сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-80-776

Н.А.Черников

ВВЕДЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО В МЕХАНИКУ И ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

1980

В данной работе говорится об одном подходе к специальной теории относительности /СТО/, по существу подсказанном Лобачевским.

Лобачевский рассматривал геометрию не только в чисто логическом аспекте, но заботился и о ее приложениях к физике, астрономии и механике. Он завещал [1]: "Оставалось бы исследовать, какого рода перемена произойдет от введения воображаемой Геометрии в Механику".

Понятно, что теоретическая механика опирается на учение о пространстве и времени. Так, чтобы сформулировать законы рычага Архимеда и развить на их основе статику, потребовалось построить геометрию Евклида. В другом разделе механики – в кинематике – кроме евклидовой геометрии потребовалось четкое представление о времени. По Ньютону, абсолютное время – не что иное как предмет лонгиметрии Евклида, абсолютное же пространство – предмет евклидовой стереометрии. Неудивительно, что геометрию Ньютон считал частью механики.

Наряду с абсолютным, покоящимся пространством Ньютон рассматривал и относительные, т.е. произвольно движущиеся пространства. Предполагается – подчеркнем это, – что в процессе движения расстояния между точками относительного пространства не меняются. Кинематика не отличает, какое из ньютоновых пространств движется, а какое покоится. Таков принцип кинематической относительности.

С кинематической относительностью связывается пара объектов, заданных на пространственно-временном многообразии: ковекторное поле θ_α и тензорное поле $g^{\alpha\beta}$, удовлетворяющие условиям

$$\theta_\alpha g^{\alpha\beta} = 0, \quad g^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha} . \qquad /1/$$

Если $x^0 = t$ – время и $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ – декартовы координаты в одном из ньютоновых пространств /обозначим его N/, то полагаем $\theta_0 = 1$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = 0$, $g^{\alpha\beta} = 0$, если $\alpha \neq \beta$, $g^{00} = 0$, $g^{11} = 1$, $g^{22} = 1$, $g^{33} = 1$. Этот вид коэффициентов θ_α и $g^{\alpha\beta}$ сохраняется при переходе к любому другому ньютонову пространству $\tilde{N}$. Принцип кинематической относительности опирается на понятие абсолютного времени, поскольку

$$\theta_\alpha \, dx^\alpha = dt. \qquad /2/$$

Объекты θ_α и $g^{\alpha\beta}$ заслуживают пристального внимания. Пусть теперь

$$x^a, \qquad a \in \{1, 2, 3\}, \; - \qquad /3/$$

какие-либо другие, необязательно декартовы, координаты в N. Только в силу /2/ из /1/ получаем

$$g^{0\beta} = g^{\beta 0} = 0. \qquad /4/$$

От исходных координат x^α перейдем к другим координатам:

$$\tilde{x}^\alpha = \phi^\alpha (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad \alpha \in \{0,1,2,3\}, \qquad /5/$$

в пространственно-временном мире. Если потребовать, чтобы линейная форма $\theta_\alpha \, dx^\alpha = \tilde{\theta}_\alpha \, d\tilde{x}^\alpha$ в новых координатах сохранила вид /2/, надо будет положить

$$\tilde{x}^0 = x^0 + \mathrm{const}, \qquad /6/$$

что мы и не преминем сделать. В таком случае, подобно /4/, $\tilde{g}^{0\beta} = \tilde{g}^{\beta 0} = 0$.

Рассмотрим тензорный закон преобразования компонент второго объекта:

$$\tilde{g}^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} \phi^\alpha_\mu \phi^\beta_\nu = \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} g^{mn} \phi^\alpha_m \phi^\beta_n ,$$

где ϕ^α_μ - частная производная от функции /5/ по аргументу x^μ. В согласии с вышесказанным получаем $\tilde{g}^{0\beta} = 0$ при $\alpha = 0$ и $\tilde{g}^{\alpha 0} = 0$ при $\beta = 0$. В остальных случаях в преобразовании

$$\tilde{g}^{ab} = \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} g^{mn} \phi^a_m \phi^b_n ; \quad a, b \in \{1,2,3\}, \qquad /7/$$

координата времени участвует всего лишь в качестве параметра.

