сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-80-732

Р.М.Ямалеев

РАСШИРЕННАЯ СИСТЕМА ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ КООРДИНАТ И ОБОБЩЕННАЯ ТРАНСЛЯЦИОННАЯ ГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1980

Первая часть настоящей работы была посвящена обоснованию и выводу расширенной системы классических величин: вектора момента импульса и радиуса-вектора. В нерелятивистском случае к радиусу-вектору $\vec{r}$ добавляется скалярная величина L и пара (L, $\vec{r}$) рассматривается как гамильтонов кватернион. При этом вектор момента импульса

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}]$$

объединяется в один объект со скаляром

$$\mathcal{S} = (\vec{p}\vec{r}),$$

образуя кватернион $(\mathcal{S}, \vec{M})$.

В релятивистском случае пространство измерений становится восьмимерным.

Подобное расширение пространственно-временных переменных мы будем воспринимать как реальное расширение пространства измерений. Напомним, что данное расширение возникло в результате приведения выражений классической механики для момента импульса в соответствие с квантовомеханическим уравнением движения для спина 1/2.

В настоящей работе мы ограничимся физической интерпретацией скалярной величины L в рамках нерелятивистской механики. Для релятивистской области мы проведем лишь формальное рассмотрение вопроса.

I. Преобразование координат для взаимно удаленных систем отсчета (СО)

Традиционный принцип относительности гласит, что описание физических процессов во всех инерциально движущихся относительно друг друга СО одинаково. При этом единственным параметром, отличающим рассматриваемые СО, является их относительная скорость.

В нерелятивистском случае формулы преобразования координат есть трехпараметрическая группа преобразований Галилея, в релятивистском – группа преобразований Лоренца. В том и в другом случае параметрами группы являются компоненты вектора скорости.

Однако СО не только движутся относительно друг друга, но и находятся в различных областях пространства. Традиционный принцип относительности рассматривает взаимно удаленные СО, неподвижные относительно друг друга, как тождественные в отношении изменения масштабов расстояний и промежутков времени. Расширение пространства измерений путем объединения скалярной и векторной величин в кватернион позволяет пересмотреть формулы преобразования координат при трансляции СО.

Рассмотрим две СО $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$, координатными осями которых являются декартовы координатные системы, такие, что СО $\mathcal{S}'$ получена из $\mathcal{S}$ путем трансляции на вектор $\vec{A}$. Для простоты ограничимся случаем трансляции по оси X, так что формулы преобразования координат будут иметь вид

$$x' = x - A, \quad y' = y, \quad z' = z \,. \tag{I}$$

Подвергнем координаты в СО $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$ масштабному преобразованию. Получим

$$\ell' x' = \ell x - A\ell, \quad \ell' y' = \ell y, \quad \ell' z' = \ell z \,. \tag{2}$$

Здесь ℓ и ℓ' – параметры масштабного преобразования в СО $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$. Если $\ell' = \ell$, то все координаты подвергаются одинаковому масштабному преобразованию, СО $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$ полностью идентичны. Иначе обстоит дело, если $\ell' \neq \ell$. Тогда для описания события необходимо ввести еще одну переменную – параметр масштабного преобразования. Какими будут формулы преобразования координат и параметра ℓ в этом случае? С целью ответить на поставленный вопрос введем некоторую константу размерности длины R и положим

$$L = R\ell \,. \tag{3}$$

Длина 4-вектора $(L, \vec{r})$ инвариантна относительно четырехмерных вращений. В данном случае наиболее интересным является поворот в плоскости (L, X):

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - L\sin\theta \,, \\ L &= x\sin\theta + L\cos\theta \,. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь θ – угол поворота, формулу преобразований (4) можно параметризовать также следующим образом:

$$x' = \frac{x - \alpha L}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \qquad L' = \frac{L + \alpha x}{\sqrt{1+\alpha^2}}. \tag{5}$$

Между параметрами θ и α имеет место следующая связь:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \qquad \sin\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

При $R \to \infty$ формулы преобразования (5) должны будут переходить в формулы (2) при $\ell' = \ell$. Это возможно, если принять

$$\alpha = \frac{A}{R}, \quad x' = \ell' x', \quad x = \ell x. \tag{6}$$

С учетом (6) формулы (5) примут вид

$$\ell' x' = \frac{x\ell - A\ell}{\sqrt{1 + A^2/R^2}}, \qquad \ell' = \frac{\ell + \frac{A}{R^2} x \ell}{\sqrt{1 + A^2/R^2}}. \tag{7}$$

Последние удовлетворяют поставленному условию: при $R \to \infty$ формулы (7) переходят в формулы (2), причем $\ell' = \ell$. Таким образом, мы получили формулы преобразования для СО, взаимно удаленных друг от друга. Параметрами группы преобразования в этом случае являются компоненты вектора A.

