сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

573/2-81

9/2-81

Р2-80-693

Е.Н.Румянцева

БЕЗМАССОВЫЕ САМОГРАВИТИРУЮЩИЕ КВАНТОВЫЕ ГАЗЫ В МИРЕ ФРИДМАНА

1980

В работах [1-3] были построены статистические модели мира Фридмана, являющегося хорошо известной и популярной космологической моделью в теории тяготения Эйнштейна.

В общей теории относительности, в рамках которой и проводится наше рассмотрение, гравитационное поле описывается метрическим тензором $g_{\mu\nu}$. При этом метрика четырехмерного пространства-времени определяется следующим образом:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu ,$$

где x^μ - координаты точки в рассматриваемом нами римановом мире.

Основными уравнениями теории тяготения Эйнштейна являются, как известно, уравнения

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} ,$$

где $R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$, $\kappa = 6{,}22 \times 10^{-38}$ с/г- гравитационная постоянная Эйнштейна, $T_{\mu\nu}$ - тензор энергии-импульса материи. Отметим, что $T_{\mu\nu}$ здесь - так называемый метрический тензор энергии-импульса, отличающийся в общем случае от канонического [4].

В изучении взаимодействия полевой материи с гравитационным полем исключительную роль играют известные уравнения: уравнение для скалярного поля Φ

$$\Box\Phi + \frac{R}{6}\Phi = 0, \qquad /1а/$$

здесь $\Box\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} \partial_\beta \Phi)$, g - определитель матрицы, составленной из ковариантных компонент метрического тензора; уравнения Максвелла

$$\nabla_\alpha \mathfrak{F}^{\alpha\beta} = 0,$$

$$\nabla_\mu \mathfrak{F}_{\nu\sigma} + \nabla_\sigma \mathfrak{F}_{\mu\nu} + \nabla_\nu \mathfrak{F}_{\sigma\mu} = 0, \qquad /1б/$$

где ∇_μ - оператор ковариантной производной, $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ - антисимметричный тензор электромагнитного поля; уравнения Дирака

$$H_\alpha D_\alpha \Psi = 0, \qquad /1c/$$

где H^α - четыре матрицы Дирака, Ψ - четырехкомпонентный спинор, D_α - оператор ковариантной производной спинора. Все уравнения приведены для безмассового случая.

Отметим, что каждое из этих уравнений определяется заданным видом взаимодействия материи с гравитационным полем. В общем случае вид взаимодействия, а следовательно, и вид уравнений могут быть достаточно произвольными. Поскольку нет экспериментов, где был бы определен тип взаимодействия безмассовых полей с гравитационным полем, то разумно в качестве критерия использовать фундаментальные принципы, которым подчинялись бы уравнения поля. В нашем случае таким принципом является принцип конформной инвариантности поведения безмассовых полей /4/, которому удовлетворяют все три перечисленных уравнения.

Два римановых мира называют находящимися в конформном соответствии, если их метрические тензоры связаны следующим образом:

$$g'_{\mu\nu} = B^2 g_{\mu\nu} \; ,$$

где B - скалярная функция координат x^α, которые, как предполагается, одинаковы в обоих мирах.

Такое преобразование матрического тензора индуцирует преобразования символов Кристоффеля и тензоров кривизны /6/. Уравнения /1а, в, с/ остаются при этом неизменными, но полевые функции претерпевают преобразования /5,7,8/:

$$\Phi' = \frac{1}{B}\Phi, \qquad /2a/$$

$$\Psi' = \frac{1}{B^{3/2}}\Psi, \qquad /2б/$$

$$\mathcal{F}'^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{B^2}\,\mathcal{F}^{\mu}{}_{\nu} \; . \qquad /2c/$$

Тензор энергии-импульса каждого из рассматриваемых полей преобразуется следующим образом [5,7,8]:

$$T'_{\mu\nu} = \frac{1}{B^2} T_{\mu\nu} . \qquad /3/$$

Для случая спиноров здесь надо сделать замечание - компоненты тензора энергии-импульса в /3/ выбираются в координатном базисе.

