сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-80-803

И.Л.Боголюбский, А.А.Боголюбская

СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ В СИСТЕМЕ БОЛЬШОГО ЧИСЛА НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ КВАРКОВ С ЛИНЕЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ ПОПАРНОГО ПРИТЯЖЕНИЯ

1980

1. Несмотря на значительный прогресс в разработке математического аппарата квантовой хромодинамики /КХД/, задача нахождения масс адронов пока не поддается решению без привлечения феноменологических моделей /различных моделей мешков, нерелятивистского потенциального подхода/. Нерелятивистское потенциальное моделирование спектра масс мезонов, составленных из тяжелых кварков, дало хорошие результаты при описании чармония /см. обзор [1] /. Выполнению подобного исследования для барионов препятствуют трудности, возникающие при решении квантовой задачи трех тел. В работе [2] для преодоления этих трудностей было предложено использовать $1/N$ -разложение КХД, впервые рассмотренное в статьях [3]. Как известно, $1/N$ -разложение оказалось очень полезным аппаратом для исследования задач теории поля [4] и, в частности, понимания принципиальных вопросов КХД. В последней оно соответствует рассмотрению большого числа $(N \to \infty)$ кварков и цветовой группы $SU^c(N)$. В работе [2] получено уравнение для нахождения в нерелятивистской потенциальной модели в рамках $1/N$ -разложения связанных состояний кварков одного "аромата" с кулоновским потенциалом попарного притяжения. Сферически-симметричные (ss) -решения этого уравнения, описывающие основное и возбужденные состояния, найдены в статье [5]. Нерелятивистское потенциальное моделирование барионов из "одинаковых" кварков в $1/N$ -разложении можно выполнить математически до конца и для более общего межкваркового потенциала - "вороночного" [1], $V(r) = -g^2 r^{-1}(1-\alpha^2 r^2)$. Такой потенциал моделирует конфайнмент /при $r \to \infty$ $V \to \infty$ /, соответствует при больших r постоянной /не зависящей от r / напряженности глюонного поля и порождает при $N = \infty$ поддающуюся исследованию интегро-дифференциальную задачу на собственные значения. Настоящая работа посвящена решению этой задачи в частном случае чисто линейного межкваркового потенциала $V(r) = g^2\alpha^2 r^2$.

2. Используя приближение Хартри и представляя координатную часть волновой функции N кварков одного "аромата" в факторизованном виде $\psi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N) = \prod_{i=1}^{N} \phi(\vec{x}_i)$, в случае межкваркового потенциала $V(r) = g^2\alpha^2 r^2$ получим для нахождения $\phi(\vec{x})$ и энергии связанного состояния ϵ, приходящейся на один кварк, интегро-дифференциальную задачу

$$\frac{-\nabla^2_{\vec{x}}\,\phi(\vec{x})}{2M} + g^2 a^2 \phi(\vec{x}) \int |\phi(\vec{y})|^2\, |\vec{x}-\vec{y}|\, d^3y = \epsilon\phi(\vec{x}), \qquad /1/$$

$$N[\phi] = 1, \qquad N[\phi] = \int |\phi(x)|^2\, d^3x\ .$$

Используем те же безразмерные переменные, что и в [5]:

$$\epsilon = 8\pi g^4 M \epsilon_d, \quad \phi = (8\pi g^2 M)^{3/2}\phi_d, \quad x = (8\pi g^2 M)^{-1} x_d, \qquad /2/$$

$$y = (8\pi g^2 M)^{-1} y_d\ .$$

Соответственно этому $a_d = a(8\pi g^2 M)^{-1}$. Условие нормировки при таком преобразовании не меняется. Задачу будем решать сначала при $a_d = 1$ /в дальнейшем мы укажем способ пересчета для $a_d \neq 1$/. Уравнение принимает вид /индекс d опускаем/

$$-4\pi\nabla^2\phi + \phi\int |\phi(\vec{y})|^2\, |\vec{x}-\vec{y}|\, d^3y = \epsilon\phi, \quad N[\phi] = 1\ . \qquad /3/$$

Нахождение связанных состояний, описывающихся несимметричными собственными функциями /СФ/, для нелинейной интегро-дифференциальной задачи на собственные значения /СЗ/ является очень трудной вычислительной задачей. Поэтому, как и в [5], ограничимся исследованием ss -решений; в соответствии с этим будем рассматривать только действительные $\phi(r)$.

