объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-80-728

К.В.Рерих

УРАВНЕНИЯ ЧУ-ЛОУ КАК ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КРЕМОНА. СТРУКТУРА ОБЩИХ ИНТЕГРАЛОВ

Направлено в ТМФ

1980

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения Чу-Лоу для p-волн πN-рассеяния, предложенные [1] более 20 лет назад, представляют собой простейший пример нетривиальной модели, в которой одновременно учитываются такие фундаментальные требования дисперсионного подхода, как аналитичность, унитарность и перекрестная симметрия [2].

Как известно[6], переход к нелинейной краевой задаче на матричные элементы S-матрицы и введение униформизующей переменной

$$w = \frac{1}{\pi} \arcsin \omega ,$$

где ω - энергия пиона в лабораторной системе, позволяет свести проблему нахождения всех решений уравнений Чу-Лоу и им подобных к решению следующей системы нелинейных разностных уравнений вида[6,9]

$$S_i(w) \cdot S_i(1-w) = 1,$$

$$S_i(w+1) = \frac{1}{\sum\limits_j A_{ij} S_j(w)} \qquad /1/$$

в классе мероморфных действительных функций комплексного переменного w /мы не выписываем здесь условия порогового поведения и поведения в борновском полюсе/. Здесь $S_j(w)$ - матричные элементы S-матрицы в состояниях j, A_{ij} - элементы матрицы кроссинг-симметрии $(n \times n)$ со свойствами

$$A^2 = E, \quad \sum_j A_{ij} = 1.$$

Таким образом, система уравнений /1/ представляет собой привлекательную, но весьма трудную нелинейную задачу, решение которой, как и любой нелинейной системы, представляет самостоятельный интерес. Общее решение системы /1/ найдено пока только для матрицы $A(2\times 2)$[3-5].

В работе[6] был развит метод построения класса решений /1/, являющихся рациональными функциями w с возможным усложнением их путем введения известного[6] $\beta(w)$- и $D(w)$ - произвола $S_i(w) \to S_i(w+\beta(w)) \cdot D(w)$. Однако в[7] было показано, что этим классом не исчерпываются все решения, и были найдены решения, являющиеся трансцендентными мероморфными функциями.

В работах /8/ была выдвинута идея поиска решений /1/, лежащих на инвариантных многообразиях размерности $N \leq n-1$. На основе геометрической интерпретации уравнений /1/ и развитого в /9/ метода локального в окрестности неподвижной точки построения таких инвариантных подпространств было показано /9/, что множество решений с правильным пороговым поведением уравнений Чу-Лоу, лежащих в инвариантных подпространствах, исчерпывается известными /6/ решениями, не дающими правильного поведения в борновском полюсе.

В итоге был сделан вывод /10/, что физически интересные решения уравнений Чу-Лоу с матрицей $A(3\times3)$ и $A(4\times4)$ содержатся только в общем решении уравнений /1/, зависящем соответственно от трех- четырех произвольных периодических функций.

Дальнейшие интересные исследования /11-14/ были направлены на построение локального в окрестности неподвижной точки решения системы /1/ с матрицей $A(3\times3)$, зависящего от 3-х произвольных периодических функций. В основополагающей работе /12/ этого цикла показано, что в окрестности неподвижной точки плоскости проективных координат $x(w)$ и $y(w)$ /являющихся дробно-линейными функциями от S_i/S_j, $i\neq j$, j - фиксировано/ можно построить абелеву однопараметрическую группу непрерывных преобразований, связанную с исходными разностными уравнениями. Дифференцирование групповых уравнений по параметру в нуле дает дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)},$$

где функции $Q(x,y)$ и $P(x,y)$ есть решения линейной системы двух функциональных уравнений /15/. Решая дифференциальное уравнение в окрестности неподвижной точки $x=y=0$, авторы /14/ получили семейство решений исходной системы в виде ряда $y=f(x, C(w))$ по степеням x и $C(w)$, где $C(-w)=C(w)$ и $C(w+1)=-C(w)$. Однако удалось получить первые несколько членов разложения, и явного выражения пока не существует. Использование аппарата качественной теории дифференциальных уравнений в /12,14/ явилось эффективным в исследовании локального в окрестности неподвижной точки поведения семейства решений исходных уравнений, однако такой локальный подход не позволяет вскрыть глобальную структуру общего решения, найти систему общих интегралов уравнений Чу-Лоу для $x(w)$ и $y(w)$ и выявить связь общего решения с частными решениями системы /1/, лежащими на инвариантных кривых в плоскости x и y.