Мир Фридмана, метрика которого в бисферических координатах имеет вид

$$ds^2 = r^2 B^2(\tau)(d\tau^2 - \sin^2\zeta d\xi^2 - \cos^2\zeta d\eta^2 - d\zeta^2),$$

где r - радиус мира, τ - временная координата, ξ, η, ζ - бисферические координаты в трехмерном пространстве, изменяющиеся в пределах $0 \le \zeta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \xi, \eta \le 2\pi$, находится в конформном соответствии со статистическим сферическим миром, так же как и с миром Де Ситтера.

В последнем уравнения /1а, в, с/ были решены [5,7,8], и на основе общих принципов квантовой теории поля в римановых мирах были построены квантовые теории соответствующих полей, также удовлетворяющих принципу конформной инвариантности.

Спектр энергии частиц оказался дискретным и ограниченным снизу. Энергия основного состояния оказалась равной

$$\epsilon_0 = \frac{hc}{r}(s + 1),$$

где s - спин частиц.

Операторы энергии $\hat{H}$ и числа частиц $\hat{N}$ имеют обычный для квантовой теории поля вид

$$\hat{H} = \sum_p \epsilon_p C_p^+ C_p , \qquad \hat{N} = \sum_p C_p^+ C_p ,$$

где C_p^+ и C_p - операторы рождения и уничтожения частиц, удовлетворяющие коммутационным или антикоммутационным, в зависимости от спина, соотношениям, p - обобщенный индекс, нумерующий квантовые состояния, ϵ_p - энергия частицы в состоянии с номером p. Эти операторы конформно инвариантны.

Эти результаты сделали возможным рассмотрение квантовой статистики в римановых мирах. Статистическое среднее [9] от оператора $\hat{A}$ оказалось возможным определить так:

$$\langle\hat{A}\rangle = \frac{Sp(\hat{A}\exp - \frac{\hat{H}-\mu\hat{N}}{\Theta})}{Sp\exp - \frac{\hat{H}-\mu\hat{N}}{\Theta}}. \qquad /4/$$

Таким образом, усреднение осуществлялось по большому каноническому ансамблю. Величины Θ и μ в обычном случае имеют смысл температуры и химического потенциала, определение их здесь несколько сложнее. В качестве Θ и μ оказалось необходимым брать так называемые глобальные величины, введенные в классической статистике Максвелла-Больцмана в римановых мирах /10/. Глобальные температура и химический потенциал позволяют добиться конформной инвариантности статистического среднего от конформно-инвариантного оператора.

В соответствии с общими принципами квантовой статистики /9/ статистические средние вида /4/ от произведений операторов рождения и уничтожения частиц имеют следующий вид:

$$\langle C_p C_q\rangle = 0, \qquad \langle C_p^+ C_q^+\rangle = 0,$$

$$\langle C_p^+ C_q\rangle = \delta_{pq}\Lambda_p,$$

где $\Lambda_p = \dfrac{1}{e^{\frac{\epsilon_p-\mu}{\Theta}} + \epsilon_s}$, $\epsilon_s = \pm 1$ в зависимости от спина частиц.

Отсюда легко видеть, что средняя энергия и число частиц газа равны

$$E = g_s \sum_{p=s+1}^{\infty} \epsilon_p \Lambda_p (p^2 - s^2), \qquad N = g_s \sum_{p=s+1}^{\infty} \Lambda_p (p^2 - s^2),$$

где $g_s = 1,\ 4,\ 2$ для спина $s = 0, \frac{1}{2}, 1$; $\epsilon_p = \frac{\hbar c}{r}(p+1)$.

Введение квантовой статистики в теорию относительности было бы весьма неполным и ограниченным, если бы рассматривались лишь пробные квантовые газы, то есть газы, не оказывающие влияния на геометрию. Однако оказалось, что квантовая статистика дает нам и в общей теории относительности возможность поставить и решить самосогласованную задачу вида /11/

$$\begin{cases} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = -\kappa \langle : \hat{T}_{\mu\nu} : \rangle \\ \text{Квантовая теория поля,} \end{cases} \qquad /5/$$

где $<:\hat{T}_{\mu\nu}:> = T_{\mu\nu}$ - тензор энергии-импульса материи, определяемый как статистическое среднее от операторного тензора энергии-импульса квантованного поля./5/не является просто системой уравнений, как это имеет место, например, при рассмотрении самосогласованной задачи в рамках классических теорий. В /5/ с уравнениями Эйнштейна объединяются уравнения, которым подчиняются полевые операторы, правила квантования и правила образования статистического среднего. В силу этого /5/ представляет более сложную задачу, чем аналогичные задачи в классических теориях. К сожалению, непротиворечивым образом построить квантовую теорию поля удается не во всяком римановом мире, что заведомо ограничивает круг возможных решений /5/.