Компоненты g^{ab} тензора $g^{\alpha\beta}$ связаны с метрической формой

$$\sum_{a=1}^{3} \sum_{b=1}^{3} h_{ab} (x^1, x^2, x^3) \, dx^a dx^b \qquad /8/$$

пространства N. Именно:

$$\sum_{m=1}^{3} h_{am} g^{mb} = \delta^b_a , \qquad /9/$$

где

$$\delta^a_b = 1 \quad \text{при } a = b \text{ и } \delta^a_b = 0 \quad \text{при } a \neq b.$$

Функции

$$\tilde{x}^a = \phi^a\,(t, x^1, x^2, x^3), \quad a \in \{1,2,3\}, \tag{10}$$

из совокупности /5/ выражают закон движения пространства $\tilde{N}$ по отношению к пространству N при условии, что величины $\tilde{x}^a$ являются такими же координатами в $\tilde{N}$, какими являются величины x^a в N. Точный смысл этого условия состоит в следующем. Пусть g^{ab} – известные функции $f^{ab}(x^1, x^2, x^3)$. Те же самые функции от аргументов /10/ суть $f^{ab}(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$. В соответствии с законом преобразования /7/ функции /10/ должны быть такими, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} f^{mn}(x^1, x^2, x^3)\,\phi^a_m(t, x^1, x^2, x^3)\,\phi^b_m(t, x^1, x^2, x^3) = f^{ab}(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, x^3)\,. \tag{11}$$

Иначе говоря, пространству $\tilde{N}$ соответствует кривая в группе изометрий пространства N. Пространство $\tilde{N}$ как бы прокладывает путь в этой группе.

Итак, по отношению к объектам θ_a и $g^{\alpha\beta}$ все ньютоновы пространства равны – в этом суть кинематической относительности.

Обратимся теперь к динамике. Оказалось, что и динамика Ньютона не в состоянии отличать некоторые из относительных ньютоновых пространств от абсолютного ньютонова пространства. Сам же Ньютон вывел следствие /2/: "Относительные движения друг по отношению к другу тел, заключенных в каком-либо пространстве, одинаковы, покоится ли это пространство или движется равномерно и прямолинейно без вращения".

Это следствие возвели в принцип и стали называть специальным принципом относительности.

Поскольку абсолютное пространство оказалось ничем не выделенным среди ньютоновых пространств, движущихся равномерно и прямолинейно без вращения, то все такие пространства, включая и абсолютное, стали одинаково называть галилеевыми пространствами, чтобы подчеркнуть заслуги Галилея в становлении принципа инерции. Утверждение же Ньютона о существовании абсолютного пространства стали понимать как утверждение о существовании галилеевых пространств, в каждом из которых одинаково выполняются законы механики Ньютона.

Вряд ли Ньютон, живший задолго до Лобачевского, сомневался в том, что в пространстве, названном им абсолютным, законна евклидова геометрия. Однако оказалось, что если настаивать на желании, чтобы одно из ньютоновых пространств действительно выделялось с точки зрения механики /а точнее, с точки зрения динамики/, так, чтобы его с полным правом /для механика/ можно было называть абсолютным, то в это пространство /а следовательно, и в каждое ньютоново пространство в отдельности/ вместо евклидовой геометрии надо вводить геометрию Лобачевского.

Что при такой замене евклидовой геометрии на геометрию Лобачевского нарушается специальный принцип относительности, понять нетрудно. Действительно, если - в лучшем случае - одна из точек относительного пространства равномерно движется по некоторой прямой L абсолютного пространства и если относительное пространство не вращается вокруг оси L, то всякая точка относительного пространства, не лежащая на L, равномерно движется по эквидистанте с базой L. Поскольку в геометрии Лобачевского эквидистанта не является прямой линией, то всякая точка относительного пространства, не лежащая на L, движется с ускорением.

Итак, вводя геометрию Лобачевского в каждое из ньютоновых пространств в отдельности и продолжая считать, что время абсолютно, мы избавляемся от специального принципа относительности, однако продолжаем придерживаться принципа кинематической относительности. Надо только считать, что форма /8/ является метрической формой пространства Лобачевского.

