сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-80-718

К.В.Рерих

УРАВНЕНИЯ ТИПА УРАВНЕНИЙ ЧУ-ЛОУ КАК ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КРЕМОНА. СТРУКТУРА ОБЩЕГО ИНТЕГРАЛА

1980

§1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно[5], переход к нелинейной краевой задаче на матричные элементы S-матрицы и введение униформизующей переменной

$$w = \frac{1}{\pi}\arcsin\omega,$$

где ω - энергия пиона в лабораторной системе, позволяет дать элегантную формулировку уравнений Чу-Лоу[1] и им подобных в виде следующей системы нелинейных разностных уравнений[5,8]:

$$S_i(w)\cdot S_i(1-w)=1, \qquad /1/$$

$$S_i(w+1) = \frac{1}{\sum\limits_j A_{ij}\ S_j(w)},$$

решения которых должны быть мероморфными действительными функциями w /мы не выписываем здесь условия порогового поведения и поведения в борновском полюсе/. Здесь S_j - матричные элементы S-матрицы в состояниях j, A_{ij} - элементы матрицы кроссинг-симметрии $n\times n$ со свойствами

$$A^2 = E, \quad \sum_j A_{ij} = 1.$$

Ввиду отсутствия общих методов решения нелинейных разностных уравнений система уравнений /1/ представляет собой привлекательную, но весьма трудную нелинейную задачу, решение которой, как и любой нелинейной системы, представляет самостоятельный интерес. Этой проблеме посвящены многолетние исследования ряда авторов[2–13,15,16], направленные на поиск частных решений и построение общего решения системы уравнений /1/, которое найдено пока только для простейшего случая матрицы $A(2\times 2)$.

В работе[5] был развит метод построения класса решений /1/, являющихся рациональными функциями w с возможным усложнением их путем известного[5] $\beta(w)$ –и $D(w)$ -произвола: $S_i(w)\to S_i(w+\beta(w))\cdot D(w)$. Однако в[6] на примере уравнений /1/ с матрицей $A(1,1)$ $(n=3)$ было показано, что этим классом не исчерпываются все решения, и были найдены решения, являющиеся трансцендентными мероморфными функциями. Весьма полезной для дальнейшего явилась развитая в[6–8] геометрическая интерпретация уравнений /1/.

В работах[10–12] был сделан важный шаг по пути построения общего решения системы /1/ с матрицей $A(3\times 3)$, зависящего от 3-х произвольных периодических функций ($\beta(w)$, $D(w)$ и новой, $C(w)$). В основополагающей работе [10] этого цикла показано, что в окрестности неподвижной точки плоскости проективных координат $x(w)$ и $y(w)$ /являющихся дробно-линейными функциями от S_i/S_j, $i \neq j$, j - фиксировано/ можно построить абелеву однопараметрическую группу непрерывных преобразований, связанную с исходными разностными уравнениями. Дифференцирование групповых уравнений по параметру в нуле дает дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)},$$

где функции $Q(x,y)$ и $P(x,y)$ есть решения линейной системы двух функциональных уравнений [13]. Решая дифференциальное уравнение в окрестности неподвижной точки $x = y = 0$, авторы [11,12] получили для уравнений /1/ с матрицами $A(1,1)$ и A Чу-Лоу семейство решений исходной системы в виде ряда $y = f(x, C(w))$ по степеням x и $C(w)$, где $C(-w) = C(w)$ и $C(w+1) = -C(w)$ /для $A(1,1)$ получена также структура общего интеграла/. Однако удалось получить первые несколько членов разложения, и явного выражения пока не существует.

В настоящей работе предлагается другой подход к исследованию уравнений вида /1/, получению общего интеграла этих уравнений, основанный на использовании аппарата теории преобразований Кремона [14]. Ниже такое исследование проводится для уравнений /1/ с матрицей $A(1,1)$. В §2 будет установлено, что если интерпретировать обсуждаемые нелинейные разностные уравнения как геометрические преобразования, то они являются частным случаем преобразований Кремона второго порядка. В том же §2 будут рассмотрены их свойства. В §3 и §4 будут получены функциональные уравнения на инвариантные формы, задающие неявно алгебраические и неалгебраические инвариантные кривые. Показано, что отношение этих форм, возведенных в нужную степень, дает общий интеграл $C(w)$, полученный ранее в [11] другим путем.