Ниже, рассматривая уравнения для $x(w)$ и $y(w)$, следующие из уравнений /1/ с матрицей Чу-Лоу $A(3\times3)$, как преобразования Кремона на плоскости и используя аппарат теории преобразований

Кремона [16], мы получим уравнения на все формы $f(x^2,y)=0$, задающие неявно инвариантные кривые /алгебраические и неалгебраические/ в плоскости x,y. Из трансформационных свойств указанных инвариантных форм следует важный результат, что отношение этих форм, возведенных в нужную степень, является общим интегралом

$$\Phi_1(x^2,y) = C(w),$$

где

$$C(-w) = C(w), \quad C(w+1) = -C(w).$$

Указана структура второго общего интеграла $\Phi_2(x,y) = \dfrac{x}{1+\phi(x^2,y)}$ и функциональное уравнение, решением которого он является. Подобное рассмотрение можно провести для уравнений /1/ с матрицей $A(1,1)$ и для уравнений с матрицей Чу-Лоу /4x4/, хотя последнее технически сложнее.

2. УРАВНЕНИЯ ЧУ-ЛОУ КАК ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КРЕМОНА

Будем рассматривать систему уравнений /1/ с матрицей Чу-Лоу /3x3/

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 16 \\ -2 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad /2/$$

в удобной для нас форме /3.1-2,4/, предложенной в [11]:

$$x' = F(x,y), \quad F(x,y) = \frac{x+2x^2-xy-2y^2}{1+3x+3y-2x^2-3xy-2y^2}, \qquad /3.1/$$

$$y' = -F(y,x), \quad x' = x(w+1), \quad y' = y(w+1),$$
$$/3.2/$$
$$x(-w) = -x(w), \quad y(-w) = y(w).$$

$$s_1 \cdot s_1'(1-2y+x)(1-2y'-x') = 1,$$
$$/4/$$
$$s_1' = s_1(w+1), \quad s_1(-w) = s_1(w).$$

Связь $S_i(w)$ в /1/ с функциями $s_1(w)$, $x(w)$ и $y(w)$ из /3.1-2/ и /4/ дается следующей формулой:

$$S_i(w) = s_1(w)\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + y(w)\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix} + x(w)\begin{pmatrix}-4\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}. \qquad /5/$$

В центре нашего внимания в дальнейшем будет система уравнений /3.1-2/, так как при наличии общего решения системы /3/ решение уравнения /4/ представляется более легкой задачей /в /11/ показано, что s_1 есть функция x^2, y, которая голоморфна в окрестности $x=y=0$, и найдены первые члены разложения ее в ряд по x и y /. Представим себе, что мы имеем семейство решений системы /3/, которое мы можем изобразить на плоскости в виде семейства траекторий. Это могут быть частные решения системы /3/, лежащие на инвариантной кривой в плоскости x, y, или семейство решений, зависящее от параметра, принимающего непрерывные значения. Тогда уравнения /3/ задают сдвиг на таких инвариантных кривых или преобразования внутри семейства решений. Несомненно, что инвариантные кривые или инвариантная характеристика такого семейства решений должны играть важную роль в нахождении общего решения системы /3/.

Поэтому будем рассматривать уравнения /3/ как геометрическое преобразование плоскости (x,y) и поставим задачу отыскания всех инвариантных кривых и инвариантов такого преобразования.