Чтобы получить метрическую форму пространства Лобачевского в сферических координатах r, θ, ϕ, надо знать, что длина окружности радиуса r равняется

$$\ell = 2\pi k \operatorname{sh}\frac{r}{k}, \qquad /12/$$

где k - характерная длина, определяющая кривизну пространства Лобачевского. Метрическая форма /8/ принимает вид

$$dr^2 + \left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) = \qquad /13/$$

$$= dr^2 + k^2 \operatorname{sh}^2\frac{r}{k}(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2).$$

В новых координатах

$$x = k\operatorname{sh}\frac{r}{k}\sin\theta\cos\phi, \quad y = k\operatorname{sh}\frac{r}{k}\sin\theta\sin\phi, \quad z = k\operatorname{sh}\frac{r}{k}\cos\theta \qquad /14/$$

форма /13/ равняется

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - \frac{(x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2}{k^2 + x^2 + y^2 + z^2}, \qquad /15/$$

или

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - du^2, \qquad /16/$$

где

$$u = \sqrt{k^2 + x^2 + y^2 + z^2}\,. \qquad /17/$$

Таким образом мы пришли к интерпретации геометрии Лобачевского на гиперболоиде Пуанкаре.

В координатах $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^4 = u$ движение ньютонова пространства $\tilde{N}$ задается в виде

$$\bar{x}^i = \sum_{n=1}^{4} \mathfrak{L}^i_n(t)\, x^n, \qquad i \in \{1,2,3,4\}, \qquad /18/$$

где $\mathfrak{L}^i_n(t)$ - преобразование Лоренца, произвольно зависящее от времени t.

Можно,однако,иначе ввести геометрию Лобачевского в механику. Обратимся для этого к понятию инерциальной системы. Класс галилеевых пространств, скорости которых совпадают, называется инерциальной системой. Инерциальная система изображается в пространстве-времени связкой параллельных прямых.

Так вот, в механике Ньютона множество V инерциальных систем является трехмерным пространством Евклида: за расстояние между двумя инерциальными системами принимаем модуль их относительной скорости.

Надо сказать, что пространства, отличные от предмета классической геометрии, стали рассматривать во многом благодаря разработке идей, порожденных созданием геометрии Лобачевского. Предмет геометрии оказался практически необозримым, так что и сама механика /вопреки приведенному выше мнению Ньютона/ вдруг очутилась в его составе. Например, на механику материальной точки стали смотреть как на теорию мировых траекторий - кривых линий в четырехмерном пространственно-временном мире.

Отнесем теперь вопрос Лобачевского не к ньютонову пространству N, а к пространству инерциальных систем V. Какого же рода перемена произойдет, если в пространстве инерциальных систем вместо евклидовой геометрии ввести геометрию Лобачевского?

Оказывается, что время потеряет абсолютный характер: в каждом галилеевом пространстве будет собственный ход времени. Никаких ньютоновых пространств /кроме, разумеется, галилеевых/ не останется, а следовательно, нарушится принцип кинематической относительности. Вместо ковектора θ_α и вырожденного тензора $g^{\alpha\beta}$ появятся два невырожденных тензора $\theta_{\alpha\beta}$ и $g^{\alpha\beta}$, удовлетворяющих условиям

$$\theta_{\alpha\mu} g^{\mu\beta} = -\frac{1}{k^2}\delta^\mu_\alpha\,, \quad \theta_{\alpha\beta} = \theta_{\beta\alpha}\,, \quad g^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha}\,. \qquad /19/$$

Если $x^0 = t$ – время и $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ – декартовы координаты в одном из галилеевых пространств, то

$$\theta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dt^2 - \frac{1}{k^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2). \qquad /20/$$

Что касается специального принципа относительности, то по смыслу вопроса он, конечно, сохранится, однако относительная скорость между инерциальными системами будет ограничена значением k -характерной для геометрии Лобачевского величиной, выше упоминавшейся. Расстояние s /называемое быстротой/ между двумя инерциальными системами связано с их относительной скоростью v формулой

$$\frac{v}{k} = \mathrm{th}\frac{s}{k}. \qquad /21/$$

Одним словом, если считать константу Лобачевского k равной скорости света c /строго $k=c$ /, то приходим к специальной теории относительности /СТО/, развитой Лоренцем, Пуанкаре, Эйнштейном и другими.