§2. УРАВНЕНИЯ ТИПА УРАВНЕНИЙ ЧУ-ЛОУ КАК ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КРЕМОНА

Будем рассматривать систему уравнений /1/ с матрицей $A(1,1)$

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -1 & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{vmatrix} \qquad /2/$$

в удобной для нас форме /3.1-2,4/, предложенной в /11/:

$$x' = F(x,y),\quad F(x,y) = \frac{x + 3x^2 + \frac{3}{4}xy - \frac{5}{4}y^2}{1 + 4x + \frac{13}{4}y + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{5}{4}y^2}, \qquad /3.1/$$

$$y' = R(x,y),\quad R(x,y) = \frac{-y + 2x^2 + 2xy - \frac{5}{4}y^2}{1 + 4x + \frac{13}{4}y + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{5}{4}y^2},$$

$$x' = x(w+1),\quad y' = y(w+1), \qquad /3.2/$$

$$x(-w) = -x(w),\ y(-w) = y(w),$$

$$s_1 \cdot s_1' \cdot (1 - \frac{5}{4}y + 2x)(1 - \frac{5}{4}y' - 2x') = 1, \qquad /4/$$

$$s_1' = s_1(w+1),\qquad s_1(-w) = s_1(w).$$

Связь $S_i(w)$ в /1/ с функциями $s_1(w)$, $x(w)$ и $y(w)$ из /3.1-2/ и /4/ дается следующей формулой:

$$S_i(w) = s_1(w)\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + y(w)\begin{pmatrix}\frac{15}{4}\\ -\frac{5}{4}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix} + x(w)\begin{pmatrix}-4\\-2\\2\end{pmatrix}\right\}. \qquad /5/$$

В центре нашего внимания в дальнейшем будет система уравнений /3.1-2/, так как при наличии общего решения системы /3/ решение уравнения /4/ представляется более легкой задачей.

Представим себе, что мы имеем семейство решений системы /3/, которое мы можем изобразить на плоскости x,y в виде семейства траекторий. Это могут быть частные решения системы /3/, лежащие на инвариантной кривой в плоскости x,y, или же семейство решений, зависящее от параметра, принимающего непрерывные значения. Тогда уравнения /3/ задают сдвиг на таких инвариантных кривых или преобразование внутри семейства решений. Несомненно, что инвариантные кривые или инвариантная характеристика такого семейства решений должны играть важную роль в нахождении общего решения системы /3/.

Поэтому будем рассматривать уравнения /3/ как геометрическое преобразование плоскости x,y и поставим задачу отыскания всех инвариантных кривых и инвариантов такого преобразования.

Обратное преобразование однозначно и легко получается из /3.1/ заменой $w \to -w-1$ в соответствии с /3.2/:

$$x = -F(-x', y'),$$

$$y = R(-x', y'). \qquad /6/$$

Более удобно перейти в /3/ к однородным координатам

$$x \to \frac{x}{z},$$

$$y \to \frac{y}{z}. \qquad /7/$$

Тогда преобразования /3/ примут вид (T_2):

$$x' : y' : z' = \phi_1(x, y, z) : \phi_2(x,y,z) : \phi_3(x,y,z),$$

$$\phi_1 = xz + 3x^2 + \frac{3}{4}xy - \frac{5}{4}y^2,$$

$$\phi_2 = -yz + 2x^2 + 2xy - \frac{5}{4}y^2, \qquad /8/$$

$$\phi_3 = z^2 + 4xz + \frac{13}{4}yz + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{5}{4}y^2.$$

Обратное преобразование (T_2^{-1}) в соответствии с /6/ имеет вид:

$$x : y : z = \phi'_1(x',y',z') : \phi'_2(x',y',z') : \phi'_3(x',y',z'),$$

$$\phi'_1(x,y,z) = -\phi_1(-x,y,z); \quad \phi'_k(x,y,z) = \phi_k(-x,y,z), \; k = 2,3. \qquad /9/$$

Преобразования /8/ и /9/ представляют собой частный случай квадратичных преобразований Кремона - см./14/, стр. 1,30. /Заметим, что впервые связь уравнений Чу-Лоу с преобразованиями Кремона была отмечена в /15//.