Обратное преобразование однозначно и легко получается из /3.1/ заменой $w \to -w-1$ в соответствии с /3.2/:

$$\begin{aligned} x &= -F(-x', y'), \\ y &= -F(y', -x'). \end{aligned} \qquad /6/$$

Более удобно перейти в /3/ к однородным координатам

$$x \to \frac{x}{z}, \qquad y \to \frac{y}{z}. \qquad /7/$$

Тогда преобразования /3/ примут вид (T_2):

$$\begin{aligned} x' : y' : z' &= \phi_1(x,y,z) : \phi_2(x,y,z) : \phi_3(x,y,z), \\ \phi_1 &= xz + 2x^2 - xy - 2y^2, \\ \phi_2 &= -yz + 2x^2 + xy - 2y^2, \\ \phi_3 &= z^2 + 3(x+y)z - 2x^2 - 3xy - 2y^2. \end{aligned} \qquad /8/$$

Обратное преобразование (T_2^{-1}) в соответствии с /6/ имеет вид

$$x:y:z = \phi_1'(x',y',z'):\phi_2'(x',y',z'):\phi_3'(x',y',z'), \qquad /9/$$

$$\phi_1'(x,y,z) = -\phi_1(-x,y,z); \quad \phi_k'(x,y,z) = \phi_k(-x,y,z), \quad k=2,3.$$

Преобразования /8/ и /9/ представляют собой частный случай квадратичных преобразований Кремона - см./16/,стр.1,30. /Заметим, что впервые связь уравнений Чу-Лоу с преобразованиями Кремона была отмечена в /17/,где было показано, что уравнения Чу-Лоу /1/ нельзя привести к полусепарабельному виду никаким преобразованием Кремона конечного порядка/.

Остановимся на свойствах преобразования Кремона /8,9/, важных для дальнейшего. Прямое и обратное преобразования Кремона являются взаимно-однозначным преобразованием плоскости, причем взаимная однозначность нарушается в 3 фундаментальных точках, O_1, O_2, O_3 (O_1', O_2', O_3'), и на 3 соответствующих им основных прямых, j_1, j_2, j_3 (j_1', j_2', j_3'). При преобразовании $T_2(T_2^{-1})$ фундаментальным точкам $O_i(O_i')$ соответствуют точки основных прямых $j_i'(j_i)$, а все точки $j_i(j_i')$ отображаются в точки $O_i'(O_i)$.

Фундаментальные точки $O_i(O_i')$ определяются из условия одновременного обращения в нуль трех функций $\phi_k(\phi_k')$:

$$O_i = (x_i, y_i, 1), \qquad O_i' = (-x_i, y_i, 1), \qquad /10/$$

$$O_1 = (1,1,1), \quad O_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1), \quad O_3 = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1).$$

Основные прямые $j_i(j_i')$ проходят через точки $O_k O_\ell (O_k' O_\ell')$, $k \neq \ell \neq i$, и они есть:

$$j_1 = z + 4x + 4y = 0, \quad j_2 = z - 2x + y = 0, \quad j_3 = z + x - 2y = 0, \qquad /11/$$

$$j_i' = j_i(-x, y, z).$$

Если от переменных x, y, z перейти к j_1, j_2, j_3, то преобразование /8/ примет стандартную форму

$$j_1':j_2':j_3' = j_2 j_3 : j_3 j_1 : j_1 j_2, \qquad /12/$$

где j_i' - функция от x', y', z'.

Неподвижные точки преобразования /8/ определяются из условия

$$x:y:z=\phi_1(x,y,z):\phi_2(x,y,z):\phi_3(x,y,z). \qquad /13/$$

Они лежат на кубиках:

$$1)\ y\phi_3-z\phi_2=0,\quad 2)\ z\phi_1-x\phi_3=0,\qquad 3)\ x\phi_2-y\phi_1=0. \qquad /14/$$

Первые две кубики имеют общими точками O_1, O_2, O_3 и 2 точки $z=\phi_3=0$. Остальные 4 точки являются неподвижными и лежат на 3-й кубике.