Правда, никто из основоположников СТО не упоминал о геометрии Лобачевского, возможно, не желая затемнять и без того трудную теорию ссылками на геометрию, хотя и полезную, но тоже трудную.С методической стороны такой прием может быть оправдан, если иметь в виду читателя, не знакомого с геометрией Лобачевского, тем более, что "воззрения на пространство и время, здесь развиваемые, возникли на опытно-физической почве" / Минковский [3] /, а не в результате поставленного здесь вопроса.

Разумеется, становление СТО во многом означало /независимо от отношения авторов к этому вопросу/ повторение пройденного Лобачевским и другими пути. Например, в координатах

$$v_x = k\,\mathrm{th}\frac{r}{k}\sin\theta\cos\phi, \quad v_y = k\,\mathrm{th}\frac{r}{k}\sin\theta\sin\phi, \quad v_z = k\,\mathrm{th}\frac{r}{k}\cos\theta \qquad /22/$$

Бельтрами [4] получил выражение

$$\mathrm{th}\frac{s}{k} = \frac{\sqrt{(\vec{\beta}_2-\vec{\beta}_1)^2 - [\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2]^2}}{1-\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2}, \quad \beta_1 = \frac{\vec{v}_1}{k}, \quad \beta_2 = \frac{\vec{v}_2}{k}, \qquad /23/$$

для расстояния s между двумя точками в пространстве Лобачевского. В формуле Бельтрами /23/ нетрудно усмотреть выражение для относительной скорости двух инерциальных систем в СТО.

Признание геометрии Лобачевского пришло в конце 60-х годов прошлого столетия. Тогда свершился воистину революционный переворот в математическом мышлении, несомненно, оказавший свое влияние и на создание СТО. О необыкновенном впечатлении, которое произвело это событие, свидетельствует следующий отрывок из романа Достоевского "Братья Карамазовы". Вот что объяснял сто лет назад Иван Карамазов своему брату Алексею: "Если бог есть и если он действительно создал землю, то, как нам совершенно известно, создал он ее по евклидовой геометрии,а ум человеческий с понятием лишь о трех измерениях пространства. Между тем находились и находятся даже теперь геометры и философы,и даже из замечательнейших,которые сомневаются в том, чтобы вся вселенная или,еще обширнее - все бытие было создано лишь по евклидовой геометрии,осмеливаются даже мечтать,что две параллельные линии,которые по Евклиду ни за что не могут сойтись на земле,может быть,и сошлись бы где-нибудь в бесконечности".

К числу геометров, осмеливавшихся столь революционно мечтать, относится Пуанкаре. Развивая теорию фуксовых групп, в 1882 году он писал /5/: "Я не могу умолчать о связи предшествующих понятий с неевклидовой геометрией Лобачевского". И далее: "Если принять эти переименования, то теоремы Лобачевского верны, т.е. к этим новым величинам прилагаются все теоремы обычной геометрии, за исключением тех, которые являются следствием постулата Евклида. Эта терминология мне оказала большие услуги в моих изысканиях, но я, чтобы избегнуть всякой неясности, не буду ее здесь употреблять".

Для специалистов, знающих геометрию Лобачевского, связь СТО с этой геометрией, конечно, не могла оставаться тайной, и уже в ранних работах замечалось, что в основе СТО лежит геометрия Лобачевского. См. об этом обзоры /6,7/.Отметим здесь следующие результаты. Клейн /8/ доказал, что группа Лоренца изоморфна группе изометрий пространства Лобачевского. В связи с этим см. формулу /18/. Котельников /9/ на основе проективной геометрии построил пространство скоростей, эквивалентное рассмотренному здесь пространству инерциальных систем. Он показал, что в механике Ньютона это есть пространство Евклида, а в СТО - Лобачевского. Фок /10/ построил пространство скоростей Лобачевского на основе формулы Бельтрами /23/.

К моменту открытия СТО наука располагала хорошо разработанными разделами как в механике, так и в других областях физики. Перечислим некоторые из этих разделов.

