сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-80-731

Р.М.Ямалеев

ОБ ОДНОЙ РАСШИРЕННОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

1980

Известно, что между уравнением Гамильтона-Якоби (ГЯ) из классической механики и уравнением Шредингера из квантовой механики имеет место определенное соответствие: уравнение Шредингера переходит в уравнение ГЯ в предельном случае - при стремлении к нулю постоянной Планка.

В рамках специальной теории относительности подобное соответствие существует между релятивистским уравнением ГЯ и уравнением Клейна-Гордона. В этой схеме соответствий весьма значительный интерес представляет соответствие между квантовомеханическими уравнениями, описывающими частицы со спином, и уравнениями классической механики. В работе /I/ получено определенное соответствие между классической теорией момента импульса, развитой аналогично теории ГЯ для векторной функции действия, и квантовой механикой для спина I, т.е. уравнением Паули для спина I в нерелятивистском случае и обобщенным уравнением Прока - в релятивистском. Выводу соответствия между квантовомеханическими уравнениями, описывающими спин I/2, и расширенной системой уравнений классической механики для момента импульса посвящена настоящая работа.

I. НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

I. Классические выражения для момента импульса и квантовомеханическое уравнение для спина I

Как известно, в классической механике момент импульса определяется через радиус-вектор $\vec{r}$ и вектор импульса $\vec{p}$:

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}] . \tag{I}$$

Из (I), пользуясь основным соотношением классической механики

$$E = \frac{p^2}{2m} ,$$

можно выразить радиус-вектор $\vec{r}$ через вектора $\vec{M}$ и $\vec{p}$. Получим

$$2mE\,\vec{r} = [\vec{p}\times\vec{M}] + \vec{p}s \quad , \tag{2}$$
$$s = (\vec{p}\vec{r}).$$

Систему уравнений (I), (2) будем рассматривать как систему однородных алгебраических уравнений на величины s, $\vec{r}$, $\vec{M}$. Определитель D данной системы равен нулю, поскольку

$$D = 2mE - p^2 = 0. \tag{3}$$

Линейно-независимыми решениями системы (I),(2) являются компоненты вектора $\vec{r}$. Уравнения (I)-(2) трансформируются в квантовомеханические, если величины E и $\vec{p}$ заменить на соответствующие операторы согласно общепринятому рецепту

$$E \longrightarrow \hat{\pi}_0 = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\varphi \, , \quad \vec{p} \longrightarrow \hat{\vec{\pi}} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \frac{e}{c}\vec{A} \quad , \tag{4}$$

здесь (φ, $\vec{A}$) - компоненты потенциала электромагнитного поля. При этом функции s, $\vec{r}$, $\vec{M}$ соответственно необходимо рассматривать как волновые функции.

Переход от уравнений (I)-(2) к квантовомеханическим дифференциальным уравнениям можно осуществить более последовательно через теорию ГЯ/I/.

Согласно теории ГЯ импульс и энергия выражаются через функцию действия следующим образом:

$$E = -\frac{\partial S}{\partial t}\, , \quad \vec{p} = \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} \quad . \tag{5}$$

Тогда

$$\mathrm{div}\vec{M} = \mathrm{div}[\vec{r}\times \mathrm{grad} S] = 0.$$

Таким образом, $\vec{M}$ можно представить как ротор от некоторой векторной функции $\vec{U}$:

$$\vec{M} = \mathrm{rot}\,\vec{U} \, . \tag{6}$$

Это значит, что $\vec{U}$ и $\vec{r}$ связаны между собой соотношением

$$\vec{r} = -\frac{\partial \vec{U}}{\partial S} \, . \tag{7}$$

Учитывая (5),(6),(7), уравнения (I)-(2) можно записать в виде

$$\begin{gathered} \vec{M} = \mathrm{rot}\,\vec{U} \quad , \\ -2m\,\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = [\vec{p}\times\vec{M}] + \vec{p}s \, , \\ s = \mathrm{div}\,\vec{U} \, . \end{gathered} \tag{8}$$

Вообще говоря, уравнения (8), так же как и уравнения ГЯ, могут оказаться полезными при решении некоторых задач классической механики. Но в данном случае они представляют прежде всего методический интерес. Уравнения (8) свидетельствуют о существовании более общих волновых уравнений, эйкональным (квазиклассическим) приближением которых они являются. В общем случае эти уравнения имеют вид:

$$\vec{M} = [\vec{\pi} \times \vec{U}],$$
$$2m\hat{\pi}_0\vec{U} = [\hat{\vec{\pi}} \times \vec{M}] + \hat{\vec{\pi}}\, s, \qquad (9)$$
$$s = (\hat{\vec{\pi}}\ \vec{U}) .$$

Уравнения (9) есть система дифференциальных уравнений первого порядка. С целью показать, что данная система соответствует спину I, запишем ее в виде уравнения второго порядка. Имеем

$$\hat{\pi}_0\vec{U} = \frac{1}{2m}\hat{\vec{\pi}}^2\ \vec{U} + \frac{e\hbar}{2mc}[\vec{\mathcal{H}} \times \vec{U}] , \qquad (10)$$

$\vec{\mathcal{H}}$ - напряженность магнитного поля.