Решение этих уравнений дает:

$$d_{1,2}=(0,0,1),\quad d_{3,4}=(\pm\frac{2}{3}\sqrt{2},\ \frac{2}{3},\ 1). \qquad /15/$$

В каждой неподвижной точке $d(x_0,y_0,1)$ есть 2 инвариантных направления, вдоль которых инвариантные кривые могут входить в неподвижную точку. В переменных $\bar{x}=x-x_0z$ и $\bar{y}=y-y_0z$ преобразование /8/ будет иметь вид

$$\bar{x}':\bar{y}':z'=\bar{\phi}_1(\bar{x},\bar{y},z):\bar{\phi}_2(\bar{x},\bar{y},z):\bar{\phi}_3(\bar{x},\bar{y},z), \qquad /16/$$

где

$$\bar{\phi}_1=zu_1(\bar{x},\bar{y})+u_2(\bar{x},\bar{y}),$$
$$\bar{\phi}_2=zv_1(\bar{x},\bar{y})+v_2(\bar{x},\bar{y}),$$

а u_1,v_1 и u_2,v_2 есть однородные функции своих переменных первой и второй степени. Инвариантные направления определяются из уравнения, которое следует из /16/:

$$\bar{x}v_1(\bar{x},\bar{y})-\bar{y}u_1(\bar{x},\bar{y})=0. \qquad /17/$$

Для неподвижной точки $d_{1,2}(0,0,1)$ из /17/, /16/ и /8/ получим 2 инвариантных направления

$$1)\ x=0,$$

$$2)\ y=0. \qquad /18/$$

Инвариантные направления для неподвижной точки $d_{3,4}(\pm\frac{2}{3}\sqrt{2},\frac{2}{3},1)$ определяются уравнениями

$$x\mp\frac{2}{3}\sqrt{2}\mp k_1(y-\frac{2}{3})=0,$$
$$x\mp\frac{2}{3}\sqrt{2}\mp k_2(y-\frac{2}{3})=0,\qquad k_{1,2}=\frac{35\pm3\sqrt{65}}{40\sqrt{2}}. \qquad /19/$$

Ниже мы рассмотрим вопрос о преобразовании кривых относительно преобразования Кремона /8/.

3. УРАВНЕНИЯ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТНЫЕ КРИВЫЕ

Пусть мы имеем общую неприводимую алгебраическую кривую $f=f_\mu(x,y,z)=0$, заданную однородным полиномом степени μ. При преобразовании /8/ она перейдет в кривую степени 2μ $f'_{2\mu}=f_\mu(\phi_1,\phi_2,\phi_3)$, которая также, как легко показать, будет неприводимой в том и только в том случае, если кривой $f_\mu(x,y,z)$ не принадлежат фундаментальные точки $O'_i(10)$. Если неприводимая кривая имеет в точках $O'_i(10)$ кратности μ_i, то

$$f_\mu(x',y',z') = g_{\mu'}(x,y,z)\, j_1^{\mu_1}\cdot j_2^{\mu_2}\cdot j_3^{\mu_3}, \qquad /20/$$

где $\mu'=2\mu-\mu_1-\mu_2-\mu_3$.

Для того, чтобы неприводимая кривая $f_\mu(x,y,z)$ была инвариантна относительно преобразования Кремона /8/, порядок кривой в /20/ μ должен удовлетворять условию $\mu=\mu_1+\mu_2+\mu_3$ и

$$g_\mu(x,y,z)\equiv \epsilon\cdot f_\mu(x,y,z), \quad \epsilon=\pm 1.$$

Таким образом, неприводимые алгебраические инвариантные кривые должны являться решениями функционального уравнения:

$$f_\mu(\phi_1,\phi_2,\phi_3)=\epsilon f_\mu(x,y,z)\, j_1^{\mu_1}\, j_2^{\mu_2}\, j_3^{\mu_3}, \qquad /21/$$

где $\phi_i(x,y,z)$ и $j_i(x,y,z)$ заданы /8/ и /11/ соответственно, $\mu=\sum_i \mu_i$ и $\epsilon=\pm 1$, причем μ_i есть кратности кривой f_μ в фундаментальных точках O_i. Функция $f_\mu(x,y,z)$ ввиду инвариантности относительно замены $x\to -x$, $y\to y$ /см. /3.2// должна быть четной по x.

