объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-80-683

А.А.Леонович, А.Б.Пестов

О ВЕКТОРНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

Направлено в ЯФ

1980

Как известно, скалярное представление группы Лоренца соответствует бесспиновой частице, а спинорное описывает частицу со спином 1/2. Векторное представление существенно отличается от этих простейших представлений. Дело в том, что с ним нельзя непосредственно связать одно определенное значение спина[1], т.к. 4-вектор наряду с квантами спина 1 описывает еще кванты спина 0. Обычно принято описывать векторным полем спин 1. В любом случае возникает необходимость в дополнительных условиях, исключающих так называемый нефизический спин. Если отказаться от дополнительных условий, то векторное представление можно рассматривать как зарядовое пространство, в котором действует группа, изоморфная группе SU(2). Локализация этой группы приводит к необходимости введения неабелевого калибровочного поля, законы преобразования которого по отношению к группе SU(2) и к группе Лоренца нетрудно получить.

Исследуем систему уравнений, полученную в работах[2,3]:

$$\begin{aligned} &\partial^{\sigma}\psi_{\sigma}=\lambda\psi, \\ &\partial_{\mu}\psi_{\nu}-\partial_{\nu}\psi_{\mu}-i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\partial^{\alpha}\psi^{\beta}=\lambda\psi_{\nu\mu}, \\ &\partial^{\sigma}\psi_{\sigma\mu}-\partial_{\mu}\psi=\lambda\psi_{\mu}, \end{aligned} \qquad /1/$$

где $\lambda=\frac{mc}{h}$, $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ - единичный антисимметричный псевдотензор с $\epsilon_{0123}=1$. Метрика пространства Минковского определяется тензором $g_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(+---)$. Из второго уравнения системы следует, что

$$\tilde{\psi}_{\mu\nu}=i\psi_{\mu\nu}, \qquad /2/$$

где $\tilde{\psi}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\psi^{\alpha\beta}$ - бивектор дуальный $\psi_{\mu\nu}$.

В рамках волнового уравнения скаляр ψ и самодуальный бивектор $\psi_{\mu\nu}$ составляют геометрическую величину, имеющую четыре линейно независимые компоненты. Эта величина и 4-вектор ψ_{μ} входят в уравнение симметрично, подобно тому, как спиноры первого и второго рода входят в уравнение Дирака.

Из уравнений /1/ и им комплексно сопряженных путем исключения λ получим уравнение непрерывности

$$\partial^{\sigma}\Pi_{\mu\sigma}=0, \qquad /3/$$

где $$\Pi_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(\bar\psi\psi - \bar\psi_a\psi^a) + \bar\psi_\mu\psi_\nu + \bar\psi_\nu\psi_\mu - \bar\psi_{\mu\sigma}\psi_{\nu\cdot}^{\ \sigma} + \bar\psi\psi_{\mu\nu} + \bar\psi_{\mu\nu}\psi - i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\bar\psi^\alpha\psi^\beta \qquad /4/$$

- действительный тензорный ток, аналогичный векторному току вероятности в теории Дирака. Исходя из равенства /3/, можно записать интегральный закон сохранения, а именно, интегралы

$$I_0 = \int \Pi_{00} d^3x, \qquad I_k = \int \Pi_{k0} d^3x \qquad /5/$$

определяют не зависящие от времени инварианты. Отметим, что величина I_0 существенно положительная, поскольку

$$\Pi_{00} = \bar\psi\psi + \sum_{a=0}^{3}(\bar\psi_a\psi_a + \bar\psi_{0a}\psi_{0a}). \qquad /6/$$

Рассмотрим отображение, задаваемое самодуальным бивектором $L_{\mu\nu}$ /3/ :

$$\psi' = \frac{1}{4}L_{\alpha\beta}\psi^{\alpha\beta}$$

$$\psi'_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}L_{\mu\sigma}\psi^{\ \sigma}_{\cdot\nu} + \frac{1}{2}L_{\nu\sigma}\psi^{\ \sigma}_{\cdot\mu} - L_{\mu\nu}\psi, \qquad /7/$$

$$\psi'_\mu = -L_{\mu\sigma}\psi^\sigma .$$

Преобразование /7/ вектор переводит в вектор, а скаляр и самодуальный бивектор выступают здесь как единое целое. Бивекторы $L^{ij}_{\mu\nu} = E^{ij}_{\mu\nu} - \tilde E^{ij}_{\mu\nu}$, где $E^{ij}_{\mu\nu} = 2\delta^i_{[\mu}\delta^j_{\nu]}$ задают операторы $L^{ij} = -L^{ji}$, действующие в пространстве решений волнового уравнения. Латинские индексы нумеруют бивекторы и пробегают значения 0,1,2,3. Операторы L^{ij} линейно зависимы, так как

$$L^{12} = -iL^{03}, \quad L^{23} = -iL^{01}, \quad L^{31} = -iL^{02}. \qquad /8/$$

