объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-80-76

Н.С.Шавохина

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧЕ ДВУХ ТЕЛ

Направлено в ТМФ

1980

В работах [1-3] была поставлена и решена проблема релятивизации уравнений

$$m_1 \frac{d^2\vec{x}_1}{dt^2} = G\frac{\vec{x}_2-\vec{x}_1}{|x_2-x_1|}, \quad m_2\frac{d^2\vec{x}_2}{dt^2} = G\frac{\vec{x}_1-\vec{x}_2}{|x_2-x_1|} \qquad /1/$$

Ньютона для двух точечных тел с линейным потенциалом взаимодействия, т.е. с потенциалом

$$U(x_1,x_2) = G|x_2-x_1|, \qquad /2/$$

пропорциональным расстоянию между телами.

В работе [1] сформулирована краевая задача для минимальной двумерной поверхности, лежащей в пространственно-временном мире общего вида. Доказано, что краевая задача эквивалентна уравнениям /1/, коль скоро в мире действует группа Галилея. Тем самым решение проблемы релятивизации уравнений /1/ свелось к рассмотрению краевой задачи для минимальной двумерной поверхности, лежащей в пространственно-временном мире Пуанкаре-Минковского.

В работах [2,3] формулы Монжа и краевые условия для минимальной поверхности записаны в специальном виде, приспособленном к той или иной заранее выбранной системе отсчета. В соответствующем виде записаны интегралы движения. Доказано, что в случае притяжения тел, когда $G>0$, существует собственная ось времени.

В данной работе будем считать, что $G>0$ и что собственная ось времени лежит на мировой поверхности. Для этого случая здесь будет выведено дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом, призванное заменить уравнение

$$\frac{d^2\vec{K}}{dt^2} = -G\frac{\vec{K}}{|\vec{K}|}, \qquad /3/$$

тесно связанное с уравнениями /1/. Затем будут рассмотрены прямолинейное и круговое движения тел и переход к нерелятивистскому пределу.

1. ОБЩАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

В соответствии с [3] минимальную поверхность задаем в виде

$$\vec{x} = \vec{x}(\eta, t) = \frac{c}{2}[\vec{A}(t+\frac{\eta}{c}) + \vec{B}(t-\frac{\eta}{c})], \qquad /4/$$

где c - скорость света, t - время, η - параметр на поверхности, меняющийся в пределах

$$\xi_1(t) \leq \eta \leq \xi_2(t) \,, \qquad /5/$$

и на функции

$$\dot{\vec{A}}(t) = \frac{d}{dt}A(t) \,, \quad \dot{\vec{B}}(t) = \frac{d}{dt}B(t)$$

наложены условия

$$\dot{\vec{A}}^2 = 1, \quad \dot{\vec{B}}^2 = 1 \,. \qquad /6/$$

Координаты рассматриваемых тел в момент времени t равны

$$\vec{x}_1(t) = \vec{x}(\xi_1(t), t) = \frac{c}{2}[\vec{A}(u_1(t)) + \vec{B}(v_1(t))] \,,$$
$$\vec{x}_2(t) = \vec{x}(\xi_2(t), t) = \frac{c}{2}[\vec{A}(u_2(t)) + \vec{B}(v_2(t))] \,, \qquad /7/$$

где

$$u_1(t) = t + \frac{\xi_1(t)}{c}, \quad v_1(t) = t - \frac{\xi_1(t)}{c} \,,$$
$$u_2(t) = t + \frac{\xi_2(t)}{c}, \quad v_2(t) = t - \frac{\xi_2(t)}{c} \,. \qquad /8/$$

Если координатная и собственная оси времени параллельны, то краевые условия записываются в виде

$$\vec{p}_1(t) = \frac{G}{2}[\vec{A}(u_1(t)) - \vec{B}(v_1(t))] \,,$$
$$\vec{p}_2(t) = \frac{G}{2}[-\vec{A}(u_2(t)) + \vec{B}(v_2(t))] \,, \qquad /9/$$

где $p_1(t)$ и $p_2(t)$ - импульсы рассматриваемых тел в момент времени t. Последние вычисляются через массы и скорости тел по формулам

$$\vec{p} = p^\circ \frac{d\vec{x}}{dt}, \quad \vec{p}^\circ = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}} \qquad /10/$$

релятивистской механики материальной точки.