Остановимся на свойствах преобразования Кремона /8,9/, важных для дальнейшего. Прямое и обратное преобразования Кремона являются взаимно-однозначным преобразованием плоскости, причем взаимная однозначность нарушается в трех фундаментальных точках $O_1, O_2, O_3 (O'_1, O'_2, O'_3)$ и на трех соответствующих им основных прямых $j_1, j_2, j_3 (j'_1, j'_2, j'_3)$. При преобразовании $T_2 (T_2^{-1})$ фундаментальным точкам $O_i (O'_i)$ соответствуют точки основных прямых $j'_i (j_i)$, а все точки $j_i (j'_i)$ отображаются в точки $O'_i (O_i)$.

Фундаментальные точки $O_i (O'_i)$ определяются из условия одновременного обращения в нуль трех функций $\phi_k (\phi'_k)$:

$$O_i = (x_i, y_i, 1), \qquad O'_i = (-x_i, y_i, 1), \qquad /10/$$

$$O_1 = (2,4,1), \quad O_2 = \left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{25}, 1\right), \quad O_3 = \left(\frac{2}{7}, -\frac{4}{7}, 1\right).$$

Основные прямые $j_i(j'_i)$ проходят через точки $O_k O_\ell \, (O'_k O'_\ell)$, $k \neq \ell \neq i$, и они есть:

$$j_1 = z + 4x + \frac{15}{4} y = 0, \quad j_2 = z - 2x + \frac{3}{4} y = 0, \quad j_3 = z + 2x - \frac{5}{4} y = 0, \qquad /11/$$

$$j'_i = j_i(-x, y, z).$$

Если от переменных x, y, z перейти к j_1, j_2, j_3, то преобразование /8/ примет стандартную форму

$$j'_1 : j'_2 : j'_3 = j_2 j_3 : j_3 j_1 : j_1 j_2, \qquad /12/$$

где j'_i - функции от x', y', z'.

Неподвижные точки преобразования /8/ определяются из условия

$$x : y : z = \phi_1(x,y,z) : \phi_2(x,y,z) : \phi_3(x,y,z). \qquad /13/$$

Они лежат на кубиках:

$$1/\; y\phi_3 - z\phi_2 = 0, \qquad 2/\; z\phi_1 - x\phi_3 = 0, \qquad 3/\; x\phi_2 - y\phi_1 = 0. \qquad /14/$$

Первые две кубики имеют общими точками O_1, O_2, O_3 и 2 точки $z = \phi_3 = 0$. Остальные 4 точки являются неподвижными и лежат на 3-й кубике.

Решение этих уравнений дает:

$$d_{1,2} = (0,0,1), \qquad d_{3,4} = (\pm 2\sqrt{5}, 4, 1). \qquad /15/$$

В каждой неподвижной точке $d(x_0, y_0, 1)$ есть 2 инвариантных направления, вдоль которых инвариантные кривые могут входить в неподвижную точку. В переменных $\bar{x} = x - x_0 z$ и $\bar{y} = y - y_0 z$ преобразование /8/ будет иметь вид

$$\bar{x}' : \bar{y}' : z' = \bar{\phi}_1(\bar{x}, \bar{y}, z) : \bar{\phi}_2(\bar{x}, \bar{y}, z) : \bar{\phi}_3(\bar{x}, \bar{y}, z),$$

где

$$\bar{\phi}_1 = z u_1(\bar{x}, \bar{y}) + u_2(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$\bar{\phi}_2 = z v_1(\bar{x}, \bar{y}) + v_2(\bar{x}, \bar{y}), \qquad /16/$$

а u_1, v_1 и u_2, v_2 есть однородные функции своих переменных первой и второй степени.