В работах /1-3/, где впервые была поставлена задача /5/, показано, что решение ее существует. В качестве примера решения /5/ рассмотрен мир Фридмана.

Задача /5/ для безмассового газа привела прежде всего к необходимости решения уравнения

$$R' = 0,$$

где R' - кривизна мира с метрикой ds'^2, выражающего тот факт, что след метрического тензора энергии-импульса безмассовых полей обращается в нуль. Как оказалось, это уравнение замечательным образом сводится к уравнению следующего вида, совпадающему с уравнением /1a/

$$\Box B + \frac{R}{6} B = 0,$$

где R - кривизна мира, находящегося в конформном соответствии с миром с метрикой ds'^2, B - соответствующий конформный множитель. Решение этого уравнения в рассматриваемом нами случае оказалось возможным взять в виде

$$B = \cos r .$$

Сделаем здесь небольшое отступление для того, чтобы отметить ряд интересных фактов, связывающих конформно-инвариантную теорию скалярного поля с геометрическими характеристиками римановых миров. Как уже отмечено выше, уравнение

$$R' = 0$$

эквивалентно уравнению /1a/ относительно конформного множителя, связывающего метрики $g'_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$. Этот факт использовался впервые в работе /1/, но осознан был лишь в работе /2/. Кроме того, отметим, что уравнение

$R' = \mathrm{const}$

эквивалентно конформно-инвариантному уравнению [4]

$$\Box\Phi + \frac{R}{6}\Phi = f\Phi^3 .$$

Здесь по-прежнему $\Phi = B$, а $f = \frac{1}{6}R'$. Наконец, последний факт состоит в том, что

$$R'_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g'_{\alpha\beta} R' = -\frac{6}{B^2} T_{\alpha\beta}(B),$$

где $R'_{\alpha\beta}$ - тензор Риччи в римановом мире с метрикой $g'_{\alpha\beta} = B\, g_{\alpha\beta}$; $T_{\alpha\beta}(\Phi)$ - метрический тензор энергии-импульса безмассового скалярного поля. Указанные соотношения еще раз подчеркивают глубокую связь физики и геометрии.

Задача /5/ привела к условиям следующего вида на тензор энергии-импульса в статическом сферическом мире радиуса

$$<:\hat{T}_{0i}:> = 0, \quad <:\hat{T}_{ik}:> = \frac{1}{3}\omega_{ik} <:\hat{T}_{00}:>, \quad <:\hat{T}_{00}:> = \mathrm{const},$$

где ω_{ik} - метрический тензор 3-мерной сферы единичного радиуса. Эти условия, как и было показано в [1-3], удовлетворяются при следующем условии на радиус мира

$$r^2 = L^2 g_s \sum_{p=s+1} p(p^2 - s^2)\Lambda p , \qquad /6/$$

где $L = \sqrt{\frac{4\gamma\hbar}{3\pi c^3}} = 1{,}05 \times 10^{-33}$ см - планковская длина. Это условие - единственное, налагаемое уравнениями Эйнштейна на состояние безмассового газа, заполняющего мир Фридмана.

Прежде чем перейти к обсуждению построенных в [1-3] моделей, сделаем несколько замечаний. Прежде всего, еще раз обратим внимание на то, что усреднение производится нами по большому каноническому ансамблю, которое, как известно, возникает при отыскании наиболее вероятного распределения квантовых систем с заданным числом частиц N и энергией E [12]. То же, очевидно, справедливо и здесь. Однако в силу уравнений Эйнштейна энергия газа E однозначно определяется радиусом мира r

$$E = \frac{\hbar c r}{L}.$$

Таким образом, при усреднении мы должны рассматривать миры различных радиусов и наполненных частицами, число которых различно, то есть эффективно усреднение производится по ансамблю миров.

