сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-80-796

И.Л.Боголюбский

СПЕКТР МАСС СОЛИТОНОВ ОДИНАКОВОГО ЗАРЯДА В МОДЕЛИ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

1980

1. Давно существующая "μ– е -проблема" /ныне уже "$\tau-\mu-e$ -проблема"/ и увеличивающееся число кварков ставят перед теорией по сути дела одну и ту же задачу: определить механизм генерации спектра масс частиц одинакового заряда и спина 1/2. В данной работе отмечается возможность возникновения уже на классическом уровне спектра масс "частиц" одинакового заряда на модельном примере нелинейного поля. Существование у нелинейных полевых уравнений целого набора /часто счетного/ частицеподобных решений /ЧПР/ отмечено еще в статье/1/, однако, во-первых, исследованные там ЧПР /солитоны/ являются неустойчивыми/1,2/ и, во-вторых, в/1/ условие фиксированности заряда для получения спектра масс использовано не было.

Одной из наиболее привлекательных нелинейных моделей лептонов, в которой вид нелинейности выводится из гипотезы о существовании фундаментальной длины и 5-мерного принципа локальной калибровочной инвариантности, является обобщение КЭД на сверхмалые расстояния, предложенное В.Г.Кадышевским/3/. К сожалению, насколько известно автору, в настоящее время не приведено ни одного примера устойчивого трехмерного солитона спинорного поля. Более того, весьма трудной задачей оказывается даже нахождение таких трехмерных ЧПР или исследование вопроса об их существовании. Поэтому в настоящей работе мы ограничимся более простым случаем заряженного скалярного поля, описываемого уравнением Клейна-Гордона с логарифмической нелинейностью (KGLN). Для настоящего исследования эта модель/4/ была выбрана 1/ из-за наличия в ней области устойчивости безузловых трехмерных солитонов, что вселяло надежду на существование устойчивых ЧПР и "возбужденных" мод /т.е. решений с узлами полевой функции/, и 2/ из-за того сильно облегчающего исследование факта, что амплитуда ЧПР каждой моды универсально и аналитически выражается как функция частоты ω, а характерный размер солитона от частоты вообще не зависит.

2. Уравнение KGLN для заряженного скалярного поля имеет в n -мерном пространстве вид

$$u_{\tau\tau} - \nabla_{\xi}^{2} u + m^2 u - \ell^{-2} u \ln(|u|^2 a^{n-1}) = 0. \qquad /1/$$

После перехода к безразмерным переменным $t, \vec{x}, \phi$ по формулам

$$t = \tau \ell^{-1}, \quad x = \xi \ell^{-1}, \quad u = \ell^{(1-n)/2} G \phi, \qquad /2/$$

$$G^2 = (\ell a^{-1})^{n-1} \exp[n + (\ell m)^2]$$

уравнение /1/ приобретает вид:

$$\phi_{tt} - \nabla_x^2 \phi - n\phi - \phi \ln(|\phi|^2) = 0 \qquad /3/$$

/мы запишем большинство формул в общем случае n -мерного конфигурационного пространства, хотя основной интерес представляет, конечно, случай $n = 3$/.

Энергия и заряд поля выражаются формулами:

$$H = G^2 \ell^{-1} \int [|\phi_t|^2 + |\nabla_x \phi|^2 + U(|\phi|)], \qquad /4/$$

$$U(\phi) = (1-n)\phi^2 - \phi^2 \ln \phi^2, \qquad /5/$$

$$Q = i \int (u_\tau u^* - u_\tau^* u) d^n \xi = i G^2 \int (\phi_t \phi^* - \phi_t^* \phi) d^n x \ . \qquad /6/$$

Солитонные решения будем искать в виде

$$\phi_s(x,t) = e^{-i\omega t} y(|\vec{x}|) = e^{-\omega^2/2} e^{-n/2} \rho(|\vec{x}|). \qquad /7/$$