Инвариантные направления определяются из уравнения, которое следует из /16/:

$$\bar{x} v_1(\bar{x},\bar{y}) - \bar{y} u_1(\bar{x},\bar{y}) = 0. \qquad /17/$$

Для неподвижной точки $d_{1,2}(0,0,1)$ из /17/; /16/ и /8/ получим 2 инвариантных направления

$$1/\ x = 0, \quad 2/\ \ y = 0. \qquad /18/$$

Инвариантные направления для неподвижной точки $d_{3,4}(\pm 2\sqrt{5}, 4, 1)$ определяются уравнениями:

$$1/\ y - 4 = 0, \qquad 2/\ \ x \mp 2\sqrt{5} \mp \frac{15}{32}\sqrt{5}(y-4) = 0. \qquad /19/$$

Ниже мы рассмотрим вопрос о преобразовании кривых относительно преобразования Кремона /8/.

§3. УРАВНЕНИЯ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТНЫЕ КРИВЫЕ

Пусть мы имеем общую неприводимую алгебраическую кривую $f = f_\mu(x, y, z) = 0$, заданную однородным полиномом степени μ. При преобразовании /8/ она перейдет в кривую степени 2μ, $f'_{2\mu} = f_\mu(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, которая также, как легко показать, будет неприводимой в том и только в том случае, если кривой $f_\mu(x,y,z)$ не принадлежат фундаментальные точки O'_i /10/. Если неприводимая кривая имеет в точках O'_i /10/ кратности μ_i, то

$$f_\mu(x', y', z') = g_{\mu'}(x,y,z)\, j_1^{\mu_1} \cdot j_2^{\mu_2} \cdot j_3^{\mu_3}, \qquad /20/$$

где $\mu' = 2\mu - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3$.

Для того, чтобы неприводимая кривая $f_\mu(x,y,z)$ была инвариантна относительно преобразования Кремона /8/, порядок кривой в /20/ μ должен удовлетворить условию $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ и

$$g_\mu(x,y,z) = \epsilon\, f_\mu(x,y,z), \qquad \epsilon = \pm 1.$$

Таким образом, неприводимые алгебраические инвариантные кривые должны являться решениями функционального уравнения

$$f_\mu(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \epsilon\, f_\mu(x,y,z)\, j_1^{\mu_1} \cdot j_2^{\mu_2} \cdot j_3^{\mu_3}, \qquad /21/$$

где $\phi_i(x,y,z)$ и $j_i(x,y,z)$ заданы /8/ и /11/ соответственно, $\mu = \sum_i \mu_i$ и $\epsilon = \pm 1$, причем μ_i есть кратности кривой f_μ в фундаментальных точках O_i. Функция $f_\mu(x,y,z)$ ввиду инвариантности относительно замены $x\to -x$, $y\to y$ /см. /3.2// должна быть четной по x.

Алгебраические кривые, не проходящие через неподвижную точку $d(0,0,1)$, имеют вид

$$f_\mu = z^\mu + az^{\mu-1}\cdot y + z^{\mu-2}\cdot(bx^2+cy^2)+\ldots=0. \qquad /22/$$

Для кривых, проходящих через точку $d(0,0,1)$, будет отсутствовать, минимум, первый член разложения z^μ в /22/. Найдем все алгебраические инвариантные кривые.

Подставляя в /21/ с $\epsilon=+1$ разложения /22/ с учетом /8/, /11/ и сравнивая коэффициенты при одинаковых членах $z^{2\mu-k}x^{k-m}y^m$ для $k=0,1\ldots$ и $0\le m\le k$, мы получаем систему линейных уравнений на коэффициенты в /22/ и условие на μ_i, которое имеет вид

$$3\mu_2+\mu_3=0. \qquad /23/$$

Поскольку мы рассматриваем алгебраические кривые, то все μ_i должны быть неотрицательны, поэтому из /23/ следует, что

$$\mu_2=0,\quad \mu_3=0.$$

Вычисление коэффициентов в /22/ показывает, что отличными от нуля будут только коэффициенты при $z^{\mu_1-k}y^k(\mu=\mu_1)$, которые равны $(-\frac{1}{4})^k C^k_{\mu_1}(0\le k\le\mu_1)$. Это означает, что искомая инвариантная форма есть

$$f_{\mu_1}(x,y,z)=f^{\mu_1}_{1,0,0}(y,z),$$

где

$$f_{1,0,0}(y,z)=z-\frac{1}{4}y,\quad \mu_1=1,\quad \mu_2=\mu_3=0,\quad \epsilon=+1. \qquad /24/$$

Таким образом, единственная инвариантная алгебраическая кривая, не проходящая через нулевую неподвижную точку, есть прямая $y=4$ /24/, соответствующая известным решениям /6/.