Из формул преобразования (7) можно исключить параметр ℓ и получить тем самым нелинейные преобразования для x, y, z. Имеем

$$x' = \frac{x - A}{1 + \frac{Ax}{R^2}},$$

$$y' = \frac{y\sqrt{1 + A^2/R^2}}{1 + \frac{Ax}{R^2}}, \qquad z' = \frac{z\sqrt{1 + A^2/R^2}}{1 + \frac{Ax}{R^2}}. \tag{8}$$

В общем случае формула сложения двух векторов, $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$, будет иметь вид

$$\vec{r}_C^{\,2} = \frac{\vec{r}_A^{\,2} + \vec{r}_B^{\,2} - 2(\vec{r}_A \vec{r}_B) - [\vec{r}_A \times \vec{r}_B]^2/R^2}{1 + \frac{(\vec{r}_A \vec{r}_B)}{R^2}}. \tag{9}$$

Формулы преобразования (8) и (9) аналогичны формулам сложения скоростей в специальной теории относительности, однако в данном случае пространство координат $\{x, y, z\}$ образует гиперсферу радиуса R, в то время как пространство скоростей есть пространство Лобачевского.

2. Некоторые основные соотношения классической механики в кватернионной записи

Уравнения классической механики, записанные в векторной форме, естественно, не ковариантны относительно трансляционной группы преобразований. Как было показано выше на примере выражения для момента импульса, в расширенном пространстве трехмерные вектора трансформируются в гамильтоновы кватернионы. В частности, радиус-вектор может быть представлен в виде

$$\hat{r} \equiv (r_\ell, \vec{r}). \tag{10}$$

Здесь r_ℓ представляет скалярную часть, $\vec{r}$ – векторную часть кватерниона. Кватернион скорости есть производная по времени от $\hat{r}$:

$$\hat{v} \equiv (v_\ell, \vec{v}) = \left(\frac{dr_\ell}{dt}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right). \tag{11}$$

Далее, предположим обычную связь между импульсом и скоростью:

$$\hat{p} \equiv (p_\ell, \vec{p}) = m(v_\ell, \vec{v}). \tag{12}$$

В приведенных обозначениях закон Ньютона будет выглядеть так:

$$\hat{F} \equiv (F_\ell, \vec{F}) = \frac{d}{dt}(p_\ell, \vec{p}). \tag{13}$$

В кватернионной записи выражения для момента импульса можно представить в следующей компактной форме:

$$\hat{M} = (M_\ell, \vec{M}) = (p_\ell, -\vec{p})(r_\ell, \vec{r}). \tag{14}$$

С целью получить уравнение движения для момента импульса продифференцируем выражение (14) по времени. Получим

$$\frac{d\hat{M}}{dt} = (N_\ell + 2E, \vec{N}). \tag{15}$$

При выводе уравнения (I5) мы воспользовались следующими определениями энергии и момента силы:

$$(E, 0) \equiv \hat{P}^2/2m = \frac{1}{2m}(P_\ell, -\vec{P})(P_\ell, \vec{P}), \tag{I6}$$

$$\hat{N} \equiv (N_\ell, \vec{N}) = (F_\ell, -\vec{F})(r_\ell, \vec{r}). \tag{I7}$$

Как видно из уравнения (I5), энергия и момент силы объединяются в один кватернион. Отсюда следует интересное следствие. Допустим, в какой-то системе отсчета мы достигли того, чтобы выражение для энергии имело вид

$$\hat{E} = (E, 0).$$

При трансляции системы отсчета на вектор $\vec{A}$ появится векторная часть кватерниона $\hat{E}$, так что

$$\hat{E} \equiv (E, 0) \rightarrow \hat{E} \equiv (E_\ell, \vec{E}).$$

С другой стороны, данное выражение можно преобразовать так, чтобы оно приняло форму правой части уравнения (I5), которое приравнивается производной по времени от момента импульса.

Представляя физические величины через кватернионы, мы тем самым объединили два вида операций: скалярное и векторное произведения векторов в одно - в произведение кватернионов. Как известно из классической механики, скалярное произведение приращения радиуса-вектора на приложенную силу равно работе силы, т.е. изменению энергии

$$(\Delta \vec{r} \cdot \vec{F}) = \Delta E, \tag{I8}$$

а векторное произведение этих же величин есть изменение момента сил

$$[\Delta \vec{r} \times \vec{F}] = \Delta N. \tag{I9}$$

Равенства (I8) и (I9) можно объединить в одно с помощью кватернионного представления векторов

$$(0, \Delta \vec{r})(0, \vec{F}) = \Delta (E, \vec{N}). \tag{20}$$

Итак, энергия и момент силы объединяются в один кватернион. Подобное объединение нетривиально, если рассматривать его с точки зрения ковариантности относительно трансляционной группы преобразования. В качестве иллюстрации приведем один простой пример. Допустим, в какой-то системе отсчета мы наблюдаем движение тела под действием силы, перпендикулярной к скорости движения. Тогда согласно (I8) и (I9) имеем:

$$\frac{dE}{dt} = 0\,, \quad \frac{d\vec{N}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{F}\right] \tag{21}$$