1. Механика твердого тела.
2. Механика одной материальной точки в заданном поле сил.
3. Механика контактных столкновений частиц.
4. Кинетическая теория газа Больцмана.
5. Механика двух точечных тел с заданным потенциалом взаимодействия.
6. Закон всемирного тяготения Ньютона.

7. Теория потенциала.

8. Теория электромагнитного поля Максвелла.

Во всех этих разделах, кроме последнего, опирались на евклидово пространство инерциальных систем, и ничто в них не указывало на необходимость СТО. Напротив, теория электромагнитного поля, выросшая на той самой опытно-физической почве, которую имел в виду Минковский, с необходимостью привела к СТО, а стало быть, и к пространству Лобачевского инерциальных систем. Дело в том, что скорости света /равные по модулю c и произвольные по направлению/ являются теми самыми бесконечно удаленными точками пространства инерциальных систем, в которых сходятся параллельные прямые линии этого пространства. Но, коль скоро геометрия Лобачевского в пространстве инерциальных систем оказалась практической реальностью, надо было и остальные семь перечисленных выше разделов согласовать с этим фактом.

Что же оказалось?

1. В СТО нет механики твердого тела, поскольку в СТО нарушен принцип кинематической относительности.

2. Механика одной материальной точки не встретила в СТО принципиальных затруднений и получила свое полное развитие.

3. То же самое можно сказать и о механике контактных столкновений частиц.

В работе [11] импульсы и кинетическая энергия частицы представлены как длина окружности и площадь круга в пространстве инерциальных систем /или, что все равно, в пространстве скоростей/. В той же работе основной закон столкновения двух частиц - закон сохранения 4-импульса - сформулирован в виде законов рычага Архимеда в пространстве инерциальных систем. Тем самым механика контактных столкновений частиц была сведена к статике в пространстве инерциальных систем.

4. Релятивистская кинетическая теория газа привлекала внимание сразу же после открытия СТО. Так, равновесная функция распределения была получена Юттнером в 1911 г. В работах [12,13] получен релятивистский аналог кинетического уравнения Больцмана. Успех в этой области науки определяется тем, что все явления, протекающие в разреженном газе, в конечном счете объясняются двумя явлениями, а именно: контактными столкновениями двух частиц и движением одной частицы во внешнем поле сил в промежутках между столкновениями.

Несмотря на то, что дело сводится к двум предыдущим разделам, нам представляется важным следующее замечание. Как известно, Боголюбов показал [14], каким образом в нерелятивистском случае можно прийти к кинетическому уравнению, исходя из механики системы частиц. Ввиду этого формулировка и исследование релятивистского кинетического уравнения представляет интерес и в связи с развитием релятивистской механики системы частиц.

5. Весьма трудным оказался вопрос о том, какие изменения надо внести в уравнения Ньютона

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} U(r), \quad m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_2} U(r), \qquad /24/$$

описывающие поведение двух точечных тел, чтобы должным образом учесть геометрию Лобачевского в пространстве инерциальных систем. Здесь $U(r)$ - потенциал взаимодействия, $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ - расстояние между телами. На этот вопрос удалось получить удовлетворительный ответ в случае $U(r) = Gr$, где $G = \mathrm{const}$. См. об этом /15-19/.

В вопросе о релятивизации уравнений /24/ нам представляется необходимым учитывать мнение Минковского /3/, согласно которому физические законы могли бы найти свое наисовершеннейшее выражение как взаимоотношения между мировыми линиями точечных тел.

6. На основе законов Кеплера Ньютон установил функцию $U(r)$ в случае тяготеющих масс:

$$U(r) = -\frac{m_1 m_2 \gamma}{r}. \qquad /25/$$

Найти точный релятивистский аналог уравнений /24/ с потенциалом /25/ до сих пор никому не удалось.