Анализ уравнений /21/ с $\epsilon=\pm 1$ и f_μ в виде /22/ без первого члена z^μ показывает, что для $\mu\le 2$ имеются лишь следующие инвариантные формы:

$$f_{1,1,0}(x,y,z)=yz-x^2,\quad \mu_1=\mu_2=1,\quad \mu_3=0,\quad \epsilon=-1, \qquad /25/$$

$$f_{1,0,1}(x,y,z)=y^2-4x^2,\quad \mu_1=\mu_3=1,\quad \mu_2=0,\quad \epsilon=+1. \qquad /26/$$

Парабола /25/ соответствует известному решению [5], а кривая /26/ распадается на две прямые: $y = \pm 2x$ [11]. Докажем, что, кроме кривых, заданных инвариантными формами /25/,/26/, нет других алгебраических кривых более высокого порядка, проходящих через неподвижную точку $x = y = 0$. Предположим, что есть другая инвариантная форма вида /22/ без первого члена z^{μ}. В зависимости от того, является ли эта форма решением /21/ с $\epsilon = 1$ или $\epsilon = -1$, ее наиболее общее поведение в нуле будет соответственно ($\ell_0 \le k$, $k \ge 1$ ($\epsilon = +1$), $k \ge 0$ ($\epsilon = -1$)):

$$\epsilon = +1, \quad f_{\mu} = z^{\mu-2k} \cdot \sum_{\ell=\ell_0}^{k} a_{k,\ell}\, x^{2k-2\ell} y^{2\ell} + z^{\mu-2k-1} \cdot P_{2k+1}(x,y) + \ldots, \qquad /27.1/$$

$$\epsilon = -1, \quad f_{\mu} = z^{\mu-2k-1} \cdot \sum_{\ell=\ell_0}^{k} a_{k,\ell}\, x^{2k-2\ell} y^{2\ell+1} + z^{\mu-2k-2} \cdot P_{2k+2}(x,y) + \ldots \qquad /27.2/$$

Подставляя разложения /27.1-2/ в уравнение /21/ и сравнивая коэффициенты в разложении левых и правых частей /21/ при $z^{2\mu-2k-1}$ ($\epsilon = +1$) и $z^{2\mu-2k-2}$ ($\epsilon = -1$), получим, что при некоторых k и ℓ_0 должно выполняться условие

$$\epsilon = +1, \quad 6\mu_2 + 2\mu_3 - 2k - 10\,\ell_0 = 0, \quad k \ge 1, \qquad /28.1/$$

$$\epsilon = -1, \quad 6\mu_2 + 2\mu_3 - 2k - 10\,\ell_0 - 6 = 0, \quad k \ge 0, \qquad /28.2/$$

в противном случае все коэффициенты $a_{k,\ell}$ в /27/ будут равны нулю. Условия /28.1-2/ могут быть выполнены лишь в том случае, если μ_2 и μ_3 не равны нулю одновременно. С другой стороны, если $\mu_2(\mu_3)$ не равно нулю, то точка $O_2(O_3)$ будет принадлежать одной из кривых, заданных формами /27.1-2/, которые по предположению инвариантны. Поэтому инвариантной кривой должны принадлежать точки $T_2^{-1} O_2 (T_2^{-1} O_3), \ldots, (T_2^{-1})^n O_2 ((T_2^{-1})^n O_3)$, которые образуют бесконечную последовательность точек, принадлежащих инвариантным кривым /25/, /26/.

Таким образом, из нашего предположения о существовании отличной от /25/, /26/ инвариантной алгебраической кривой вида /27.1/ или /27.2/ следует, что она должна пересекаться с одной из кривых,/25/ или /26/,в бесконечном количестве точек, что невозможно при конечном μ.