Положим, как обычно,

$$L^1 = L^{23}, \ L^2 = L^{31}, \quad L^3 = L^{12}. \qquad /9/$$

Структурные соотношения для операторов $S^a = -\frac{i}{2}L^a \quad a = 1,2,3$

$$S^aS^b = \frac{1}{4}\delta^{ab} + \frac{i}{2}\epsilon^{abc}S^c, \quad S^aS^b - S^bS^a = i\epsilon^{abc}S^c, \qquad /10/$$

где ϵ^{abc} - единичный антисимметричный тензор 3-го ранга. Таким образом, в пространстве решений волнового уравнения действует группа преобразований, изоморфная группе SU(2). Операторы ком-

мутируют с операторами сдвига P_μ и не коммутируют с генераторами группы Лоренца $M_{\mu\nu}$.

Волновое уравнение при наличии электромагнитного и неабелевого калибровочного полей получается заменой в /1/

$$\partial_\mu \to \partial_\mu - \frac{ie}{hc}A_\mu - \frac{1}{2}\frac{g}{hc}\vec W_\mu \vec L. \qquad /11/$$

При квадрировании системы /1/ получим уравнение второго порядка для ψ_μ и ψ, $\psi_{\mu\nu}$. При отсутствии A_μ, W^a_μ каждое из входящих в /1/ полей удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона.

Имеет место следующее утверждение.

Если ψ, ψ_μ, $\psi_{\mu\nu}$ удовлетворяют волновому уравнению /1/ с ковариантной производной /11/, то интеграл $I_0 = \int \Pi_{00}d^3x$ не зависит от времени.

Из уравнений движения /1/ следует

$$\partial^\nu\Pi_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\frac{g}{hc}\vec W^\nu\{ g_{\mu\nu}(\bar\psi\vec\psi' - \bar\psi^a\vec\psi'_a) + \bar\psi_\mu\vec\psi'_\nu + \bar\psi_\nu\vec\psi'_\mu - \bar\psi_{\mu a}\vec\psi'^{\ a}_{\nu\cdot} + \bar\psi_{\mu\nu}\vec\psi' + \bar\psi\vec\psi'_{\mu\nu} - i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\bar\psi^\alpha\vec\psi'^\beta\} + \text{k.c.}, \qquad /12/$$

где $\vec\psi'$, $\vec\psi'_\mu$, $\vec\psi'_{\mu\nu}$ определяются выражением /7/. Используя вытекающие из условий самодуальности соотношения

$$\bar\psi_{\mu\nu}\psi^{\mu\nu} = 0, \quad \bar\psi_{\mu\sigma}\psi^{\nu\sigma} = \psi_{\mu\sigma}\bar\psi^{\nu\sigma},$$

$$\partial_\mu\psi_{\nu a} + \partial_\nu\psi_{a\mu} + \partial_a\psi_{\mu\nu} = i\epsilon_{\mu\nu a\beta}\partial_\sigma\psi^{\beta\sigma}, \qquad /13/$$

$$\delta^\beta_\mu\psi_{\nu a} + \delta^\beta_\nu\psi_{a\mu} + \delta^\beta_a\psi_{\mu\nu} = i\epsilon_{\mu\nu a\sigma}\psi^{\sigma\beta},$$

после громоздких преобразований получим, что на решениях уравнений движения выполняется важное соотношение

$$\partial^\nu\Pi_{\mu\nu} = -2\frac{g}{hc}W^a_\nu E^a_{\mu\sigma}\Pi^{\sigma\nu}, \qquad /14/$$

где $E^1_{\mu\nu} = E^{23}_{\mu\nu}$, $E^2_{\mu\nu} = E^{31}_{\mu\nu}$, $E^3_{\mu\nu} = E^{12}_{\mu\nu}$. Расписывая явный вид $E^a_{\mu\nu}$, получим

$$\partial^\nu\Pi_{0\nu} = 0, \qquad /15/$$

что и требовалось доказать.

Итак, величина I_0 сохраняется независимо от того, присутствуют или нет электромагнитное и неабелево поля. Таким образом, задача о движении заряженной векторной частицы во внешних полях указанного типа поставлена корректно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Огиевецкий В.И., Полубаринов И.В. ЖЭТФ, 1963, 45, с.237.
2. Френкель Я.И. Волновая механика. ОНТИ-ГТТИ, Л.-М., 1934, ч.2.
3. Пестов А.Б. ЯФ, 1979, т.30, вып.2, с.181; ОИЯИ, Р2-12557, Дубна, 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 октября 1980 года.