabla_\mu = \partial_\mu - \frac{1}{2} g A^{ab}_{\cdot\cdot\mu} \Sigma_{ab}. \qquad /14/$$

Имеет место следующее утверждение. Если $\psi, \psi_\mu, \psi_{\mu\nu}$ удовлетворяют уравнению /6/ с ковариантной производной /14/, и если $A^{0i}_{..\mu}=0$, то интеграл $\int\Pi_{00}(\psi)d^3x$ не зависит от времени.

Используя вытекающие из условий самодуальности соотношения, после громоздких преобразований получим, что на решениях уравнений движения выполняется важное соотношение

$$\partial^{\nu}\Pi_{\mu\nu}(\psi)=2gA_{\mu\sigma.}{}^{\nu}\Pi^{\sigma}_{.\nu}(\psi)\,, \qquad /15/$$

из которого следует искомый результат.

При выводе уравнений второго порядка, которые мы не выписываем ввиду их громоздкости, появляется коммутатор

$$\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}-\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}=-\frac{1}{2}gF^{k\ell}_{..\mu\nu}\Sigma_{k\ell}\,, \qquad /16/$$

где $F^{k\ell}_{..\mu\nu}=\partial_{\mu}A^{k\ell}_{..\nu}-\partial_{\nu}A^{k\ell}_{..\mu}-\frac{1}{4}gf^{k\ell}_{ab\,..mn}A^{ab}_{..\mu}A^{mn}_{..\nu}$ – тензор поля $A^{k\ell}_{..\mu}$. При квадрировании системы /6/ с производной /14/ уравнения для полей ψ_{μ} и $\psi,\psi_{\mu\nu}$ разделяются. Изучение нелинейных уравнений, которым подчиняются поля $A^{ab}_{..\mu}$ - предмет наших дальнейших исследований.

В заключение авторы выражают благодарность участникам семинаров ЛТФ ОИЯИ и ИФАН БССР за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богуш А.А., Круглов С.И., Стражев В.И. ДАН БССР, 1978, 22, №10.
2. Ж. де Рам. Дифференцируемые многообразия, ИЛ, 1957.
3. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. "Наука", М.,1965.
4. Лихнерович А.Теория связностей в целом и группы голономии, ИЛ., 1960.
5. Уилер Д.А. Гравитация, нейтрино и Вселенная. ИЛ., 1962.
6. Пестов А.Б. ТМФ, 1978, 34, с. 48.
7. Пестов А.Б. ОИЯИ, Р2-11630, Дубна, 1978.
8. Pestov A.B. Abstracts of Contributed Papers GR9 Conference, Jena, 1980.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 декабря 1980 года.