§4. ИНВАРИАНТНЫЕ НЕАЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

Для исследования неалгебраических инвариантных кривых перейдем от однородных координат x, y, z к проективным $x/z \to x$,

$y/z\to y$, т.е. вернемся к первоначальной форме преобразований Кремона /8/ и /9/ в виде /3.1/ и /6/. Будем неявно задавать инвариантные неалгебраические кривые уравнением $f(x,y)=0$, где инвариантная форма $f(x,y)$ -функция x,y, являющаяся полиномом лишь для частного случая алгебраических кривых. Вследствие /3.2/ форма $f(x,y)$ должна быть четной функцией x. Будем говорить, что инвариантная неалгебраическая кривая $f(x,y)=0$ неприводима, если форму $f(x,y)$ нельзя представить в виде произведения двух форм, $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$. Очевидно, что наиболее общий вид уравнения, которому должна удовлетворять неприводимая неалгебраическая кривая, инвариантная относительно преобразований Кремона /3.1/, /6/, следующий / x' и y' заданы /3.1//:

$$f(x',y') = f(x,y)\,\pi(x,y). \qquad /29/$$

Совершая над переменными x и y в /29/ обратное преобразование Кремона /6/, получим:

$$f(x,y) = f(x^{-1}, y^{-1})\cdot \pi(x^{-1}, y^{-1}), \qquad /30/$$

где посредством $x^{-1}(x,y)$ и $y^{-1}(x,y)$ мы обозначили функции в правой части /6/, задающие обратное преобразование. С другой стороны, совершая в уравнении /29/ замену $x\to -x$, $y\to y$, с учетом четности $f(x,y)$ по x и /6/ получим

$$f(x^{-1}, y^{-1}) = f(x,y)\cdot\pi(-x,y). \qquad /31/$$

Комбинируя /30/ и /31/, получим уравнение на $\pi(x,y)$ / x', y' заданы /3.1//:

$$\pi(x,y)\cdot\pi(-x',y') = 1. \qquad /32/$$

Структуру решения уравнения /32/ для $\pi(x,y)$ легко установить, переходя в /21/ к проективным координатам $x/z\to x$, $y/z\to y$:

$$\pi(x,y) = \epsilon\,\frac{j_1(x,y,1)^{\mu_1}\cdot j_2(x,y,1)^{\mu_2}\, j_3(x,y,1)^{\mu_3}}{\phi_3(x,y,1)^{\mu}}, \qquad /33/$$

где $\mu=\mu_1+\mu_2+\mu_3$, $\epsilon=\pm 1$.

В том, что оно удовлетворяет уравнению /32/, нетрудно убедиться, используя /8/, /11/, /12/. Докажем, что это 3-параметрическое решение для $\pi(x,y)$, входящей в уравнение /29/ для инвариантной неприводимой неалгебраической кривой, является общим. Согласно указанным ранее свойствам преобразований Кремона основные прямые j_i являются единственными кривыми, образом которых при преобразовании Кремона являются точки - фундаментальные точки O_i'. Наличие какого-либо другого фактора в /33/, кроме указанных, обращающегося в ноль на каком-то непрерывном множестве, привело бы, как это следует из /29/, к приводимости $f(x,y)$, что находится в противоречии с тем, что мы рассматриваем неприводимые неалгебраические кривые.

Таким образом, общее уравнение на инвариантные неприводимые неалгебраические кривые имеет вид

$$f(x',y') = \epsilon\, f(x,y)\, \frac{j_1(x,y,1)^{\mu_1}\; j_2(x,y,1)^{\mu_2}\; j_3(x,y,1)^{\mu_3}}{\phi_3(x,y,1)^{\mu}}, \qquad /34/$$

где $\mu = \Sigma\mu_i$, $\epsilon = \pm 1$, x', y' заданы /3.1/, а j_i и ϕ_3 заданы /11/ и /8/.