Последнее слагаемое в (I0) характеризует взаимодействие спина I с магнитным полем. Действительно, выражение в квадратных скобках можно переписать в виде

$$[\vec{\mathcal{H}} \times \vec{U}] = (\hat{\vec{\tau}} \cdot \vec{\mathcal{H}})\vec{U} , \qquad (11)$$

где операторы $\hat{\tau}_i$ имеют вид

$$\tau_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и соответствуют спину I.

Таким образом, уравнение (I0) есть не что иное, как уравнение Паули для спина I.

2. Представление 3-мерного вектора в виде матрицы 2-го порядка и уравнение Паули для спина I/2

Если 3-мерный вектор

$$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k} \qquad (12)$$

рассматривать как усеченный кватернион, то, как известно, ему можно сопоставить матрицу 2-го порядка вида

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} iz & y+ix \\ -y+ix & -iz \end{pmatrix} . \tag{I3}$$

Матричное представление вектора обладает тем преимуществом, что матрицу $\hat{r}$ можно рассматривать как оператор, действующий в двумерном комплексном пространстве, которое соответствует пространству спиноров. В этом случае в качестве длины вектора $\vec{r}$ выступает собственное значение оператора $\hat{r}$, определяемое соотношением

$$-i\hat{r}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} , \tag{I4}$$

где $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ - спинор, $\lambda = \pm |\vec{r}|$.

Аналогично (I3) зададим оператор импульса в виде

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} ip_z & p_y+ip_x \\ -p_y+ip_x & -ip_z \end{pmatrix} . \tag{I5}$$

Пользуясь определением (I5), запишем следующую систему однородных уравнений с определителем, равным нулю:

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = -\hat{p}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} ,$$

$$2mE\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \hat{p}\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} . \tag{I6}$$

Если E и $\vec{p}$ рассматривать как дифференциальные операторы согласно (4), то уравнения (I6) есть не что иное, как уравнения Паули для спина I/2. В этом случае

$$-\hat{p}^2 = \hat{\vec{\pi}}^2 + \frac{e\hbar}{c}(\hat{\sigma}\vec{\mathcal{H}}), \tag{I7}$$

где $\hat{\sigma}_i$ - матрицы Паули.

3. Система уравнений Паули для спина I/2 в кватернионном представлении

Итак, появление члена взаимодействия с магнитным полем вида $(\hat{\sigma}\vec{\mathcal{H}})$ в гамильтониане характерно для спина I/2. Уравнения для спина I (I0) также можно переписать так, чтобы в гамильтониане вместо взаимодействия вида $(\hat{\tau}\vec{\mathcal{H}})$ присутствовало взаимодействие $(\hat{\sigma}\vec{\mathcal{H}})$, характерное для спина I/2. Однако это возможно только при выполнении дополнительного условия

$$(\vec{\mathcal{H}}\,\vec{U}) = 0. \tag{18}$$

Перепишем систему алгебраических уравнений (I)-(2) в следующем виде:

$$\hat{M} = \hat{p}\hat{r}\,,$$
$$2mE\hat{r} = -\hat{p}\hat{M}\,, \tag{19}$$

где $\hat{M}$ - матрица вида

$$\hat{M} \equiv \begin{pmatrix} iM_z - s & M_y + iM_x \\ -M_y + iM_x & iM_z - s \end{pmatrix},$$

а матрицы $\hat{r}$ и $\hat{p}$ определены в (I3) и (I5). Систему уравнений (I9) можно записать в виде одного уравнения, записанного в матричной форме:

$$2mE\hat{r} = -\hat{p}^2\,\hat{r}\quad. \tag{20}$$

Далее, если в (20) произвести замену (4) и учесть соотношение (I7), то вместо уравнения (20) получим дифференциальное уравнение второго порядка для функции $\vec{U}$:

$$2m\,\hat{\pi}_0\hat{U} = \hat{\vec{\pi}}^2\hat{U} + \frac{e\hbar}{c}\,(\hat{\sigma}\vec{\mathcal{H}})\,\hat{U}\,, \tag{21}$$