Из предыдущего следует, что

$$p_1^\circ(t) = \mathcal{E}_1 + \frac{G}{c^2}\xi_1(t) \,, \quad p_2^\circ(t) = \mathcal{E}_2 - \frac{G}{c^2}\xi_2(t) \,, \qquad /11/$$

где $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$- постоянные интегрирования. Дальше будем считать, что собственная ось времени совпадает с координатной. Это значит, что

$$\vec{N} = p_1^\circ(t)\,\vec{x}_1(t) + p_2^\circ(t)\,\vec{x}_2(t) + \frac{G}{c^2}\int\limits_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} \vec{x}(\eta,t)\,d\eta = 0. \qquad /12/$$

Сохраняющиеся величины, характеризующие внутреннее состояние объекта, суть энергия

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = p_1^\circ(t) + p_2^\circ(t) + \frac{G}{c^2}[\xi_2(t) - \xi_1(t)] \qquad /13/$$

и момент

$$\vec{\mathfrak{M}} = [\vec{x}_1(t), \vec{p}_1(t)] + [\vec{x}_2(t), \vec{p}_2(t)] + \frac{G}{c^2}\int\limits_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} [\vec{x}(\eta,t), \frac{\partial}{\partial t}\vec{x}(\eta,t)]\,d\eta. \qquad /14/$$

Так как

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{x}(\eta,t) = \frac{\partial}{\partial\eta}\frac{1}{2}[\vec{A}(t+\frac{\eta}{c}) - \vec{B}(t-\frac{\eta}{c})], \qquad /15/$$

то интегрированием по частям нетрудно привести момент к следующему виду:

$$\vec{\mathfrak{M}} = \frac{G}{4}\int\limits_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} [\vec{A}(t+\frac{\eta}{c}) - \vec{B}(t-\frac{\eta}{c}), \dot{\vec{A}}(t+\frac{\eta}{c}) - \dot{\vec{B}}(t-\frac{\eta}{c})]\,d\eta. \qquad /16/$$

2. ЧАСТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Предположим теперь, что собственная ось времени лежит на поверхности /4/. Это значит, что собственная ось задается зависимостью $\eta=\eta(t)$, такой, что выполняется условие

$$\vec{A}(t+\frac{\eta(t)}{c}) = -\vec{B}(t-\frac{\eta(t)}{c}).$$

Дифференцируя это условие по t, получаем

$$\dot{\vec{A}}(t+\frac{\eta(t)}{c})[1+\frac{\dot{\eta}(t)}{c}] = -\dot{\vec{B}}(t-\frac{\eta(t)}{c})[1-\frac{\dot{\eta}(t)}{c}].$$

Возводя в квадрат обе части полученного равенства, в силу условий /6/ находим

$$[1+\frac{\dot{\eta}(t)}{c}]^2 = [1-\frac{\dot{\eta}(t)}{c}]^2,$$

т.е. $\dot{\eta}(t)=0$, а значит, $\eta(t)=\mathrm{const}$. Поскольку в заданной инерциальной системе отсчета параметр η определяется с точностью до аддитивной постоянной, то можно считать, что $\eta(t)=0$, а, следовательно,

$$\vec{A}(t) = -\vec{B}(t) . \qquad /17/$$

Мы доказали, что в рассматриваемом случае минимальная поверхность задается в виде

$$\vec{x} = \vec{x}(\eta, t) = \frac{c}{2}[\vec{B}(t - \frac{\eta}{c}) - \vec{B}(t + \frac{\eta}{c})] , \qquad /18/$$