Кроме того, мы должны сделать замечание относительно эволюции мира. Соотношение

$$B = \cos\tau$$

справедливо для любого газа и на первый взгляд не зависит от его состояния. Однако такое впечатление возникает вследствие того, что τ - не физическая координата. Мы можем определить физическое время t следующим образом:

$$t = \frac{r}{c}\int_0^\tau B(\lambda)\,d\lambda .$$

В нашем случае $t = \frac{r}{c}\sin\tau$, и как следствие, имеем

$$B = \sqrt{1 - \frac{c^2 t^2}{r^2}} .$$

Теперь видно, что эволюция зависит и от радиуса мира r, а следовательно, и от характеристик газа в силу /6/. Время существования мира T равно

$$T = 2\frac{r}{c}$$

и также зависит от характеристик газа.

Свойства моделей, построенных нами, могут быть описаны уравнением

$$N = N(r, \Theta),$$

которое мы будем называть уравнением состояния газа, заполняющего мир Фридмана. Получение этой зависимости в явном виде представляется весьма непростой задачей. Нам эта зависимость дается в параметрическом виде

$$\begin{cases} N = N(\alpha,\beta) = g_s \sum\limits_{q=s+1}^{\infty} (q^2 - s^2)\Lambda_q , \\ \dfrac{r^2}{L^2} = \gamma(\alpha,\beta) = g_s \sum\limits_{q=s+1}^{\infty} q(q^2 - s^2)\Lambda_q , \end{cases} \qquad /7/$$

где $\alpha=\frac{\mu}{\Theta}$; $\beta=\frac{\hbar c}{2r\Theta}$ – безразмерные величины. Исключение из этих соотношений параметра α и дало бы нам искомую зависимость. Разумеется, уравнение состояния будет зависеть и от того, каков спин частиц газа. Однако есть соотношения, общие для всех газов. Прежде всего, к ним относится неравенство

$$r \geq L\sqrt{N\,(s+1)},$$

которое следует из того, что энергия газа больше или равна энергии его частиц в наинизшем состоянии. Для бозе-газа равенство достигается при $\Theta=0$, но это, вообще говоря, неверно для ферми-газа.

Также общим свойством является невозрастание числа частиц с ростом температуры при постоянном радиусе, то есть

$$\left(\frac{\partial N}{\partial \Theta}\right)_r < 0.$$

Отметим здесь, что, говоря об изменении числа частиц, мы всегда имеем в виду изменение числа частиц от мира к миру, например, изменение числа частиц от мира с температурой Θ_1 к миру с температурой $\Theta_2 > \Theta_1$. Число же частиц в отдельно взятом мире остается неизменным.

Рассмотрим теперь бозе-газ. В этом случае /7/ можно представить в виде разложения по степеням фугитивности $z = \exp\alpha$ следующего вида:

$$\begin{cases} N = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n Z_n(\beta) & /8а/ \\ \\ \dfrac{r^2}{L^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n\, z_n(\beta), & /8б/ \end{cases}$$

где $Z_n(\beta)=\dfrac{\operatorname{sh} 2n\beta}{8\operatorname{sh}^4 n\beta}$; $z_n(\beta)=\dfrac{2+\operatorname{ch} 2n\beta}{8\operatorname{sh}^4 n\beta}$ для случая $s=0$ и

$Z_n(\beta)=\dfrac{3e^{-\beta n}-e^{-3\beta n}}{4\operatorname{sh}^3\beta n}$; $z_n(\beta)=\dfrac{3}{4}\,\dfrac{1}{\operatorname{sh}^4 n\beta}$ для случая $s=1$. Формулы /8/ справедливы при всех значениях и при учете ограничения на химический потенциал бозе-газа

$$\mu \leq \frac{\hbar c}{r}(s+1),$$

где равенство достигается при $\Theta=0$. Химический потенциал μ в данном случае может принимать и положительные значения, но с ростом температуры газа он убывает, то есть

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial \Theta}\right)_r < 0,$$

и при некоторой температуре Θ_c химический потенциал обратится в нуль. В окрестности $\Theta=0$ поведение химического потенциала определяется выражением

$$\mu \approx \frac{\hbar c}{r}(s+1) - \Theta \ln\left[1 + \frac{L^2}{r^2} g_s (s+1)(2s+1)\right].$$

Температура Θ_c, которую мы называем критической, в приближении $r \gg L$ определяется следующим образом:

$$\Theta_c \sim \frac{\hbar c}{\sqrt{Lr}}$$

с точностью до несущественного числового множителя, слабо зависящего от спина частиц газа. При $r = 1{,}894 \times 10^{10}$ св.лет/предполагаемый максимальный радиус Вселенной/ $\Theta_c \approx 30$K, что на порядок превышает температуру реликтового электромагнитного излучения.