при условии $(\vec{\mathcal{H}}\,\vec{U}) = 0.$

Здесь матрица $\hat{U}$ имеет такой же вид, что и матрица $\hat{r}$, т.е.

$$\hat{U} \equiv \begin{pmatrix} iU_z & U_y + iU_x \\ -U_y + iU_x & -iU_z \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для перехода от уравнения (2I) к уравнению типа Паули для спина I/2 необходимо избавиться от дополнительного условия (I8). Если в уравнениях (I6) оператор $\hat{p}$ переводит объекты одной природы в объекты той же природы, то в уравнениях (I9) матрица $\hat{r}$ по сравнению с матрицей $\hat{M}$ оказывается недозаполненной. Именно в этом и состоит причина появления дополнительного условия (I8). Дозаполним матрицу $\hat{r}$ путем присоединения к вектору $\vec{r}$ одной скалярной переменной L, так что

$$\vec{r} \longrightarrow (L,\vec{r})\,,\quad \text{где}$$

$$(L,\vec{r}) \equiv \hat{r} = \begin{pmatrix} iz+L & y+ix \\ -y+ix & -iz+L \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Если матрицу $\hat{r}$ из (22) подставить в (20), то условие (I8) в уравнении (2I) исчезает и уравнение (2I) в принципе не может быть редуцировано до уравнения (I0), т.е. данное уравнение будет уже пригодно для описания спина I/2.

Система уравнений (I)-(2) в результате введения новой скалярной величины L преобразуется к виду

$$
\begin{aligned}
2mEL &= (\vec{p}\vec{M}), \\
\vec{M} &= [\vec{r} \times \vec{p}] + \vec{p}L, \\
2mE\vec{r} &= [\vec{p} \times \vec{M}] + \vec{p}s, \\
s &= (\vec{p}\vec{r}).
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Примем следующее обозначение для матриц $\hat{M}$, $\hat{r}$ и $\hat{p}$:

$$
\hat{M} \equiv (-s,\vec{M}) , \quad \hat{r} \equiv (L,\vec{r}) , \quad \hat{p} = (0,\vec{p}). \tag{24}
$$

Тогда систему уравнений (23) можно переписать в компактной форме:

$$
\begin{aligned}
(-s,\vec{M}) &= (0,\vec{p})(L, \vec{r}), \\
2mE(L, \vec{r}) &= (0,-\vec{p})(-s,\vec{M}).
\end{aligned}
\tag{23'}
$$

Как видно из матричных представлений, пары типа (24) являются гамильтоновыми кватернионами.

В уравнениях (23') произведем замену (4), а также заменим $(L, \vec{r})$ кватернионом $(U_\ell, \vec{U})$. Получим следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$
\begin{aligned}
(-s,\vec{M}) &= (0,\hat{\vec{\pi}})(U_\ell,\vec{U}), \\
2m\hat{\pi}_0(U_\ell,\vec{U}) &= (0, -\hat{\pi})(-s,\vec{M}).
\end{aligned}
$$

Перепишем данные уравнения в виде уравнений второго порядка для $(U_\ell, \vec{U})$ в более подробном виде:

$$
\begin{aligned}
2m\hat{\pi}_0 U_\ell &= \hat{\vec{\pi}}^2 U_\ell + \frac{ie\hbar}{c}(\vec{\mathcal{H}}\vec{U}), \\
2m\hat{\pi}_0\vec{U} &= \hat{\vec{\pi}}^2\vec{U} - \frac{ie\hbar}{c}[\vec{\mathcal{H}} \times \vec{U}] - \frac{ie\hbar}{c}\vec{\mathcal{H}}\, U_\ell .
\end{aligned}
$$

Записанная система уравнений совпадает с нерелятивистскими уравнениями работы /2/. Эти уравнения есть не что иное, как уравнения Паули для спина I/2 в кватернионном представлении.

П. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

I. Классические выражения для тензора момента импульса и уравнение Прока для спина I

Как известно, уравнения для спина I в релятивистском случае получаются путем факторизации оператора Клейна-Гордона в базисе векторных функций. Факторизованные уравнения в классическом пределе соответствуют конкретному представлению тензора момента импульса. Будем рассматривать тензор момента импульса в общепринятой форме:

$$M_{ij} = x_i p_j - x_j p_i \,., \tag{25}$$

С целью получить систему уравнений, аналогичную (I)-(2), умножим (25) на p^i и просуммируем по i. Учитывая, что

$$p^i p_i = -m_o^2 \quad , \tag{26}$$

получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} -m_o^2\, x_j &= p^i M_{ji} + p_j s \quad , \\ s &= p^i x_i \quad . \end{aligned} \tag{27}$$

Однородная система уравнений (27) имеет определитель, равный нулю в силу соотношения (26). Линейно-независимыми решениями системы являются компоненты вектора x_i. Если в системе (27) произвести замену вектора p_i на соответствующие квантовомеханические операторы согласно (4), то уравнения (27) трансформируются в известные обобщенные уравнения Прока /3/.

2. Расширение системы уравнений Прока и описание спина I/2

Уравнения (27) можно обобщить аналогично тому, как мы это делали для нерелятивистской системы (I)-(2). Выражения (27) содержат две операции: операции внешнего и внутреннего умножений с вектором импульса p_i. При этом внешнее произведение увеличивает ранг трензора на единицу, а внутреннее - уменьшает. Закономерность для системы (27)такова,что тензор ранга $n+1$ получается как сумма внутреннего произведения импульса с тензором ранга $n-1$. Таким образом, для 4-мерного пространства представляется естественным следующее обобщение уравнений (27):

$$
\begin{aligned}
K_{ijk\ell} &= L_{ijk}p_\ell - L_{jk\ell}p_i + L_{k\ell i}p_j - L_{\ell ij}p_k ,\\
-m_o^2 L_{ijk} &= p_i M_{jk} + p_j M_{ki} + p_k M_{ij} + p^\ell K_{i\ell jk} ,\\
M_{ij} &= x_i p_j - x_j p_i + p^\ell L_{\ell ij} ,\\
-m_o^2 x_i &= p_i s + p^\ell M_{i\ell} ,\\
s &= p^\ell x_\ell .
\end{aligned}
\qquad (28)
$$

Определитель системы (28) в силу соотношения (26) также равен нулю. Линейно-независимыми векторами являются величины x_i и $L_{ij\ell}$. Антисимметричный по всем индексам тензор 3-го ранга $L_{ij\ell}$ является обобщением скаляра L на релятивистский случай. Он имеет 4 независимые компоненты.

Если в уравнениях (28) вектор импульса p_i заменить на соответствующие квантовые операторы согласно (4), то получим волновые уравнения, рассмотренные в работах /4,5,6/.

Теперь проделаем те же обобщения уравнений (27), записывая их в матричной форме. Введем следующую матрицу импульса:

$$
\hat{p} \equiv \begin{pmatrix} -iE & 0 & ip_z & p_y+ip_x \\ 0 & -iE & -p_y+ip_x & -ip_z \\ -ip_z & -p_y-ip_x & iE & 0 \\ p_y-ip_x & ip_z & 0 & iE \end{pmatrix} , \qquad (29)
$$

или $\hat{p} = p_o\gamma_o + p_k\gamma_k$,

где γ_o , γ_k $(k=1,2,3)$ – матрицы Дирака-Паули. Аналогично введем матрицу координат

$$
\hat{x} \equiv \begin{pmatrix} -it & 0 & iz & y+ix \\ 0 & -it & -y+ix & -iz \\ -iz & -y-ix & it & 0 \\ y-ix & iz & 0 & it \end{pmatrix} . \qquad (30)
$$

Пользуясь матрицами (29) и (30), уравнения (27) можно переписать в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
\hat{M} &= \hat{p}\hat{x} ,\\
m^2\hat{x} &= -\hat{p}\hat{M} .
\end{aligned}
\qquad (31)
$$

Здесь матрица $\hat{M}$ имеет вид:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} iM_z+s & iM_x+M_y & T_z & -iT_y+T_x \\ iM_x-M_y & -iM_z+s & iT_y+T_x & -T_z \\ T_z & T_x-iT_y & s+iM_z & M_y+iM_x \\ T_x+iT_y & -T_z & iM_x-M_y & s-iM_z \end{pmatrix}. \qquad (32)$$

Если в уравнениях (3I) в матрице $\hat{P}$ сделать замену p_i на соответствующие операторы по схеме (4), то оператор Гамильтона не будет совпадать с оператором Гамильтона в уравнениях Дирака в присутствии внешнего электромагнитного поля. Операторы Гамильтона в указанных уравнениях совпадут, если дозаполнить матрицу симметричным образом. Такая матрица будет выглядеть так:

$$\hat{x} = \left(\begin{array}{cc|cc} t_z-it & -it_y+t_x & iz+L & y+ix \\ it_y+t_x & -t_z-it & -y+ix & -iz+L \\ \hline -iz+L & -y-ix & t_z+it & -it_y+t_x \\ y-ix & iz+L & it_y-t_x & -t_z+it \end{array}\right). \qquad (33)$$

Если матрицу (33) подставить в уравнения (3I), то получим систему, в точности совпадающую с системой уравнений (28), что можно проверить непосредственно, путем перемножения матриц. Очевидно, что полученные уравнения отвечают спину I/2. С другой стороны, уравнения (28) являются обобщением уравнений (27), соответствующих спину I.