Проведем исследование инвариантных кривых, не проходящих через неподвижную точку $x=y=0$, заданных формой вида

$$f(x^2, y) = 1 + ay + bx^2 + cy^2 + \ldots \qquad /35/$$

Подставляя разложение /35/ в уравнение /34/ и разлагая обе части уравнения /34/ с $\epsilon = 1$ в окрестности неподвижной точки $x=y=0$, получим путем сравнения коэффициентов при $x^{n-m}y^m$ с одинаковыми значениями n и m бесконечную систему линейных уравнений на коэффициенты в разложении /35/. Сравнение линейных по x и y членов дает

$$\mu_3 = -3\mu_2, \qquad a = -\frac{1}{4}\mu_1 - \frac{11}{2}\mu_2. \qquad /36/$$

Получается 2-параметрическое (μ_1, μ_2) семейство решений. Выберем в качестве независимых инвариантных форм следующие:

$$f_{1,0,0}(x^2,y), \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = \mu_3 = 0, \quad \epsilon = +1, \qquad /37.1/$$

$$f_{0,-1,3}(x^2,y), \quad \mu_1 = 0, \ \mu_2 = -1, \ \mu_3 = 3, \ \epsilon = +1, \qquad /37.2/$$

первая из которых - уже известное алгебраическое решение /24/ $(z=1)$, а /37.2/ является решением /34/ с указанными значениями μ_i.

Укажем первые несколько членов разложения для $f_{0,-1,3}(x^2,y)$:

$$f_{0,-1,3}(x^2,y) = 1 + \frac{11}{2}y - 8x^2 + \frac{539}{48}y^2 - \frac{112}{3}yx^2 + \frac{28}{3}y^3 + \ldots \qquad /38/$$

Из анализа уравнений /34/ с $\epsilon = -1$ и $\epsilon = +1$ для инвариантных кривых, проходящих через неподвижную точку $x = y = 0$, следует, что через эту точку проходят только две алгебраические кривые, инвариантные формы которых определены ранее /25-26/ $(z = 1)$ и которые являются решением уравнения /34/ с указанными в /25/, /26/ значениями μ_i и ϵ.

Легко видеть, что из отношений указанных инвариантных форм можно получить инвариантное отношение - общий интеграл для системы уравнений /3/:

$$\Phi(x^2, y) = \frac{f_{1,1,0}\, f^2_{1,0,0} \cdot f_{0,-1,3}}{f^3_{1,0,1}} = C(w), \qquad /39/$$

где $f_{1,0,0}(x^2, y)$, $f_{1,1,0}(x^2, y)$, $f_{1,0,1}(x^2, y)$ заданы /24-26/ $(z = 1)$, а $f_{0,-1,3}(x^2, y)$ есть решение уравнения /34/ с указанными в /37.2/ значениями μ_i и ϵ. Согласно /3/ и /34/ функция $C(w)$ обладает следующими свойствами:

$$C(-w) = C(w),$$

$$C(w+1) = -C(w).$$

В заключение следует заметить, что для получения замкнутого выражения для общего интеграла /39/ нелинейной системы уравнений /3/ необходимо установить явный вид функции $f_{0,-1,3}(x^2, y)$ - решения уравнения /34/, что является предстоящей задачей.

Автор выражает глубокую благодарность В.А.Мещерякову за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chew G.F., Low F.E. Phys.Rev., 1956, 101, p.1570.
2. Wanders G. Nuovo Cimento, 1962, 23, p.817.
3. Rothelutner T. Zs.Phys., 1964, 177, p.287.
4. Мещеряков В.А. ЖЭТФ, 1966, 51, с.648.
5. Мещеряков В.А. ОИЯИ, Р-2369, Дубна, 1965.
6. Журавлев В.И., Мещеряков В.А., Рерих К.В. ЯФ, 1968, 10, с.168.
7. Мещеряков В.А., Рерих К.В. ОИЯИ, Р2-4356, Р2-4377, Дубна, 1969.
8. Meshcheryakov V.A., Rerikh K.V. Ann. of Phys., 1970, 59, p.408; ТМФ, 1970, 3, с.78.
9. Мещеряков В.А. ОИЯИ, Р2-5906, Дубна, 1971.
10. Мещеряков В.А. ОИЯИ, Р2-7047, Дубна, 1973.
11. Гердт В.П., Мещеряков В.А. ОИЯИ, Р2-7976, Дубна, 1974.
12. Гердт В.П., Мещеряков В.А. ТМФ, 1975, 24, с.155.
13. Рерих К.В. ОИЯИ, Р2-12714, Дубна, 1979.

14. Hudson H. Cremona Transformations in Plane and Space. Cambridge, 1927.
15. Kaiser H. Preprint PHE-68-2, Berlin-Zeuthen, 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 ноября 1980 года.