Разделим уравнение /3/ на ϕ:

$$-4\pi\phi^{-1}\nabla^2\phi + \int\phi^2(y)\,|x-y|\, d^3y = \epsilon\ . \qquad /4/$$

Воздействуем на обе части уравнения /4/ оператором ∇^2. В силу соотношения $\nabla^2_x |x-y| = 2|x-y|^{-1}$ получим

$$-4\pi\nabla^2(\phi^{-1}\nabla^2\phi) + 2\int\phi^2(y)\,|x-y|^{-1}\, d^3y = 0\ . \qquad /5/$$

При этом, очевидно, СФ $\phi_n(r)$, $n = 1,2,3,\ldots$, задачи /3/ являются решением уравнения /4/. Сформулируем обратное утверждение.

Лемма 1

Ss -решения уравнения /5/ $\phi_n(r)$, такие, что $\phi_n(r) \to 0$ при $r \to \infty$ и $N[\phi_n] = 1$, являются СФ задачи /3/ вместе с СЗ:

$$\epsilon_n = -4\pi\phi_n^{-1}(r)\nabla^2\phi_n(r)\big|_{r=0} + \int\phi^2(|y|)\,|y|\, d^3y\ . \qquad /6/$$

Доказательство

Действительно, деление /3/ на $\phi(r)$, не равное тождественно нулю, является эквивалентным преобразованием. Далее, заметим, что, кроме уравнения /4/, в результате действия на них оператора ∇^2 в уравнение /5/ преобразуются также уравнения /и только такие уравнения/

$$-4\pi\phi^{-1}\nabla^2\phi + \int\phi^2(|y|)\,|x-y|\,d^3y = \epsilon + f(|x|), \qquad /4'/$$

где

$$\nabla^2 f = 0\,. \qquad /7/$$

Легко видеть, что в классе ss -функций $f(r)$ уравнение /7/ имеет решение только вида $f=C$ / C - произвольная постоянная/. Добавление $f=C$ в правую часть уравнения при переходе от /4/ к /4'/ соответствует замене в /3/ потенциала $V(x)=\int\phi^2(y)|x-y|d^3y$ на $V_C(x)=V(x)-C$. Это, очевидно, не приводит к изменению СФ $\phi_n(r)$, а только изменяет $\epsilon_n\to\epsilon_n-C$. Поэтому для нахождения СФ исходного уравнения /3/ можно решать уравнение /5/, а затем находить СЗ ϵ_n в исходном потенциале $V(x)$ из уравнения /3/, рассмотренного в любой точке x. Удобнее всего взять $x=0$, тогда получается формула /6/.

Для нахождения решений ϕ_n уравнения /5/ воздействуем на него оператором ∇^2, придем к дифференциальному уравнению 6-го порядка:

$$\nabla^2[\nabla^2(\phi^{-1}\nabla^2\phi)] + 2\phi^2 = 0\,. \qquad /8/$$

К виду /8/ преобразуются в результате действия оператора ∇^2 уравнения вида

$$-4\pi\nabla^2(\phi^{-1}\nabla^2\phi) + 2\int\phi^2(|y|)\,|x-y|^{-1}\,d^3y = C \qquad /5'/$$

/ C - произвольная постоянная/ и только такие уравнения. Это утверждение, как и в лемме 1, следует из того факта, что все ss -решения /7/ имеют вид $f=C$. Поэтому из всех решений /8/ надо выбрать те, которые соответствуют значению $C=0$ в /5'/, т.е. уравнению /5/. Отбирать решения уравнения /8/ по этому признаку удобнее всего в точке $x=0$, где /5/ можно переписать в виде

$$\delta[\phi] = 2\pi\nabla^2(\phi^{-1}\nabla^2\phi)|_{r=0}\cdot\left(\int\phi^2(|y|)\,|y|^{-1}\,d^3y\right)^{-1} - 1 = 0\,. \qquad /9/$$

Итак, мы доказали, что справедлива

Лемма 2

Решения $\phi_n(r)$ уравнения /8/, такие, что $\phi_n(r) \to 0$ при $r \to \infty$ и $\delta[\phi_n] = 0$, являются решениями /5/.

Обратное утверждение очевидно.