или

$$(0, \vec{v})(0, \vec{F}) = \left(0, \frac{d\vec{N}}{dt}\right). \tag{22}$$

Если перейти в другую систему отсчета, полученную из исходной путем трансляции на вектор $\vec{A}$ по оси X , то получим

$$\frac{dN_\ell'}{dt} = \frac{\frac{A_x}{R}\,\frac{dN_x}{dt}}{\sqrt{1+A^2/R^2}}\,, \quad \frac{dN_x'}{dt} = \frac{\frac{dN_x}{dt}}{\sqrt{1+A^2/R^2}}\,. \tag{23}$$

Таким образом, относительно транслированной системы отсчета за время Δt получим вклад в энергию движения, равный

$$\Delta E = \Delta N_\ell' = \frac{\frac{A_x}{R}\,\Delta N_x}{\sqrt{1+A^2/R^2}}\,. \tag{24}$$

Формула (24) есть приращение кинетической энергии тела, движущегося под действием силы, перпендикулярной к скорости движения. Этот вывод, естественно, не согласуется с положением из обычной классической механики, согласно которому силы, перпендикулярные скорости движения, не совершают работы, т.е. не меняют кинетическую энергию тела. Однако, как это видно из (24), величина данного эффекта порядка $|A/R|$ исчезает при $R \to \infty$.

Рамки настоящей работы, к сожалению, не позволяют сколько-нибудь полно изложить основы классической механики в расширенном пространстве измерений. Здесь лишь отметим, что расширенная форма классической механики является по сути квазиклассическим пределом квантовой механики спина I/2.

3. Расширенное пространство измерений в специальной теории относительности

В специальной теории относительности временная и пространственные координаты объединяются в один четырехмерный вектор в пространстве Минковского. В этом случае матрица $\hat{X}$ записывается в следующем виде:

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} -it & 0 & iz & y+ix \\ 0 & -it & -y+ix & -iz \\ -iz & -y-ix & it & 0 \\ y-ix & iz & 0 & it \end{pmatrix}. \qquad (25)$$

В первой части настоящей работы было показано, что матрица (25) должна быть дозаполнена еще четырьмя величинами, только в этом случае уравнение для момента импульса (3I, часть I) в квантовой области переходит в уравнение для спина I/2. С кинематической точки зрения ситуация такова. Матрица $\hat{X}$ из (25) ковариантна относительно группы трехмерных вращений и преобразований Лоренца, однако не ковариантна относительно трансляционных преобразований. Ковариантную форму имеет матрица координат, записанная в форме

$$\hat{X} = \left(\begin{array}{cc|cc} -it+t_z & -it_y+t_x & iz+L & y+ix \\ it_y+t_x & -it-t_z & -y+ix & -iz+L \\ \hline -iz+L & -y-ix & it+t_z & -it_y+t_x \\ y-ix & iz+L & it_y-t_x & it-t_z \end{array}\right). \qquad (26)$$

Матрицу $\hat{X}$ можно записать также в более компактной форме:

$$\hat{X} = \left(\begin{array}{c|c} -iq_t & q_x \\ \hline \bar{q}_x & i\bar{q}_t \end{array}\right), \qquad (27)$$

где q_t и q_x – гамильтоновы кватернионы.

Выражения (26) и (27), однако, не есть матрицы в общепринятом смысле. Представление восьмимерного пространства в виде матриц (26) или (27) оказывается правомерным только в специальных случаях. В общем случае, при подобном расширении числа измерений пространства, матрица координат (25) переходит в октаву, состоящую из двух кватернионов: q_t и q_x. Квадрат такой октавы имеет вид

$$Q\bar{Q} = \vec{z}^2 + L^2 - t^2 - \vec{t}^2.$$

Это так называемые антиоктавы, или расщепленные октавы.

Таким образом, в рамках специальной теории относительности пространство-время становится восьмимерным. При этом к трем пространственным координатам добавляется четвертое измерение, образуя тем самым пространственный кватернион. К одной временной координате добавляется трехмерный вектор, образуя тем самым временной кватернион.

В выражение для интервала временные и пространственные координаты входят с разными знаками.

Интерпретация вектора времени выходит за рамки настоящей работы и требует специального исследования. Здесь лишь напомним, что введение вектора времени, так же как и введение 4-го пространственного измерения, обусловлено требованием принципа соответствия между квантовой механикой спина I/2 и классической механикой.

Автор глубоко признателен Д.А.Пестову за стимулирующие дискуссии и ценные замечания.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 ноября 1980 года.