В случае бозе-газа благодаря /8/ легко осуществить предельный переход $r \to \infty$ от сферического мира к миру Минковского. Для пробного бозе-газа в сферическом мире плотности числа частиц n и энергии E равны

$$n = \frac{4\Theta^3}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \sum_{k=1}^{\infty} z^k Z_k(\beta)\beta^3, \qquad \epsilon = \frac{8\Theta^4}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \sum_{k=1}^{\infty} z^k z_k(\beta)\beta^4.$$

При конечной температуре пределу $r \to \infty$ соответствует предел $\beta \to 0$. Легко видеть, что в таком пределе имеем $Z_n \beta^3 \to \frac{g_s}{4n^3}$, $z_n \beta^4 \to \frac{3g_s}{8n^4}$. При этом для плотностей получаем выражения

$$n = g_s \frac{\Theta^3}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \sum_{k=1}^{\infty} z^k \frac{1}{k^3}, \qquad \epsilon = g_s \frac{3\Theta^4}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \sum_{k=1}^{\infty} z^k \frac{1}{k^4},$$

совпадающие с известными выражениями для соответствующих плотностей в мире Минковского /12/.

Здесь надо учесть, что в силу свойств химического потенциала при любых r и Θ выполнено строгое неравенство

$$\alpha < 2\beta.$$

Поэтому и в пределе $r \to \infty$ будет сохранено неравенство

$$z < 1.$$

Однако в статистической модели мира Фридмана предельный переход привел бы нас к тому, что при бесконечном числе частиц и энергии плотности их равны нулю.

Формулы /8/ позволяют нам также произвести приближенное исключение фугитивности. Из формулы /8б/ необходимо получить выражение для фугитивности, разложенной в ряд по степеням отношения r^2/L^2. Подстановка этого выражения в /6а/ дает нам зависимость $N = N(r, \Theta)$. Эта процедура вполне аналогична известной процедуре получения вириальных разложений /12,13/. В первом приближении мы получим $N = N_1$, где

$$N_1 = \frac{r^2}{L^2}\,\frac{\operatorname{sh} 2\beta}{2 + \operatorname{ch} 2\beta} \qquad \text{и} \qquad N_1 = \frac{r^2}{L^2}\,\frac{1}{3}\operatorname{sh}\beta(3e^{-\beta} - e^{-3\beta}) \qquad /9/$$

для спина, равного 0 и 1 соответственно.

Отметим, что N и N_1 связаны неравенством $N \geq N_1$. Равенство достигается только при $r = 0, \infty$ и $\Theta = 0, \infty$.

Формулы /9/ оказываются справедливыми в области больших и малых значений r, Θ. Оценки их применимости нетрудно получить, рассмотрев следующее приближение для зависимости $N = N(r, \Theta)$.

В случае ферми-газа рассмотрим первоначально поведение около точки $\Theta = 0$. Как известно, в этом случае Λ_q имеет вид

$$\Lambda_q = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \frac{\hbar c}{r} q - \mu_0 > 0 \\ 1 & \text{при} \quad \frac{\hbar c}{r} q - \mu_0 < 0, \end{cases}$$

где μ_0 - химический потенциал при $\Theta = 0$. Значение μ_0 необходимо положительное, только в этом случае при $\Theta = 0$ число частиц и их энергия отличны от нуля. Точнее, μ_0 удовлетворяет неравенству

$$\mu_0 > \frac{\hbar c}{r}(s + 1).$$

Будем далее обозначать $q_0 = [\frac{r\mu_0}{\hbar c}]$ - целую часть $\frac{r\mu_0}{\hbar c}$. Тогда имеем следующие соотношения:

$$N = 4 \sum_{p=3/2}^{q_0-1} (p^2 - \frac{1}{4}) + 4\sigma (q_0^2 - \frac{1}{4}),$$

$$\gamma = 4 \sum_{p=3/2}^{q_0-1} p(p^2 - \frac{1}{4}) + 4\sigma(q_0^2 - \frac{1}{4}) q_0,$$