Алгебраические кривые, не проходящие через неподвижную точку $d(0,0,1)$, имеют вид:

$$f_\mu = z^\mu + a z^{\mu-1}\cdot y + z^{\mu-2}\cdot(bx^2+cy^2) + \ldots = 0. \qquad /22/$$

Для кривых, проходящих через точку $d(0,0,1)$, будет отсутствовать, минимум, первый член z^μ разложения /22/. Одна инвариантная алгебраическая кривая известна - это парабола

$$f_{110}(x,y,z) = yz - x^2 = 0, \qquad /23/$$

соответствующая известному решению [4,6] и являющаяся решением /21/ при $\epsilon=-1$, $\mu_1=\mu_2=1$, $\mu_3=0$. Докажем, что других инвариантных алгебраических кривых не существует. /Это утверждение приведено в[17] без доказательства/.

Подставляя в /21/ с $\epsilon=1$ разложения /22/ для кривой f_μ, не проходящей через точку $x=y=0$, с учетом /8/, /11/ и сравнивая коэффициенты при одинаковых членах $z^{2\mu-k}\cdot x^{k-m}\cdot y^m$ для $k=0,1\ldots$ и $0\le m\le k$, мы получаем систему линейных уравнений на коэффициенты в /22/ и условие на μ_i, которое имеет вид

$$\mu_1 = 5\mu_2 + 2\mu_3 . \qquad /24/$$

Допустим, что инвариантная алгебраическая кривая существует и ее порядок согласно /21/, /24/ есть

$$\mu = 6\mu_2 + 3\mu_3 \ge 3.$$

Тогда μ_2 и μ_3 не могут быть равны нулю одновременно. Поскольку μ_i есть кратность кривой f_μ в фундаментальных точках O_i /а также в O_i' в силу четности по x f_μ /, то по крайней мере одна из точек O_2 или O_3 должна принадлежать кривой /22/. Поскольку кривая инвариантна, то прямое /8/ и обратное /9/ преобразования переводят точку, принадлежащую кривой, в точки этой же кривой. Легко показать, что преобразование /9/ и его степени переводят точки O_2 и O_3 в точки, приближающиеся к началу координат $x=y=0$ сколь угодно близко.

А это находится в противоречии с /22/ и сделанным предположением.

Анализ уравнений /21/ с $\epsilon=\pm 1$ и f_μ /для кривых, проходящих через точку $x=y=0$ / вида /22/ без первого члена z^μ показывает, что кроме известной алгебраической кривой /23/ и ее степеней, быть может, возможна кривая вида

$$f_\mu = z^{\mu-2k}\left(x^2 - \frac{2}{3}y^2\right)^k + z^{\mu-2k-1}P_{2k+1}(x^2, y) + \ldots = 0, \qquad /25/$$

где $\mu_1 = 5\mu_2 + 2\mu_3 - 2k$, $\epsilon = 1$, $\mu = \Sigma\mu_i$, $k \ge 1$.

Покажем, что при конечном μ это невозможно. Действительно, для такой кривой μ_2 должно быть равно нулю, так как в противном случае она бы пересекалась с кривой /23/ в бесконечном количестве точек $(O_2, T_2^{-1}O_2, (T_2^{-1})^n O_2, \ldots)$, что при конечном μ невозможно. Поэтому $\mu_3 \ge k > 0$ и кривая f_μ /25/ должна проходить через точку O_3, а также $(T_2^{-1})^n O_3$, $n=1,2\ldots$ Согласно /25/ кривая f_μ входит в неподвижную точку $x=y=0$ по касательным

$$y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\,x.$$

Однако можно показать, что $(T_2^{-1})^n O_3$ при $n\to\infty$ стремится к точке $(0,0)$ по кривым $y = x^2 \pm ax^4 + o(x^5)$, что противоречит /25/ при конечном μ. Таким образом, доказано, что парабола /23/ является единственной алгебраической кривой, инвариантной относительно преобразований /8/, /9/.