На основании лемм 1 и 2 формулируется

Теорема

Вs - решения уравнения /8/ $\phi_n(r)$, такие, что $\phi_n(r) \to 0$ при $r \to \infty$, $\delta[\phi_n]=0$ и $N[\phi_n]=1$, являются СФ задачи /3/ вместе с СЗ ϵ_n, задаваемыми формулой /6/.

Укажем важное для дальнейшего свойство решений уравнения /8/: если $\phi(r)$ - решение /8/, то $\phi_b(r) = b^3\phi(br)$ - также решение /8/. Это свойство, легко проверяемое, позволяет получать нормированные решения $\phi(r)$ из ненормированных $\eta(r)$ по формуле

$$\varphi(r) = N^{-1}[\eta]\cdot \eta(rN^{-1/3}[\eta]) . \qquad /10/$$

Нетрудно убедиться, что соотношение /9/ инвариантно относительно преобразований /10/, и поэтому /9/ можно проверять, не переходя к нормированным решениям $\phi(r)$.

3. Для решения уравнения /8/ нужно задать 6 дополнительных условий. Три из них очевидны: 1/ $\phi(r) \to 0$ при $r \to \infty$; 2/ $\delta[\phi] = 0$ и 3/ $N[\phi] = 1$. Есть еще три условия: 4/ $\phi'_r(0)=0$; 5/ $\phi^{(3)}_{r^3}(0)=0$ и 6/ $\phi^{(5)}_{r^5}(0) = 0$, - они получаются в результате разложения $\phi(r)$ в ряд Тейлора в окрестности $r = 0$ и подстановки этого ряда в уравнение /8/. Итак, ряд Тейлора для $\phi(r)$ при $r \to 0$ содержит только члены четных степеней по r:

$$\phi(r) = a_0 + a_2 r^2 + a_4 r^4 + a_6 r^6 + \dots , \qquad /11/$$

причем, используя /8/, находим

$$a_6 = a_0 (26a_2 a_4 a_0^{-2} - 6a_2^3 a_0^{-3} - 2a_0^2 / 120) / 42. \qquad /12/$$

Таким образом, имеются три свободных параметра "стрельбы": a_0, a_2 и a_4; число их совпадает с числом условий /1/-/3/, выполнения которых нужно добиться. Стратегия поиска такова: сначала ищем численно ненормированные решения, задавая $a_2 = -1$. Для этого фиксируем a_4 и выбором a_0 добиваемся выполнения условия 1. Потом изменяем a_4 и снова подбираем a_0. Выбирая таким образом a_4, добиваемся выполнения условия 2. В резуль-

Таблица 1

Параметры ненормированных решений $\eta(r)$ задачи /3/

n	a_4	a_0	$N[\eta]$	$R_{ch}[\eta]$
1	0,242	2,2352	35,20	4,4
2	0,2255	1,5668	24,89	6,0
3	0,248	1,3058	20,76	7,5
4	0,272	1,15328	18,49	9,5
5	0,295	1,04715	16,67	11,0
6	0,315	0,9725	15,56	12,5
7	0,335	0,90958	14,51	14,0
8	0,353	0,86023	13,75	15,5
9	0,370	0,818724	13,03	17,0

Таблица 2

Параметры нормированных решений задачи /3/

n	a	$-10^2 a_2$	$10^4 \cdot a_4$	$r_{ch}[\phi]$	ϵ
1	0,0634	0,265	0,5953	14,5	7,21
2	0,0630	0,471	1,247	17,5	12,70
3	0,0629	0,638	2,093	20,5	17,15
4	0,624	0,773	3,019	25	21,11
5	0,0627	0,919	4,160	28	24,72
6	0,0626	1,03	5,198	31	28,01
7	0,0627	1,16	6,533	34	31,24
8	0,0626	1,26	7,801	37	34,31
9	0,0628	1,39	9,25	40	37,20

тате оказываются выполненными условия 1 и 2. После этого уже легко удовлетворить 3, применяя преобразование /10/.

Используя /11/, /12/, мы начинаем численное решение при $r \to 0$, а далее решаем по схеме 2-го порядка точности уравнение

$$\frac{d^2}{dr^2}\left[\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{r}{u}\frac{d^2 u}{dr^2}\right)\right] + \frac{2u^2}{r} = 0, \qquad u = \phi r, \tag{/13/}$$

которое является удобной для численного исследования формой записи уравнения /8/.