7. В нерелятивистском варианте движение пробного тела в гравитационном поле $\phi(\vec{r})$ остальных масс, размещенных в пространстве с плотностью $\rho(\vec{r})$, определяется уравнением Ньютона

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \phi(\vec{r}) \qquad /26/$$

и уравнением Пуассона

$$\Delta\phi = 4\pi\gamma\rho. \qquad /27/$$

Если из "остальных" масс имеется всего лишь одно массивное точечное тело с массой M, помещенное в начало координат, то

$$\rho(\vec{r}) = M\delta(\vec{r}). \qquad /28/$$

В таком случае из уравнения /27/ следует, что

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{M\gamma}{|\vec{r}|}. \qquad /29/$$

Казалось бы, /29/ отличается от /25/ только массовым множителем. Однако это не так: в /29/ ϕ - функция одного векторного аргумента $\vec{r}$, а в /25/ U - функция двух векторных аргументов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Поэтому релятивизация уравнений /24/ с потенциалом взаимодействия /25/ - гораздо более трудная задача, чем релятивизация уравнения /26/ с потенциалом /29/.

В общей теории относительности Эйнштейна, выходящей за рамки СТО, уравнение /26/ заменяется на уравнение для геодезических, а уравнение /27/ - на гравитационное уравнение Эйнштейна. На основе теории Эйнштейна Шварцшильд получил релятивистский аналог для функции /29/ /но не для функции /25/!/.

В связи с рассматриваемым здесь вопросом принципиальный интерес представляют работы Логунова с сотрудниками [20-26].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лобачевский Н.И. О началах геометрии. В сб.: Об основаниях геометрии. Гостехиздат, М., 1956, с.49.
2. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. Пер. А.Н.Крылова. В сб. трудов А.Н.Крылова, т.7. Изд-во АН СССР, М.Л., 1936.
3. Минковский Г. Пространство и время. Новые идеи в математике. Сб.У, С-Пб, 1914.
4. Бельтрами Э. Опыт интерпретации неевклидовой геометрии. В сб. [1], с.212.
5. Пуанкаре А. Теория фуксовых групп. В сб. [1], с.306.
6. Черников Н.А. ЭЧАЯ, 1973, т.4, вып.3, с.773.
7. Черников Н.А. Всесоюзная научная конференция по неевклидовой геометрии "150 лет геометрии Лобачевского". Пленарные доклады. ВИНИТИ, М., 1977, с.146.
8. Клейн Ф. О геометрических основаниях лоренцевой группы. В сб. [3] с.144.
9. Котельников А.П. Принцип относительности и геометрия Лобачевского. В сб.: In memoriam Lobatchevskii. Казань, 1927, с.37.
10. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. Гостехиздат, М., 1955.
11. Черников Н.А. Научные доклады высшей школы, физ.-мат. науки, 1958, №2, с.158.
12. Черников Н.А. ДАН СССР, 1957, 112, №6 /1030/.
13. Черников Н.А. ДАН СССР, 1957, 114, №3 /530/.
14. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. ГТТИ, М.-Л., 1946.
15. Черников Н.А., Шавохина Н.С. Проблемы физики высоких энергий и квантовая теория поля. ИФВЭ, Серпухов, 1978, т.2, с.41.

16. Черников Н.А., Шавохина Н.С. Проблемы физики высоких энергий и квантовая теория поля. ИФВЭ, Протвино, 1979, с.113.
17. Черников Н.А., Шавохина Н.С. Проблемы квантовой теории поля, Алушта, 1979. ОИЯИ, Р2-12462, Дубна, 1979, с.340.
18. Черников Н.А., Шавохина Н.С. ТМФ, 1980, т.42, №1, с.59.
19. Черников Н.А., Шавохина Н.С. ТМФ, 1980, т.43, №3, с.356.
20. Логунов А.А., Фоломешкин В.Н. ТМФ, 1977, т.32, №2, с.147.
21. Логунов А.А., Фоломешкин В.Н. ТМФ, 1977, т.32, №2, с.167.
22. Логунов А.А., Фоломешкин В.Н. ТМФ, 1977, т.33, №2, с.174.
23. Логунов А.А. и др. ТМФ, 1979, т.40, №3, с.291.
24. Власов А.А. и др. ТМФ, 1980, т.43, №2, с.147.
25. Денисов В.И., Логунов А.А. ТМФ, 1980, т.43, №2, с.187.
26. Денисов В.И., Логунов А.А. ИФВЭ, ОТФ, 80-82, Серпухов,1980.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 ноября 1980 года.