где функция $\vec{B}(t)$ по-прежнему удовлетворяет условию

$$\dot{\vec{B}}^2(t) = 1 . \qquad /19/$$

Для такой поверхности потребуем, чтобы выполнялось одно из краевых условий /9/, скажем, второе:

$$\vec{p}(t) = \frac{G}{2}[\vec{B}(v(t)) + \vec{B}(u(t))] , \qquad /20/$$

где номер частицы опускаем и по-прежнему пользуемся формулами /10/. При этом

$$\vec{x}(t) = \frac{c}{2}[\vec{B}(v(t)) - \vec{B}(u(t))] , \qquad /21/$$

а аргументы u, v равняются

$$u(t) = t + \frac{\xi(t)}{c}, \quad v(t) = t - \frac{\xi(t)}{c}. \qquad /22/$$

К такой частной краевой задаче мы приходим в случае $m_1=\infty$, $m_2=m$. Действительно, в этом случае собственная ось времени совпадает с мировой траекторией первого тела, а параметр η меняется в пределах

$$0 \le \eta \le \xi(t) , \qquad /23/$$

причем $\xi_1(t)=0$, $\xi_2(t) = \xi(t)$, $x_1(t) = x(0, t) = 0$, $x_2(t) = x(t)$, $\vec{p}_2(t) = \vec{p}(t)$.

Подобным образом решается случай $m_1 = m$, $m_2 = \infty$, когда собственная ось времени совпадает с мировой траекторией второго тела. В этих случаях параметр η меняется в пределах

$$-\xi(t) \le \eta \le 0 , \qquad /24/$$

причем $\xi_1(t) = -\xi(t)$, $\xi_2(t) = 0$, $x_1(t) = -x(t)$, $\vec{x}_2(t) = \vec{x}(0, t) = 0$, $p_1(t) = -p(t)$.

К такой же задаче приходим и в случае $m_1 = m = m_2$. Действительно, если две предыдущие поверхности соединить в одну, заставляя параметр η меняться в пределах

$$-\xi(t) \le \eta \le \xi(t) , \qquad /25/$$

и если вместе с равенствами /17/ положить

$$\vec{x}_2(t) = \vec{x}(t) = -\vec{x}_1(t)\ ,$$
$$\vec{p}_2(t) = \vec{p}(t) = -\vec{p}_1(t)\ , \qquad /26/$$
$$\xi_2(t) = \xi(t) = -\xi_1(t)\ ,$$

то все условия общей краевой задачи, которая изложена в разделе 1, будут удовлетворены, коль скоро удовлетворяются все условия частной краевой задачи.

Наконец, к частной краевой задаче дело сводится и при произвольных массах m_1, m_2, если тела движутся по прямой либо по окружностям.

3. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Итак, частная краевая задача содержится в формулах /18/,/19/, /20/, /21/, /10/, /22/, /23/. Из этих формул следует, что сохраняются энергия

$$\mathcal{E} = p^{\circ}(t) + \frac{G}{c^2}\xi(t) \qquad /27/$$

и момент

$$\vec{\mathfrak{M}} = [\vec{x}(t)\ ,\vec{p}(t)\ ] + \frac{G}{c^2}\int\limits_0^{\xi(t)} [\vec{x}(\eta, t),\ \frac{\partial}{\partial t}\vec{x}(\eta, t)]\,d\eta\ =$$
$$= \frac{G}{4}\int\limits_0^{\xi(t)} [\vec{B}(t-\frac{\eta}{c}) + \vec{B}(t+\frac{\eta}{c}),\ \dot{\vec{B}}(t-\frac{\eta}{c}) + \dot{\vec{B}}(t+\frac{\eta}{c}]\,d\eta\ . \qquad /28/$$

По аналогии с /12/ рассмотрим функцию

$$\vec{K}(t) = p^{\circ}(t)\,\vec{x}(t) + \frac{G}{c^2}\int\limits_0^{\xi(t)} \vec{x}(\eta,\ t)\ d\eta\ . \qquad /29/$$

Нетрудно подсчитать ее производную:

$$\dot{\vec{K}}(t) = \vec{p}(t) + \frac{G}{c^2}\int\limits_0^{\xi(t)} \frac{\partial}{\partial t}\vec{x}(\eta\,;t)\ d\eta\ , \qquad /30/$$

а так как

$$\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial}{\partial t}\vec{x}(\eta,\ t) = -\frac{1}{2}\ \frac{\partial}{\partial\eta}[\vec{B}(t-\frac{\eta}{c}) + \vec{B}(t+\frac{\eta}{c})], \qquad /31/$$