4. ИНВАРИАНТНЫЕ НЕАЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

Для исследования неалгебраических инвариантных кривых перейдем от однородных координат x, y, z к проективным $x/z \to x$, $y/z \to y$, т.е. вернемся к первоначальной форме преобразований Кремона /8/ и /9/ в виде /3.1/ и /6/. Будем неявно задавать инвариантные неалгебраические кривые уравнением $f(x,y)=0$, где инвариантная форма $f(x,y)$ - функция x, y, являющаяся полиномом лишь для частного случая алгебраических кривых. Вследствие /3.2/ форма $f(x,y)$ должна быть четной функцией x. Будем говорить, что инвариантная неалгебраическая кривая $f(x,y)=0$ неприводима, если форму $f(x,y)$ нельзя представить в виде произведения двух форм, $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$. Очевидно, что наиболее общий вид уравнения, которому должна удовлетворять неприводимая неалгебраическая кривая, инвариантная относительно преобразований Кремона /3.1/, /6/, следующий / x' и y' заданы /3.1//:

$$f(x',y') = f(x,y)\,\pi(x,y). \qquad /26/$$

Совершая над переменными x и y в /26/ обратное преобразование Кремона /6/, получим

$$f(x,y) = f(x^{-1},y^{-1})\cdot\pi(x^{-1},y^{-1}), \qquad /27/$$

где посредством $x^{-1}(x,y)$ и $y^{-1}(x,y)$ мы обозначили функции в правой части /6/, задающие обратное преобразование. С другой стороны, совершая в уравнении /26/ замену $x \to -x$, $y \to y$, с учетом четности $f(x,y)$ по x и /6/ получим

$$f(x^{-1},y^{-1}) = f(x,y)\,\pi(-x,y). \qquad /28/$$

Комбинируя /27/ с /28/, получим уравнение на $\pi(x,y)$ / x' и y' заданы /3.1//:

$$\pi(x,y)\cdot\pi(-x',y') = 1. \qquad /29/$$

Структуру решения уравнения /29/ для $\pi(x,y)$ легко установить, переходя в /21/ к проективным координатам $x/z \to x$, $y/z \to y$. Решение будет иметь вид

$$\pi(x,y) = \epsilon\,\frac{j_1(x,y,1)^{\mu_1}\, j_2(x,y,1)^{\mu_2}\, j_3(x,y,1)^{\mu_3}}{\phi_3(x,y,1)^{\mu}}, \qquad /30/$$

где $\mu=\mu_1+\mu_2+\mu_3$, $\epsilon=\pm 1$.

В том, что оно удовлетворяет уравнению /29/, нетрудно убедиться, используя /8/, /11/, /12/. Докажем, что это 3-параметрическое решение для функции $\pi(x,y)$, входящей в уравнение /26/ для инвариантной неприводимой неалгебраической кривой, является общим. Согласно указанным ранее свойствам преобразований Кремона основные прямые j_i являются единственными кривыми, образом которых при преобразовании Кремона являются точки - фундаментальные точки O_i'. Наличие какого-либо другого фактора в /30/, кроме указанных, обращающегося в ноль на каком-то непрерывном множестве, привело бы, как это следует из /26/, к приводимости $f(x,y)$, что находится в противоречии с тем, что мы рассматриваем неприводимые неалгебраические кривые.

Таким образом, общее уравнение на инвариантные неприводимые неалгебраические кривые имеет вид:

$$f(x',y')=\epsilon f(x,y)\,\frac{j_1(x,y,1)^{\mu_1}\,j_2(x,y,1)^{\mu_2}\,j_3(x,y,1)^{\mu_3}}{\phi_3(x,y,1)^{\mu}}, \qquad /31/$$

где $\mu=\sum\mu_i$, $\epsilon=\pm 1$, x',y' заданы /3.1/, а j_i и ϕ_3 заданы /11/ и /8/. /Заметим, что если в /31/ положить $\epsilon=-1$, $\mu_1=\mu_2=1$, $\mu_3=0$ и подставить выражения для j_1, j_2, ϕ_3, то получим приведенное в /11/ /см. формулу /18// соотношение для $f(x,y)=y-x^2$/.