Для $\rho(|\vec{x}|)$ после подстановки /7/ в /3/ находим уравнение

$$\Delta\rho + 2\rho \ln \rho = 0. \qquad /8/$$

Это уравнение имеет безузловое аналитическое решение - "гауссон"/4/:

$$\rho_0(x) = e^{-\vec{x}^2/2} e^{n/2} \ . \qquad /9/$$

Кроме того, /8/ имеет /по-видимому, счетное/ множество решений с узлами $\rho_k(|\vec{x}|)$ /решения с $k = 1$ и $k = 2$ узлами найдены численно в работе /5/ /. По аналогии с квантовой механикой напрашивается интерпретация этих решений с $k \neq 0$ как возбужденных состояний гауссонов /5/. Для того, чтобы исследовать правомерность такой интерпретации в случае релятивистского нелинейного поля, следует сравнить энергии ЧПР различных мод при одинаковых зарядах полевых сгустков, описывающихся этими решениями. Кроме того, для каждой моды решения следует ограничиться областью частоты ω, в которой эти ЧПР динамически устойчивы.

Обозначим $I_k = \int \rho_k^2(|\vec{x}|)\, d^n x$.
Энергия ЧПР с k узлами есть

$$H_k = G^2 \ell^{-1} e^{-\omega^2} e^{-n} \int [(2\omega^2+1)\rho_k^2 + (\nabla \rho_k)^2 - \rho_k^2 \ln \rho_k^2]\, d^n x =$$

$$= G^2 \ell^{-1} e^{-n} e^{-\omega^2} (2\omega^2 + 1) I_k . \qquad /10/$$

/при получении последнего выражения было использовано /8//, а заряд k-го ЧПР записывается формулой

$$Q_k = 2G^2 e^{-n} \omega e^{-\omega^2} I_k . \qquad /11/$$

3. Ограничимся теперь рассмотрением трехмерного /3/ пространства. Условие равенства заряда ЧПР различных мод $Q_0 = Q_1 = \dots = Q_k = \dots$ приводит к инвариантным относительно параметров m, ℓ, а равенствам

$$I_0 \omega_0 e^{-\omega_0^2} = I_1 \omega_1 e^{-\omega_1^2} = \dots = I_k \omega_k e^{-\omega_k^2} . \qquad /12/$$

Далее будем задавать величину ω_0, численно решать уравнение /12/, находя $\omega_1, \omega_2, \dots$ как функции параметра ω_0 и затем соответствующие им по формуле /10/ значения H_k–как функции ω_0. Зависимости $\omega_1(\omega_0)$ и $\omega_2(\omega_0)$, а также $H_0(\omega_0)$, $H_1(\omega_0)$ и $H_2(\omega_0)$ изображены на рис. 1 и 2 соответственно. Безусловные солитоны /k=0/ устойчивы при $\omega_0 > \omega_{cr}^{(0)} = 1/\sqrt{2}$, поэтому все исследование было выполнено только для этой области. Необходимое условие устойчивости заряженных скалярных солитонов $\frac{\omega}{Q}\frac{dQ}{d\omega} < 0$ /см., например, обзор [6]/ независимо от номера k приводит в рамках данной модели к требованию $\omega_{cr}^{(k)} > 1/\sqrt{2}$. Однако это условие не является достаточным, что нашло отражение в результатах численных экспериментов /ЧЭ/. А именно, для k = 1,2 ЧЭ показали, что солитоны неустойчивы при $\omega_k < \omega_{cr}^{(k)}$, причем $\omega_{cr}^{(k)} > \omega_{cr}^{(0)}$. По-видимому, это означает, что при $\omega_{cr}^{(0)} < \omega_k < \omega_{cr}^{(k)}$, $k \neq 0$, в спектре тестового гамильтониана есть по меньшей мере два отрицательных собственных значения [6,7]. Отметим, что неустойчивость солитонов во всех ЧЭ при $\omega_k < \omega_{cr}^{(k)}$ приводила к образованию сингулярности поля. ЧЭ показали, что $1,2 < \omega_{cr}^{(1)} < 1,3$ для солитона с одним узлом /обратим внимание на то, что $\phi_s^{(1)}(r=0) = 1$ при $\omega \simeq 1.25$. Для ЧПР с двумя узлами обнаружено, что $1,4 < \omega_{cr}^{(2)} < 1,5$. При частотах $\omega_k > \omega_{cr}^{(k)}$ узловые /k=1,2/ солитоны в ЧЭ сохраняют свои размеры, форму и амплитуду с хорошей точностью в течение всего счета /$\Delta t \approx 25$/, поэтому будем говорить, что они устойчивы в этих