то

$$\dot{\vec{K}}(t) = G\vec{B}(t)\ . \qquad /32/$$

Из /32/ и /19/ получаем

$$|\dot{\vec{K}}(t)| = G, \qquad /33/$$

а из /32/, /18/, /20/ и /21/

$$\vec{x}(\eta, t) = \frac{c}{2G}[\vec{K}(t - \frac{\eta}{c}) - \vec{K}(t + \frac{\eta}{c})], \qquad /34/$$

$$\vec{\rho}(t) = \frac{1}{2}[\vec{K}(v(t)) + \vec{K}(u(t))], \qquad /35/$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \frac{2}{2G}[\dot{\vec{K}}(v(t)) - \dot{\vec{K}}(u(t))]. \qquad /36/$$

Далее нетрудно видеть, что функция /34/ равняется

$$\vec{x}(\eta, t) = -\frac{c^2}{2G}\frac{\partial}{\partial\eta}[\vec{K}(t - \frac{\eta}{c}) + \vec{K}(t + \frac{\eta}{c})]. \qquad /37/$$

Подставляя это выражение в /29/, получаем

$$p^\circ(t)\,\vec{x}(t) = \frac{1}{2}[\vec{K}(v(t)) + \vec{K}(u(t))]. \qquad /38/$$

Из /36/ и /38/ следует дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом для функции

$$\frac{cp^\circ(t)}{2}[\dot{\vec{K}}(v(t)) - \dot{\vec{K}}(u(t))] = \frac{G}{2}[\vec{K}(v(t)) + \vec{K}(u(t))]. \qquad /39/$$

Остается подставить сюда одно из следующих трех выражений для функции $p^\circ(t)$.

4. ТРИ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ $p^\circ(t)$

Первое выражение для функции $p^\circ(t)$ дает закон сохранения энергии /27/. Второе получаем, подставляя в формулу

$$p^\circ = \sqrt{m^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{c^2}}$$

функцию /35/:

$$p^\circ(t) = \sqrt{m^2 + \frac{1}{4c^2}[\dot{\vec{K}}(v(t)) + \dot{\vec{K}}(u(t))]^2}. \qquad /40/$$

К третьему приходим, подставляя в формулу

$$p^\circ p^\circ[1 - \frac{1}{c^2}(\frac{dx}{dt})^2] = m^2$$

функцию /36/ и пользуясь условием /33/:

$$p^\circ p^\circ\,\dot{u}(t)\,\dot{v}(t)\,\frac{G^2 + \ddot{\vec{K}}(u(t))\,\ddot{\vec{K}}(v(t))}{2G^2} = m^2. \qquad /41/$$

Уравнение /39/ надо рассматривать вместе с условием /33/ и со всеми тремя указанными здесь выражениями для функции $p^{\circ}(t)$. Таким образом, получаем систему уравнений для определения функций $\vec{K}(t)$ и $\xi(t)$. Если обычно в дифференциальных уравнениях с отклоняющимся аргументом отклонение заранее задается /4/, то в нашем случае оно подлежит определению.

4. НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ ПРЕДЕЛ

В нерелятивистском пределе $c \to \infty$ оба выражения /40/ и /41/ сводятся к

$$p^{\circ}(t) = m, \qquad /42/$$

а уравнение /39/ переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-m\xi(t)\ddot{\vec{K}}(t) = G\vec{K}(t)'. \qquad /43/$$

Так как условие /33/ сохраняется, то согласно /43/

$$m\xi(t) = |\vec{K}(t)|. \qquad /44/$$

Подставляя /44/ в /43/, приходим к уравнению Ньютона /3/. Это и естественно, поскольку согласно /29/ и /42/ в нерелятивистском пределе

$$\vec{K}(t) = m\vec{x}(t). \qquad /45/$$

Что касается выражения /27/, то и в нерелятивистском пределе оно представляет закон сохранения энергии, а именно:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + G|\vec{x}| = E, \qquad /46/$$

где

$$E = \lim_{c\to\infty} c^2(\mathcal{E} - m). \qquad /47/$$

Отметим, что в нерелятивистском случае собственная ось времени всегда лежит на минимальной поверхности.

6. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ

При рассмотрении прямолинейного движения все пространственные векторы коллинеарны и направлены, скажем, по оси x. Пространственно-временной мир можно считать двумерным. Согласно /33/ $\ddot{K} = \pm G$, а, следовательно, $K(t) = \pm\frac{G}{2}(t-t_0)^2 + K_0$, где t_0 и K_0 - постоянные интегрирования. Из /34/ следует, что в таком случае $x(\eta, t) = \mp\eta$. Выбирая $x = \eta$, находим

$$K(t) = -\frac{G}{2}(t-t_0)^2 + K_0 . \qquad /48/$$

Располагая этими результатами, запишем /35/ и /36/ в виде

$$p(t) = -G(t-t_0) = \dot K(t) , \qquad /49/$$

$$x(t) = \xi(t) . \qquad /50/$$

Затем по формуле /40/ найдем функцию

$$p^\circ(t) = \sqrt{m^2 + \frac{G}{c^2}(t-t_0)^2} = \sqrt{m \quad + \frac{\dot K^2(t)}{c^2}} , \qquad /51/$$

а по формуле /27/ - функцию

$$\xi(t) = \frac{c^2}{G}[\mathcal{E} \; - \sqrt{m^2 + \frac{G^2}{c^2}(t-t_0)^2} \;] . \qquad /52/$$

Что касается формулы /41/, то она принимает вид

$$p^\circ(t) = \frac{m}{\sqrt{1 - c^{-2}\dot\xi^2}} \qquad /53/$$

и в силу /51/ и /52/ удовлетворяется. Наконец, чтобы удовлетворить уравнению /39/, надо положить

$$\frac{c^2}{2}(\mathcal{E}^2 - m^2) = GK_0 . \qquad /54/$$

Это следует из того, что уравнение /39/ в рассматриваемом случае принимает вид

$$p^\circ(t)\,\xi(t) + \frac{G}{2c^2}\xi^2(t) = K(t) . \qquad /55/$$

Далее, возводя /27/ в квадрат и сравнивая с /55/, получаем

$$\mathcal{E}^2 = p^{\circ 2} + \frac{2G}{c^2}K(t) . \qquad /56/$$

Подставляя сюда /51/, находим

$$\frac{c^2}{2}(\mathcal{E}^2 - m^2) = \frac{1}{2}\dot K^2(t) + GK(t) , \qquad /57/$$

откуда, если воспользоваться /48/, и следует /54/.

Подчеркнем, что рассматриваемое прямолинейное движение длится на отрезке времени

$$t_0 - \sqrt{\frac{2K_0}{G}} \le t \le t_0 + \sqrt{\frac{2K_0}{G}} . \qquad /58/$$

Минимальная поверхность в частной краевой задаче в данном случае является областью на плоскости x, t, ограниченной дугой гиперболы

$$(x-\frac{c^2}{G}\mathcal{E})^2-c^2(t-t_0)^2=\frac{m^2c^4}{G^2} \qquad /59/$$

и ее хордой - отрезком оси времени /58/. Иначе говоря, эту область можно задать неравенствами

$$0 \leq x \leq \xi(t), \qquad /60/$$

где $\xi(t)$ равно /52/, а время t меняется в пределах /58/.

Заметим, что прямолинейное движение близко к нерелятивистскому, если безразмерный параметр $\frac{2K_0G}{c^2m^2}$ мал по сравнению с единицей. Это следует из неравенства

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \leq \frac{2K_0G}{c^2m^2}\,\frac{1}{1+\frac{2K_0G}{c^2m^2}}.$$

В общей краевой задаче минимальной поверхностью служит область на плоскости x, t, ограниченная дугами двух гипербол

$$(x+\frac{c^2}{G}\mathcal{E}_1)^2-c^2(t-t_0)^2=\frac{m_1^2c^4}{G^2},$$

$$(x-\frac{c^2}{G}\mathcal{E}_2)^2-c^2(t-t_0)^2=\frac{m_2^2c^4}{G^2}, \qquad /61/$$