В численных экспериментах использовались следующие выражения для величины δ:

$$\delta = 6(10a_4 a_0^{-1} - 3a_2^2 a_0^{-2})\left(\int_0^\infty \phi^2(r) r\, dr\right)^{-1} - 1, \tag{/9'/}$$

и нахождения ϵ по ненормированному решению $\phi(r)$:

$$\epsilon = 4\pi N^{-2/3}[\phi]\left(-6a_2 a_0^{-1} + \int_0^\infty \phi^2(r) r^3 dr\right). \tag{/6'/}$$

Естественно предположить еще до численного решения задачи, что уравнение /8/ вместе с задачей /3/ имеет не единственное, а, по-видимому, счетное число ss нормированных решений $\phi_n(r)$. Действительно, достаточно заметить, что уравнение /8/ нелинейно.

Это предположение было подтверждено расчетами на ЭВМ. В силу необходимости вести "стрельбу" по двум параметрам: a_4 и a_0 /при фиксированном $a_2 = -1$ /, задача потребовала проведения существенно большего числа "пристрелок" для получения каждого решения $(\phi_n(r), \epsilon_n)$, чем аналогичная задача с нелокальным кулоновским потенциалом. Параметры решений с меньшими номерами эффективно использовались с помощью экстраполяции при поиске решений с большими номерами. Расчеты были выполнены для первых 9 уровней, параметры полученных ненормированных решений сведены в табл.1 / $R_{ch}[\eta_n]$ – характерный радиус решения $\eta_n(r)$ /.

Используя данные табл.1 и следующие из формулы /10/ соотношения:

$$\phi(0) = \eta(0) N^{-1}[\eta], \tag{/14/}$$

$$\phi''(0) = \eta''(0) N^{-5/3}[\eta], \tag{/15/}$$

$$\phi^{(4)}(0) = \eta^{(4)}(0) N^{-7/3}[\eta], \tag{/16/}$$

$$r_{ch}[\phi] = R_{ch}[\eta] N^{1/3}[\eta], \tag{/17/}$$

найдем параметры нормированных решений $\phi_n(r)$: a_0, a_2, a_4 и $r_{ch}[\phi_n]$; СЗ ϵ_n вычисляем по формуле /6/. Полученные значения

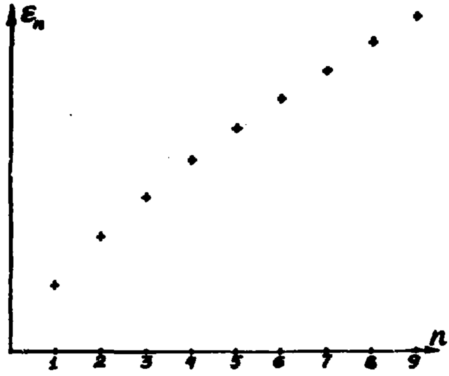

Рис.1. Зависимость собственных значений ϵ_n от номера уровня n.

представлены в табл.2 и на рис.1. Первые 4 собственные функции изображены на рис.2.

Анализ этих результатов служит подтверждением предположения о том, что число связанных состояний в рассматриваемой задаче счетно; более того, как и в работе[5], в случае нелинейного уравнения с нелокальным потенциалом не обнаружено нарушения осцилляционной теоремы: СФ с бо́льшим числом узлов соответствует бо́льшее СЗ.

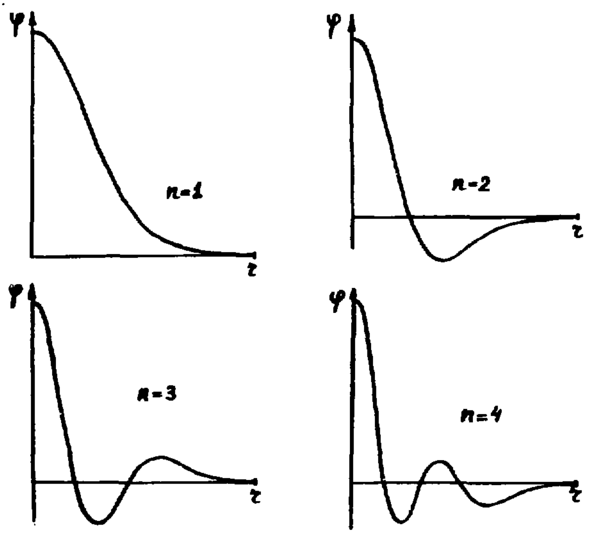

Рис.2. Первые четыре собственные функции задачи /3/.