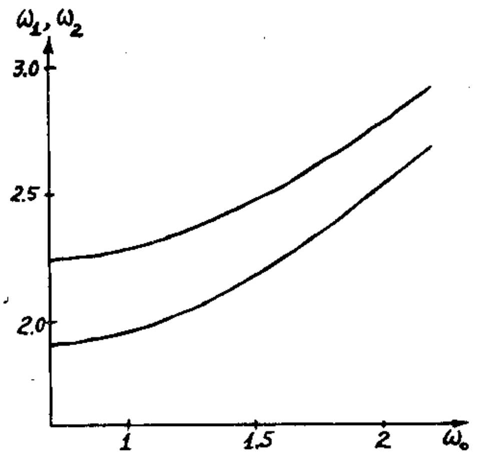

Рис.1. Зависимости $\omega_1(\omega_0)$ и $\omega_2(\omega_0)$.

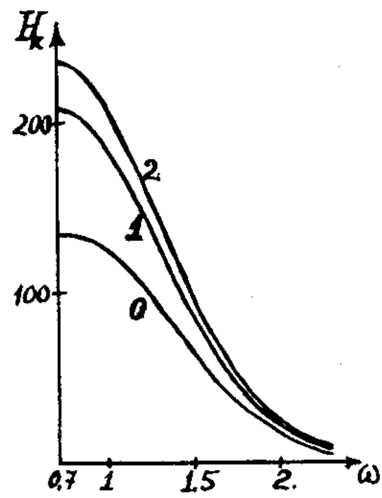

Рис.2. Массы солитонов с $k=0,1,2$ узлами как функции ω_0.

областях. Однако для окончательного утверждения вывода об устойчивости узловых ЧПР и точного определения $\omega_{cr}^{(k)}$ следует численно решить соответствующую спектральную задачу.

Так как функции $\omega_1(\omega_0)$ и $\omega_2(\omega_0)$ – монотонно растущие и значения $\omega_1(\omega_{cr}^{(0)})$ и $\omega_2(\omega_{cr}^{(0)})$ лежат в области устойчивости узловых ЧПР, то и при больших ω_0 соответствующие частотам $\omega_1(\omega_0)$ и $\omega_2(\omega_0)$ солитоны с массами $H_1(\omega_0)$ и $H_2(\omega_0)$ устойчивы. Таким образом, на рис. 2 представлены в зависимости от ω_0 массы устойчивых солитонов с $k=0,1,2$ узлами, заряд которых для различных k одинаков /но, как и массы, меняется при изменении ω_0/. По-видимому, и для мод с большим числом узлов солитоны при частотах, соответствующих частоте $\omega_0 > \omega_{cr}^{(0)}$, будут динамически устойчивы и их массы будут монотонно расти с номером моды, т.е. числом узлов k.

При рассмотрении рис. 2 видно, что отношение масс ЧПР $h_1 = H_1/H_0, h_2 = H_2/H_1$ и т.д. не превосходит в рамках данной модели величины $\alpha = 1,6$. Возможно, что при исследовании моделей, включающих спинорное поле, будут найдены отношения h_i, более близкие к наблюдаемому отношению масс лептонов. В данной работе указана лишь принципиальная возможность существования набора одинаково заряженных устойчивых нетопологических солитонов возрастающей массы.

Автор благодарен профессорам Е.П.Жидкову и В.Г.Маханькову, а также П.Г.Акишину, Н.В.Махалдиани и Ю.П.Рыбакову за интерес к работе и обсуждение возникших в результате ее выполнения вопросов. Автор признателен д-ру А.Кумару за дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Finkelstein R., Lelevier R., Ruderman M. Phys.Rev., 1951, 83, p. 326.
2. Bogolubsky I.L. Phys.Lett.A, 1979, 73, p. 87; Боголюбский И.Л. ОИЯИ, Р2-11-923, Дубна, 1978.
3. Kadyshevsky V.G. Nucl.Phys., 1978, B141, p. 477.
4. Bialynicki-Birula I., Mycielski I. Annals of Phys., 1976, 100, p. 62.
5. Bialynicki-Birula I., Mycielski I. Physica Scripta, 1979, 20, p. 539.
6. Makhankov V.G. Phys.Reports, 1978, 35, p. 1.
7. Friedberg R., Lee T.D., Sirlin A. Phys.Rev., 1976, D13, p. 2739.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 декабря 1980 года.