стягиваемых общей хордой /58/. Постоянные $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ связаны условиями

$$\frac{c^2}{2}(\mathcal{E}_1^2-m_1^2)=GK_0=\frac{c^2}{2}(\mathcal{E}_2^2-m_2^2). \qquad /62/$$

Иначе говоря, эту область можно задать неравенствами

$$\xi_1(t) \leq x \leq \xi_2(t), \qquad /63/$$

где

$$\xi_1(t)=\frac{c^2}{G}\left[\sqrt{m_1^2+\frac{G^2(t-t_0)^2}{c^2}}-\mathcal{E}_1\right],$$

$$\xi_2(t)=\frac{c^2}{G}\left[\mathcal{E}_2-\sqrt{m_2^2+\frac{G^2(t-t_0)^2}{c^2}}\right], \qquad /64/$$

а время по-прежнему меняется в пределах /58/.

7. КРУГОВОЕ ДВИЖЕНИЕ

Круговое движение тел будем рассматривать в плоскости x,y. Воспользуемся векторными круговыми функциями [5]

$$\vec{e}(a) = \vec{i}\cos a + \vec{j}\sin a, \qquad \vec{g}(a) = -\vec{i}\sin a + \vec{j}\cos a \tag{65}$$

и будем искать функцию $\vec{K}(t)$ в виде $\vec{K}(t) = \lambda\vec{e}(\omega t)$, где λ и ω – постоянные. Из условия /33/ находим $\lambda\omega^2 = G$. Далее считаем:

$$\vec{K}(t) = \frac{G}{\omega^2}\vec{e}(\omega t), \quad \dot{\vec{K}}(t) = \frac{G}{\omega}\vec{g}(\omega t), \quad \ddot{\vec{K}} = -G\vec{e}(\omega t), \tag{66}$$

поэтому

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2}[\vec{K}(t-\frac{\eta}{c}) + \vec{K}(t+\frac{\eta}{c})] = \vec{K}(t)\cos\frac{\omega\eta}{c}, \\
\frac{1}{2}[\dot{\vec{K}}(t-\frac{\eta}{c}) - \dot{\vec{K}}(t+\frac{\eta}{c})] = \vec{K}(t)\,\omega\sin\frac{\omega\eta}{c}, \\
\frac{1}{2}[\dot{\vec{K}}(t-\frac{\eta}{c}) + \dot{\vec{K}}(t+\frac{\eta}{c})] = \dot{\vec{K}}(t)\cos\frac{\omega\eta}{c}, \\
\frac{1}{2}[\ddot{\vec{K}}(t-\frac{\eta}{c}) + \ddot{\vec{K}}(t+\frac{\eta}{c})] = \ddot{\vec{K}}(t)\cos\frac{\omega\eta}{c}, \\
\frac{1}{2}[G^2 + \ddot{\vec{K}}(t-\frac{\eta}{c})\ddot{\vec{K}}(t+\frac{\eta}{c})] = G^2\cos^2\frac{\omega\eta}{c}.
\end{gathered} \tag{67}$$

Согласно /34/, /35/, /36/ и /38/ получаем

$$\vec{x}(\eta, t) = \frac{c\omega}{G}\sin\frac{\omega\eta}{c}\vec{K}(t), \tag{68}$$

$$\vec{p}(t) = \cos\frac{\omega\xi(t)}{c}\dot{\vec{K}}(t), \tag{69}$$

$$\vec{x}(t) = \frac{c\omega}{G}\sin\frac{\omega\xi(t)}{c}\vec{K}(t), \tag{70}$$

$$p^\circ(t)\,\vec{x}(t) = \cos\frac{\omega\xi(t)}{c}\vec{K}(t). \tag{71}$$

Уравнение /39/ в данном случае означает:

$$p^\circ = \frac{G}{c\omega}\operatorname{ctg}\frac{\omega\xi}{c}. \tag{72}$$

Подставляя это выражение в /27/, видим, что ξ и p° не зависят от t.