Проведем исследование инвариантных кривых, не проходящих через неподвижную точку $x=y=0$ и проходящих через нее. Для первых в окрестности $x=y=0$ инвариантная форма имеет вид:

$$f(x^2,y)=1+ay+bx^2+cy^2+\ldots \qquad /32/$$

Разлагая обе части уравнения /31/ с $\epsilon=1$ в окрестности неподвижной точки $x=y=0$ и приравнивая коэффициенты при $x^{n-m}y^m$ с одинаковыми значениями n и m, получим бесконечную систему линейных уравнений на коэффициенты в разложении /32/. Сравнение линейных по x и y членов дает:

$$\mu_1=5\mu_2+2\mu_3, \quad a=-\frac{3}{2}(\mu_2-\mu_3). \qquad /33/$$

Получается двухпараметрическое (μ_2,μ_3) семейство решений. Выберем в качестве независимых инвариантных форм следующие:

$$f_{510}(x^2,y), \quad \mu_1=5,\ \mu_2=1,\ \mu_3=0,\ \epsilon=+1, \qquad /34.1/$$

$$f_{201}(x^2,y), \quad \mu_1=2,\ \mu_2=0,\ \mu_3=1,\ \epsilon=+1, \qquad /34.2/$$

которые являются решениями уравнения /31/ с указанными значениями μ_i и ϵ.

Тогда решение общего уравнения с $\mu_1 = 5\mu_2 + 2\mu_3$ будет $f = f_{510}^{\mu_2} \cdot f_{210}^{\mu_3}$.

Укажем первые несколько членов разложения для f_{510} и f_{201} :

$$f_{510}(x^2,y)=1-\frac{3}{2}y-\frac{5}{2}(y^2+ x^2)+\frac{15}{4}y^3+O_4(x^2,y^2)+\ldots, \qquad /35.1/$$

$$f_{201}(x^2,y)=1+\frac{3}{2}y-\frac{7}{2}x^2-\frac{5}{4}y^2-\frac{3}{2}x^2y-\frac{15}{8}y^3+O_4(x^2,y^2)+\ldots \qquad /35.2/$$

Из анализа уравнения /31/ с $\epsilon=-1$ и $\epsilon=+1$ для инвариантных кривых, проходящих через неподвижную точку $x=y=0$, получается, что через эту точку проходят две кривые, инвариантные формы которых имеют вид:

$$f_{110}(x^2,y)=y-x^2, \quad \mu_1=\mu_2=1, \quad \mu_3=0, \quad \epsilon=-1, \qquad /36.1/$$

$$f_{202}(x^2,y)=x^2-\frac{2}{3}y^2+\frac{4}{3}x^2y-2y^3+O_4(x^2,y^2)+\ldots, \qquad /36.2/$$

$$\mu_1=\mu_3=2, \quad \mu_2=0, \quad \epsilon=+1,$$

из которых первая $f_{110}(x^2,y)$ – известная парабола, соответствующая решению /4,6/.

Легко видеть, что из отношений указанных инвариантных форм легко получить инвариантное отношение - общий интеграл для системы уравнений /3/:

$$\Phi_1(x^2,y)=\frac{f_{110}\cdot f_{201}^4}{f_{202}^2\cdot f_{510}} = C(w). \qquad /37/$$

Действительно, согласно /3/ и /31/

$$C(-w)=C(w), \qquad /38/$$

$$\Phi_1(x'^2,y')=C(w+1)=\frac{f_{110}(x',y')\cdot f_{201}^4(x',y')}{f_{202}^2(x',y')\cdot f_{510}(x',y')}=-C(w).$$

Можно указать 2-й общий интеграл системы разностных уравнений /3/,

$$\Phi_2(x,y)=\frac{x}{1+\phi(x^2,y)}, \qquad /39/$$

являющийся решением уравнения

$$\Phi_2(x', y') = \frac{\Phi_2(x,y)}{1+\Phi_2(x,y)}, \qquad /40/$$

где $\phi(x^2,y)=\sum_{k=1}^{\infty}(y-x^2)^k f_k(x^2)$.