Отметим особо следующий факт: с хорошей точностью значения $\phi_n(0)$ совпадают для различных n, то есть, по-видимому, на самом деле $\phi_n(0)$ в точности равны для разных уровней.

К сожалению, строгого доказательства этого обнаруженного численно результата пока нет. Для сравнения напомним, что в случае дальнодействующего потенциала $V=-g^2\int\phi^2(y)|x-y|^{-1}d^3y$ величина $\phi_n(0)$ для ss СФ быстро уменьшалась с номером моды /5/. Естественно предположить, что среди всех степенных нелокальных потенциалов $V(k,x)=g^2\alpha_k^2\int\phi^2(y)|x-y|^k d^3y$ при $k>0$ в классе ss СФ "граничным" является $V(1,x)$, то есть в потенциалах $V(k,x)$ с $k>1$ значения $\phi_n(0)$ возрастают с номером n, а для $0<k<1$ убывают с возрастанием n, и тем быстрее, чем больше $\Delta k=|k-1|$.

4. До сих пор мы полагали $\alpha^2=1$. Избавимся от этого ограничения. Легко проверить, что нормированным решением исходной задачи /3/ при $\alpha^2\neq 1$ является $\{\phi(\alpha,r),\epsilon(\alpha)\}$, где

$$\phi(\alpha,r)=\alpha\phi(1,\alpha^{2/3}r), \qquad /18/$$

$$\epsilon(\alpha)=\epsilon(1)\,\alpha^{4/3}=\epsilon(1)\,(\alpha^2)^{2/3}. \qquad /19/$$

Используя формулы /18/, /19/, можно сказать, как изменятся результаты, если при переходе от $N=\infty$ к реальному случаю $N=3$ по-прежнему считать справедливым приближение Хартри, но учесть отсутствие действия кварка на себя /при $N\to\infty$ эта поправка пренебрежимо мала/. Легко понять, что отсутствие самодействия приводит к умножению α^2 на коэффициент 2/3. В результате /см. /18/, /19// все ϵ_n уменьшаются в $/2/3/^{2/3}$ раза, $\phi_n(0)$ - в $/2/3/^{1/2}$, а радиус решения увеличивается в $/3/2/^{1/3}$ раза.

Важной задачей дальнейших исследований представляется нахождение той части спектра радиальных возбуждений в системе трех кварков, которая не описывается волновой функцией вида $\psi(x_1,x_2,x_3)=\phi(x_1)\,\phi(x_2)\phi(x_3)$.

5. Рассмотренный в данной работе потенциал $V(1,x)$ существенно отличается от $V(-1,x)$ тем, что в потенциале $V(1,x)$ кварки не могут быть свободными. Поэтому вычислять массу барионов, как это сделано для случая $V(-1,x)$ в работах /2,5/, для $V(1,x)$ нельзя. В рамках этой модели следует, по-видимому, рассмотреть потенциал $V=V(1,x)+V_0$, $V_0=\mathrm{const}$, и записать массовую формулу для ss "барионных" состояний из N "одинаковых" кварков в виде $M_n=N[V_0+\epsilon_n]$ /величины размерные/, затем положить $N=3$ и определить подгоночные параметры α^2, g^2, M, V_0 по экспериментальным данным. Однако заранее ясно, что массовая формула для барионов, полученная аналогичным образом на основе более общего "вороночного" межкваркового потенциала, точнее модели-

рующего взаимодействие кварков на малых расстояниях, может лучше описывать спектр масс барионов рассматриваемого типа. Нахождению ss связанных состояний $N=\infty$ кварков с "вороночным" потенциалом притяжения в приближении Хартри будет посвящена следующая работа этого цикла.

Авторы выражают благодарность члену-корреспонденту АН СССР Д.В.Ширкову, профессорам Е.П.Жидкову и В.Г.Маханькову за интерес к работе и полезное обсуждение ее результатов, а также П.Г.Акишину, И.В.Амирханову и С.Б.Герасимову за полезные консультации и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнштейн А.И. и др. УФН, 1977, 123, с.217.
2. Witten E. Nucl.Phys., 1979, B160, p.57.
3. 't Hooft G. Nucl.Phys., 1974, B72, p.461; ibid, 1974, B75, p.961.
4. Coleman S. SLAC-PUB-2484, Stanford, 1980.
5. Bogolubsky I.L. JINR, E2-12864, Dubna, 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 декабря 1980 года.