где $\sigma = \frac{1}{2}$; если $\frac{\mu_0 r}{\hbar c} = q_0$, и $\sigma = 1$, если $\frac{\mu_0 r}{\hbar c} > q_0$. Отсюда легко найти q_0

$$q_0 = [\frac{2\gamma}{3N} - 2(\sigma - \frac{1}{2})] \pm \sqrt{[\frac{2\gamma}{3N} - 2(\sigma - \frac{1}{2})]^2 - \frac{3}{4} + \frac{4\gamma}{N}(\sigma - \frac{1}{2})}.$$

Однако значение μ_0 можно найти, только если $\sigma = \frac{1}{2}$, в противном случае μ_0 известно лишь с точностью до $\frac{\hbar c}{r}$.

Если же $q_0 \gg 1$, то $N \approx \frac{4}{3} q_0^3$ и $\gamma \approx q_0^4$, откуда имеем

$$q_0 \approx \sqrt[4]{\gamma} \approx \sqrt{\frac{r}{L}}.$$

Таким образом, в этом случае

$$\mu_0 \approx \frac{\hbar c}{\sqrt{rL}}.$$

При $r = 1,894 \times 10^{10}$ св.лет $\mu_0 \approx 50K$.

Отметим также приближенное уравнение состояния ферми-газа, пригодное только для высоких температур, в отличие от приведенного выше приближенного уравнения состояния бозе-газа

$$N \approx \frac{2}{3} \frac{r^2}{L^2} \operatorname{th} \frac{\hbar c}{2r\Theta}. \qquad /10/$$

Рассмотрим случай, когда за геометрию мира ответствен не только безмассовый газ, но и классические массивные частицы. Предполагая, что тензор энергии-импульса классической материи имеет вид

$$T_{\alpha\beta} = (p + \epsilon) u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta},$$

где p - давление, ϵ - плотность энергии, u_α - скорости частиц, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d^2B}{dt^2} + B = \dfrac{\kappa}{6} r^2(\epsilon - 3p) B^3 & /11а/ \\ \\ \dfrac{d\epsilon}{dt} = -3 \dfrac{\epsilon + p}{B} \dfrac{dB}{dt}. & /11б/ \end{cases}$$

К этой системе уравнений относительно неизвестных ϵ, p, B добавляется уравнение состояния $\epsilon = \epsilon(p)$. Уравнения /11 а,б/ независимо от вида функции $\epsilon(p)$ допускают первый интеграл движения, для которого в соответствии с уравнениями Эйнштейна имеем

$$g_s \sum_{q=s+1}^{\infty} q(q^2 - s^2)\Lambda_q \frac{L^2}{r^2} = \left[\left(\frac{dB}{dt}\right)^2 + B^2 - \frac{\kappa}{3} r^2 \epsilon B^4\right]. \qquad /12/$$

Подробно рассмотрим случай пыли ($p = 0$). При этом имеем

$$B = \frac{r_g}{r} + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\cos r$$

и следующее условие на радиус мира

$$\frac{r^2}{L^2}\left(1 - 2\frac{r_g}{r}\right) = g_s \sum_{q=s+1}^{\infty} q^2 (q^2 - s^2)\Lambda_q,$$

где $r_g = \dfrac{2\gamma M}{3\pi c^2}$, M – полная масса пыли в мире Фридмана.

Время эволюции T мира Фридмана в этом случае определяется следующим образом:

$$T = \pi + 2 \cdot \delta T,$$

где $\sin \delta T = \dfrac{r}{r - r_g}$.

Здесь также возникает ограничение сверху на число частиц безмассового газа

$$N \le \left(\frac{r^2}{L^2} - \frac{r}{\lambda}\right)\frac{1}{s+1}, \qquad \text{где } \lambda = \frac{\hbar}{Mc}.$$

Для нейтринного газа приближенное уравнение состояния, обобщающее /10/, имеет вид

$$N \approx \frac{r(r-2r_g)}{L^2}\cdot\frac{2}{3}\,\mathrm{th}\left(\frac{\hbar c}{2r\Theta}\right).$$

Для энергии Ферми здесь в том же приближении имеем ($\epsilon_F=\mu_0$)

$$\epsilon_F \approx \frac{hc}{r}\left(\frac{r^2}{L^2}-\frac{r}{\lambda}\right)^{1/4}.$$

Учет массивной материи ведет к уменьшению, вообще говоря, энергии Ферми нейтринного газа. Однако наблюдаемая масса вещества в реальной Вселенной с плотностью $\rho \approx 3\times10^{-31}\frac{г}{см^3}$ недостаточно велика, чтобы оказывать заметное влияние на ϵ_F в мире с радиусом $r=1{,}896\times10^{10}$ св.лет. Это дает основание для предположения о вырожденности реликтового нейтринного газа в реальной Вселенной.

