объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-80-684

Б.М.Барбашов, А.А.Леонович

ТЕНЗОРНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ. ДВИЖЕНИЕ В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Направлено в "Вестник МГУ"

1980

В теории электромагнитного поля фигурирует антисимметричное тензорное поле второго ранга. Согласно уравнениям Максвелла, внешняя производная d и обобщенная дивергенция δ этого тензорного поля при отсутствии зарядов обращаются в нуль /1/. Эти факты наводят на мысль, что, если наряду с уравнениями Максвелла существуют другие релятивистские уравнения, формулируемые в терминах этих дифференциальных операторов δ и d, то можно ожидать, что они будут представлять интерес и с физической точки зрения.

Оператор d повышает, а δ понижает на единицу ранг антисимметричных тензорных полей. Поэтому операторы δ и d не действуют в пространствах антисимметричных тензорных полей данного ранга. С этим можно связать равенство нулю массы покоя фотона. Ситуация коренным образом изменяется, если мы рассмотрим прямую сумму антисимметричных тензорных полей всех возможных рангов /известно, что прямое произведение двух дираковских спиноров приводимо и разлагается на скаляр, вектор, бивектор, 3-вектор и 4-вектор [2] /. Составляя линейные комбинации операторов δ и d, можно факторизовать оператор Клейна-Гордона в пространстве указанных полей. Полученные при этом дифференциальные уравнения первого порядка обладают рядом замечательных свойств.

Настоящая работа является развитием теории тензорного волнового уравнения, предложенного в работах [3-5], где рассмотрен лагранжев формализм и изучены свойства симметрии уравнения. В статьях [3,4] исследуемое уравнение рассматривается как общековариантная формулировка уравнения Дирака.

Цель работы - изучение тензорного тока вероятности и решение задачи о движении тензорной частицы в поле плоской электромагнитной волны.

Рассматривается система уравнений /см. работы [3-5] /

$$\begin{cases} \nabla^{\sigma}\psi_{\sigma} = m\psi, \\ \nabla_{\mu}\psi_{\nu} - \nabla_{\nu}\psi_{\mu} - i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\nabla^{\alpha}\psi^{\beta} = m\psi_{\nu\mu}, \\ \nabla^{\sigma}\psi_{\sigma\mu} - \nabla_{\mu}\psi = m\psi_{\mu}, \end{cases} \qquad /1/$$

где $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ - единичный антисимметричный псевдотензор с $\epsilon_{0123} = 1$, $\nabla_{\mu} = \partial_{\mu} - ieA_{\mu}$. Метрика пространства Минковского определяется тензором $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+---)$. Из второго уравнения системы следует, что

$$\tilde{\psi}_{\mu\nu} = i\psi_{\mu\nu}\,, \qquad /2/$$

где $\tilde{\psi}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\psi^{\alpha\beta}$ - бивектор дуальный $\psi_{\mu\nu}$. Волновую функцию тензорной частицы запишем в виде $\Psi = (\psi, \psi_\mu, \psi_{\mu\nu})$.

Из уравнений /1/ и им комплексно сопряженных путем исключения m получим уравнение непрерывности:

$$\partial^{\nu}\Pi_{\mu\nu}(\psi) = 0\,, \qquad /3/$$

где

$$\Pi_{\mu\nu}(\psi) = g_{\mu\nu}(\bar{\psi}\Psi - \bar{\psi}_\alpha\psi^\alpha) + \psi_\mu\bar{\psi}_\nu + \bar{\psi}_\mu\psi_\nu - \bar{\psi}_{\mu\alpha}\psi^{\alpha}_{\nu\cdot} + \bar{\psi}\psi_{\mu\nu} + \psi\bar{\psi}_{\mu\nu} - i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\psi}^{\alpha}\psi^{\beta} \qquad /4/$$

- действительный тензорный ток, аналогичный векторному току вероятности в теории Дирака. $\bar{\Psi}$ - поле, комплексно сопряженное Ψ. При доказательстве равенства /3/ были использованы вытекающие из условия самодуальности /2/ соотношения

$$\bar{\psi}_{\mu\nu}\psi^{\mu\nu} = 0, \quad \bar{\psi}_{\mu\alpha}\psi^{\nu\alpha} = \psi_{\mu\alpha}\bar{\psi}^{\nu\alpha},$$
$$\delta^{\beta}_{\mu}\psi_{\nu\alpha} + \delta^{\beta}_{\nu}\psi_{\alpha\mu} + \delta^{\beta}_{\alpha}\psi_{\mu\nu} = i\epsilon_{\mu\nu\alpha\sigma}\psi^{\sigma\beta}. \qquad /5/$$

Исходя из /3/, можно сформулировать интегральный закон сохранения, а именно, интегралы

$$I_0(\psi) = \int\Pi_{00}(\psi)\,d^3x, \quad I_k(\psi) = \int\Pi_{k0}(\psi)\,d^3x \qquad /6/$$

определяют не зависящие от времени инварианты. Отметим, что величина $I_0(\psi)$ существенно положительна, поскольку

$$\Pi_{00}(\psi) = \bar{\psi}\psi + \sum_{a=0}^{3}(\bar{\psi}_a\psi_a + \bar{\psi}_{0a}\psi_{0a}). \qquad /7/$$

Интегралы движения /6/ существуют независимо от того, присутствует или нет электромагнитное поле, поэтому для тензорного волнового уравнения задача о движении частицы во внешнем электромагнитном поле может быть поставлена корректно.