Здесь необходимо сделать следующее замечание. В общем случае представление восьмимерного пространства координат в виде матрицы (33) перестает быть справедливым. На самом деле расширенное пространство измерений состоит из пары кватернионов: кватерниона пространственных координат

$$\alpha_r = (L, \vec{r})$$

и кватерниона "времени"

$$\beta_t = (t, \vec{t}) .$$

Пара кватернионов

$$Q = (\alpha_r, \beta_t)$$

составляет так называемую расщепленную октаву с правилом умножения

$$Q(\alpha,\beta)\, Q(\gamma,\delta) = Q(\alpha\gamma + \bar{\delta}\beta,\ \delta\alpha + \beta\bar{\gamma}).$$

Квадрат такой октавы имеет вид

$$Q\bar{Q} = \vec{r}^2 + L^2 - t^2 - \vec{t}^2.$$

В заключение отметим некоторые особенности настоящего сообщения.

В работе установлена связь (или соответствие) между пространством измерений и пространством компонент волновых функций некоторых квантовых уравнений. Прежде всего ,установлена определенная связь между классическим выражением для момента импульса и радиуса-вектора и компонентами волновой функции уравнения Паули для спина I в нерелятивистском случае и уравнений Прока - в релятивистском. Установление подобной связи для спина I/2 в рамках обычной классической механики невозможно: необходимо расширить данные рамки. Здесь уместно отметить, что попытка расширить традиционную классическую механику с целью получить определенное соответствие с уравнением Дирака была предпринята в работе /7/. В указанной работе предлагалось ввести в качестве новой степени свободы антикоммутирующие переменные и с их помощью вводилось в классическую механику понятие спина. При этом уравнения Дирака имеют вид условия связи, где компоненты импульса заменены на соответствующие операторы. В настоящей работе поиски соответствия квантовой механики спина I/2 с классической механикой привели к расширению системы пространственно-временных координат. В нерелятивистском случае к вектору добавляется скаляр, дополняя первый до кватерниона. В этом случае уравнение Паули для спина I расширяется до уравнения, соответствующего спину I/2. Это уравнение по структуре оператора Гамильтона совпадает с обычным уравнением Паули для спина I/2, но в качестве волновой функции выступает полностью заполненная эрмитова матрица, действующая в базисе спиноров. В релятивистском случае подобная процедура приводит к расширению системы уравнений Прока. Оператор Гамильтона расширенного уравнения совпадает с оператором Дирака и соответствует спину I/2. Однако если оператор Дирака действует на спинорную волновую функцию, то в случае расширенной системы уравнений мы имеем дело с волновой функцией, заданной в виде матрицы 4-го порядка. Соответственно пространство измерений становится восьмимерным с сигнатурой (+ + + + - - - -). Такое восьмимерное пространство можно разбить на два кватерниона; первый кватернион будет состоять из пары скаляр+3-мерный вектор координат; второй - из пары скаляр времени+3-мерный вектор времени. Физическая интерпретация подобного рода расширения пространства измерений предполагает интересное обобщение известных классический положений.

Автор глубоко признателен проф. В.Г.Кадышевскому и А.Б.Пестову за полезные дискуссии и ценные замечания.

Литература

1. Ямалеев Р.М. ОИЯИ,Р4-12774, Дубна (1979);
ОИЯИ, Р2-80-619, Дубна (1980).
2. Пестов А.Б. ОИЯИ, Р2-12557, Дубна (1979).
3. Proca A. Compt. Rend. 202, 1420 (1936);
Young J.A., Bludman S.A. Phys. Rev. 131, 5, 2326 (1963).
4. Пестов А.Б. ТМФ, I, 34 (1978);
ОИЯИ, Р2-9842, Дубна (1976).
5. Lanczos C.Z. Physik, 57, 484 (1929).
6. Cercignani C.J. Math. Phys., 8, 3 (1967).
7. Березин Ф.А., Маринов М.С. Письма в ЖЭТФ, 21,11,678 (1975).

Рукопись поступила в издательский отдел
12 ноября 1980 года.