Подставляя разложение для $\phi(x^2,y)$ в /40/ и приравнивая члены при одинаковых степенях, можно получить для $f_k(x^2)$ линейное функциональное уравнение с неоднородностью, зависящей от ранее найденных $f_m(x^2)$ с $m<k$ и их производных. Решение уравнения для $f_1(x^2)$ дает

$$f_1(x^2)=\frac{2}{1-x^2}.$$

Детальное рассмотрение этого вопроса будет проведено отдельно. Заметим, что решение уравнения /40/ для $\Phi_2(x,y)$ не как функции x, y, а как функции w дает

$$\frac{1}{\Phi_2(x,y)} = w+\beta(w),$$

где $\beta(w)$ - известная произвольная функция со свойствами

$$\beta(-w)=-\beta(w), \quad \beta(w+1)=\beta(w).$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На основе детального изучения уравнений Чу-Лоу в форме нелинейных разностных уравнений /3/ как квадратичных преобразований Кремона были получены 4 уравнения вида /31/ с параметрами μ_i и ϵ, указанными в /34/ и /36/, на инвариантные формы $f(x^2,y)$, задающие неявным образом инвариантные кривые в плоскости x,y. Одна из кривых, $y-x^2=0$, соответствует известному частному решению системы /3/, другие - пока не найденным. Доказано, что последние являются неалгебраическими кривыми. Для инвариантных форм, определяющих эти кривые, в /35.1-2/ и /36.2/ даны локальные в окрестности нулевой неподвижной точки разложения, которые приведены для наглядности и сравнения, сделанного ниже, результатов этой работы с /14/. Исследование области сходимости приведенных разложений, а также рассмотрение альтернативных методов решения уравнения /31/ будет проведено в дальнейшем.

Удивительным результатом настоящего исследования является то, что отношение этих инвариантных форм в подходящих степенях дает общий интеграл /37/ нелинейной системы уравнений Чу-Лоу /3/, структура которого подобна структуре общего интеграла для уравнений вида /3/ для матрицы $A(1,1)$, полученного в /13/.

Сравним наши результаты с результатами работы [14], о которых говорилось во введении. Если из уравнения $f_{202}(x^2, y) = 0$ /см. /36.2// определить две ветви кривой $y = y(x)$, то полученное разложение совпадает с разложением из [14] с точностью до указанных там членов /см. формулу /30/ из [14] /. Подстановка найденных там же первых членов разложения $y = f(x^2, C)$ в формулу /37/ обращает ее в тождество с точностью до взятых членов. Однако кроме локального поведения в окрестности $x = y = 0$ наш подход в отличие от [14] позволяет установить некоторые свойства инвариантных кривых нелокального характера, а именно: прохождение через основные точки и их образы, точки пересечения с кривой $y = x^2$ и т.п. И, наконец, точное решение уравнений /31/ с указанными выше параметрами μ_i, ϵ дает согласно /37/ явный вид общего интеграла нелинейной системы уравнений Чу-Лоу /3/.

Автор глубоко благодарен В.А.Мещерякову за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chew G.F., Low F.E. Phys.Rev., 1956, 101, p.1570.
2. Ширков Д.В., Серебряков В.В., Мещеряков В.А. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях. "Наука", М., 1967.
3. Wanders G. Nuovo Cim., 1962, 23, p.816.
4. Rothelutner T. Z.Phys., 1964, 177, p.287.
5. Мещеряков В.А. ЖЭТФ, 1966, 52, с.648.
6. Мещеряков В.А. ОИЯИ, Р-2369, Дубна, 1965.
7. Журавлев В.И., Мещеряков В.А., Рерих К.В. ЯФ, 1968,10,с.168.
8. Мещеряков В.А., Рерих К.В. ОИЯИ, Р2-4356, Р2-4377, Дубна, 1969.
9. Meshcheryakov V.A., Rerikh K.V. Ann. of Phys., 1970, 59, p.408; ТМФ, 1970, 3, с.78.
10. Рерих К.В. Автореферат кандидатской диссертации. ОИЯИ, 2-5451, Дубна, 1970.
11. Мещеряков В.А. ОИЯИ, Р2-5906, Дубна, 1971.
12. Мещеряков В.А. ОИЯИ, Р2-7047, Дубна, 1973.
13. Гердт В.П., Мещеряков В.А. ОИЯИ, Р2-7976, Дубна, 1974.
14. Гердт В.П., Мещеряков В.А. ТМФ, 1975, 24, с.155.
15. Рерих К.В. ОИЯИ, Р2-12714, Дубна, 1979.
16. Hudson H. Cremona Transformations in Plane and Space. Cambridge, 1927.
17. Kaiser H. Preprint PHE 68-2, Berlin-Zeuthen, 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 ноября 1980 года.