В рамках волнового уравнения /1/ скаляр и самодуальный бивектор составляют своеобразную геометрическую величину, имеющую четыре линейно независимые компоненты. Эта величина и вектор входят в уравнение симметрично - подобно тому, как спиноры первого и второго рода входят в уравнение Дирака. Квадрирование уравнений /1/ приводит к системе

$$\begin{cases} (\nabla^{\sigma}\nabla_{\sigma} + m^2)\psi_\mu = ie(F_{\mu\alpha} + i\tilde{F}_{\mu\alpha})\psi^{\alpha}, \\ (\nabla^{\sigma}\nabla_{\sigma} + m^2)\psi = \frac{ie}{2}F_{\alpha\beta}\psi^{\alpha\beta}, \\ (\nabla^{\sigma}\nabla_{\sigma} + m^2)\psi_{\mu\nu} = ie(F_{\mu\alpha}\psi^{\alpha}_{\cdot\nu} - F_{\nu\alpha}\psi^{\alpha}_{\cdot\mu}) - ie(F_{\mu\nu} - i\tilde{F}_{\mu\nu})\psi, \end{cases} \qquad /8/$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ - тензор электромагнитного поля. При выводе уравнений 2-го порядка важную роль играют соотношения

$$\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu = -ieF_{\mu\nu}$$
$$\nabla_\mu\psi_{\nu\alpha} + \nabla_\nu\psi_{\alpha\mu} + \nabla_\alpha\psi_{\mu\nu} = i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\nabla_\sigma\psi^{\beta\sigma}\,. \qquad /9/$$

Из /8/ следует, что при отсутствии электромагнитного поля A_μ каждая компонента поля Ψ удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона.

Рассмотрим задачу о движении тензорной частицы в поле плоской электромагнитной волны [6]. Поле плоской волны с волновым 4-вектором $K_\mu (K^2=0)$ зависит от 4-координат лишь в комбинации $\phi = K^\mu X_\mu$, кроме того, 4-потенциал $A_\mu = A_\mu(\phi)$ удовлетворяет условию калибровки Лоренца $K^\mu A_\mu = 0$. Исходим из уравнений второго порядка /8/, в которых тензор поля имеет вид $F_{\mu\nu} = K_\mu A'_\nu - K_\nu A'_\mu$. Для первого уравнения из системы /8/ получим

$$(\partial^\sigma\partial_\sigma - 2ieA^\sigma\partial_\sigma - e^2A^\sigma A_\sigma + m^2)\psi_\mu = ie(F_{\mu\alpha} + i\tilde{F}_{\mu\alpha})\psi^{\alpha}\,. \qquad /10/$$

Ищем решение этого уравнения в виде $\psi_\mu(x) = e^{-ipx}\chi_\mu(\phi)$, где $p^2 = m^2$. Получаем

$$\chi'_\mu = i\left[\frac{e}{(kp)}(pA) + \frac{e^2}{2(kp)}A^2\right]\chi_\mu - \frac{e}{2(kp)}(F_{\mu\alpha} + i\tilde{F}_{\mu\alpha})\chi^{\alpha}\,. \qquad /11/$$

Интеграл этого уравнения легко находится

$$\psi_\mu(X) = e^{iS}\left[g_{\mu\alpha} - \frac{e}{2(kp)}(F_{\mu\alpha} + i\tilde{F}_{\mu\alpha})\right]U^{\alpha}\,, \qquad /12/$$

где $S = -pX - \int\limits_0^{kx}\left[\frac{e}{(kp)}(pA) + \frac{e^2}{2(kp)}A^2\right]d\phi$ - классическое действие для частицы, движущейся в поле волны. Аналогичным образом для полей $\psi, \psi_{\mu\nu}$ из /8/ получим

$$\psi(X) = e^{iS}\left[U - \frac{e}{(kp)}\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}U^{\alpha\beta}\right],$$
$$\psi_{\mu\nu}(X) = e^{iS}\left\{U_{\mu\nu} - \frac{e}{(kp)}\left[\frac{1}{2}F_{\mu\alpha}U^{\alpha}_{\cdot\nu} - \frac{1}{2}F_{\nu\alpha}U^{\alpha}_{\cdot\mu} - \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} - i\tilde{F}_{\mu\nu})U\right]\right\}, \qquad /13/$$

где U, U_α, $U_{\alpha\beta}$ - решения свободных уравнений движения, в которые переходят /13/ при $A=0$. Далее нетрудно найти для полученных решений тензорный ток $\Pi_{\mu\nu}$ и среднее значение плотности тока по времени. Подробный анализ выражения $\Pi_{\mu\nu}$ для полученных решений - предмет дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уилер Д.А. Гравитация нейтрино и Вселенная. ИЛ, М., 1962.
2. Картан Э. Теория спиноров. ИЛ, М., 1947.
3. Lanezos C. Z.f. Phys., 1929, 57, pp.447,474,484.
4. Cercignani C. J.Math.Phys., 1965, 8, No.3, p.417.
5. Пестов А.Б. ТМФ, 1978, 34, №1, с.48; ЯФ, 1979, т.30, вып.2, с.181; ОИЯИ, Р2-12557, Дубна, 1979.
6. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Релятивистская квантовая теория. "Наука", М., 1968, ч.1.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 октября 1980 года.