Далее согласно /40/

$$p = \frac{G}{\omega}\left|\cos\frac{\omega\xi}{c}\right|, \quad p^\circ = \sqrt{m^2 + \frac{G^2}{c^2\omega^2}\cos^2\frac{\omega\xi}{c}}, \qquad /73/$$

а согласно /41/

$$p^\circ = \frac{m}{\left|\cos\frac{\omega\xi}{c}\right|}. \qquad /74/$$

Следовательно,

$$pp^\circ = \frac{mG}{\omega}. \qquad /75/$$

Импульс p и аддитивная масса p° выражаются через быстроту s следующим образом [6]:

$$p = mc\,\mathrm{sh}\frac{s}{c}, \quad p^\circ = m\,\mathrm{ch}\frac{s}{c}. \qquad /76/$$

Отсюда и из /75/ получаем трансцендентное уравнение

$$\mathrm{sh}\frac{2s}{c} = \frac{2G}{mc\omega} \qquad /77/$$

для быстроты s. Из /72/, /75/ и /76/ следует, что

$$\mathrm{tg}\frac{\omega\xi}{c} = \mathrm{sh}\frac{s}{c}. \qquad /78/$$

Поскольку параметр η на поверхности /68/ принимает значения меньшие, чем $\pi/2$, то из всех решений уравнения /78/ выбираем

$$\xi = \frac{c}{\omega}\,\mathrm{arctg}\,\mathrm{sh}\frac{s}{c}. \qquad /79/$$

Заметим, что угол $\pi/2 - \omega\xi/c$ является углом параллельности для отрезка длины s в пространстве скоростей.

Сохраняющиеся величины /27/ и /28/ равны соответственно

$$\mathcal{E} = \frac{m}{\cos\omega\xi/c} + \frac{G}{c^2}\xi, \qquad /80/$$

$$\mathfrak{M}_z = \frac{G}{2\omega}\left[\xi + \frac{c}{\omega}\sin\frac{\omega\xi}{c}\right], \qquad /81/$$

где $\mathfrak{M}_z$ - единственная отличная от нуля компонента момента $\vec{\mathfrak{M}}$.

Мировая минимальная поверхность /68/ в частной краевой задаче является геликоидом [7]. Что геликоид есть поверхность переноса, впервые заметил Софус Ли [8].

Поверхность /68/ удовлетворяет также и общей краевой задаче, если параметр η меняется в пределах $\xi_1 \le \eta \le \xi_2$, где

$$\xi_1 = -\frac{c}{\omega} \operatorname{arc\,tg} \operatorname{sh} \frac{s_1}{c},$$
$$\xi_2 = \frac{c}{\omega} \operatorname{arctg} \operatorname{sh} \frac{s_2}{c}, \qquad /82/$$

а быстроты s_1 и s_2 находятся из уравнений

$$\operatorname{sh} \frac{2s_1}{c} = \frac{2G}{m_1 c\omega}, \quad \operatorname{sh} \frac{2s_2}{c} = \frac{2G}{m_2 c\omega}. \qquad /83/$$

Круговое движение близко к нерелятивистскому, если безразмерные параметры в /83/ малы по сравнению с единицей.

В заключение обратим внимание на то, что функция /48/, определяющая прямолинейное движение, и функция /66/, определяющая круговое движение, удовлетворяют уравнению /3/.

Отметим также, что вопросы, аналогичные изученным здесь, рассматривались в теории релятивистской струны /9/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черников Н.А., Шавохина Н.С. ТМФ, 1980, т.42, №1.
2. Черников Н.А., Шавохина Н.С. В кн.: Труды Международного совещания по нелокальным теориям поля. Алушта, 1979. ОИЯИ, Р2-12462, Дубна, 1979.
3. Черников Н.А., Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-12813, Дубна, 1979.
4. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. "Наука", М., 1971.
5. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. Физматгиз, М., 1958.
6. Черников Н.А. ЭЧАЯ, 1973, т.4, вып.3, с.773.
7. Норден А.П. Теория поверхностей. ГИТТЛ, М., 1956.
8. Каган В.Ф. Основы теории поверхностей, т.1, ГИТТЛ, М., 1948.
9. Chodos A., Thorn C.B. Nucl.Phys., 1974, B72, p.509.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 февраля 1980 года.