В работах /14,15/ высказывалось предположение о возможной большой плотности нейтрино, недоступных экспериментальному обнаружению, но которые могут давать большой вклад в плотность материи во Вселенной и влиять на решение вопроса о ее замкнутости. В настоящее время этот вопрос оказывается тем более актуальным и важным, так как в работе /16/ устанавливается существование отличной от нуля массы электронного нейтрино. Хотя нейтрино нами рассматривались как безмассовые частицы спина $\frac{1}{2}$, однако наше рассмотрение оказывается в большем соответствии с существованием массы у нейтрино, чем если бы мы воспользовались для описания нейтрино двухкомпонентными спинорами.

В рамках наших моделей рассмотрим спектральную плотность числа нейтрино, которая в нашем случае имеет вид

$$\rho_q = 4q(q+1)\Lambda_q,$$

где q - целое число $|q\geq 1|$. Максимум ρ_q в случае мира радиуса $r=1{,}896\times10^{10}$ св.лет и $\Theta=2{,}7\,K$, (что соответствует реликтовому излучению в реальной Вселенной), достигается при $q\sim10^{30}$. Энергия нейтрино при таких q оказывается $\sim10^{-3}$ эВ, при этом $\rho_{max}\sim10^{61}$ частиц. В то же время характерная нижняя граница энергетического спектра экспериментально обнаружимых нейтрино составляет /14,15/ ~1 МэВ. В наших моделях число нейтрино с такой энергией оказывается практически равным нулю.

Таким образом, в нашей модели мира Фридмана оказывается, что при $r = 1{,}896 \times 10^{10}$ св.лет основное число нейтрино имеет энергию много меньше, чем энергия ~1 МэВ. При этом, согласно построенной модели, именно эти нейтрино и ответственны за замкнутость рассматриваемой нами Вселенной.

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору Н.Н.Боголюбову /мл./ за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черникова Е.Н. ОИЯИ, Р2-7708, Дубна, 1974; в сб.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 6, Под ред. К.П.Станюковича. Атомиздат, М., 1975, с. 59.
2. Румянцева Е.Н. ТМФ, 27, с. 190, 1976.
3. Румянцева Е.Н. ТМФ, 28, 1976, с. 411.
4. Черников Н.А. В сб.: Нелокальные и неперенормируемые теории поля. Материалы Ш Международного совещания по нелокальным теориям поля. ОИЯИ, Д2-7161, Дубна, 1973.
5. Chernikov N.A., Tagirov E.A. Ann. Inst. Henri Poincare, IX, 1968, p. 109.
6. Норден А.П. Пространства аффинной связности. "Наука", М., 1976.
7. Черников Н.А., Шавохина Н.С. В сб.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 5. Под ред. К.П.Станюковича. Атомиздат, М., 1974, с. 154.
8. Пестов А.Б., Черников Н.А., Шавохина Н.С. ТМФ, 1973, 23, с. 331.
9. Боголюбов Н.Н. Лекции по квантовой статистике. Избранные труды. т. 2, "Наукова думка", Киев, 1970.
10. Chernikov N.A. Acta Physica Polonica, XXYI, 1964, p. 1069.
11. Rumyantseva E.N. In "Abstracts of Contributed Papers for the Discussion Groups". 9-th International Conference on General Relativity and Gravitation, 1980.
12. Исихара А. Статистическая физика. "Мир", М., 1973.
13. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика, "Мир", М., 1978, т. 1.
14. Зельдович Я.Б., Смородинский Я.А. ЖЭТФ, 1961, 41, с. 239.
15. Понтекорво Б.М., Смородинский Я.А. ЖЭТФ, 1961, 41, с. 907.
16. Козик В.С. и др. ЯФ, 1980, 32, с. 301.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 октября 1980 года.