сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-80-620

Р.М.Ямалеев

КЛАССИЧЕСКИЕ И КВАНТОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА В СПИНОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1980

Как известно, в начальный период развития квантовой механики теория Гамильтона-Якоби /ГЯ/ послужила определенной ступенью при выводе основных уравнений квантовой теории как естественных обобщений уравнений классической механики. Теория ГЯ в какой-то степени уже содержит черты волновой теории: поверхность постоянного действия соответствует фронту волны, а траектории движения являются ортогональными траекториями для этих поверхностей. Уравнение ГЯ представляет собой эйкональное приближение соответствующего волнового уравнения. Такими волновыми уравнениями являются в нерелятивистском случае уравнение Шредингера, в релятивистском - Клейна-Гордона. В связи с обнаружением у элементарных частиц новых степеней свободы - спиновых были найдены новые уравнения: в нерелятивистском случае уравнение Паули, в релятивистском - Дирака для спина 1/2 и Прока для спина 1 [1]. Последние два уравнения получены путем факторизации оператора Клейна-Гордона в базисе спинорных и в базисе векторных функций соответственно. Для уравнений Дирака и Прока нет соответствующих аналогов в классической механике наподобие теории ГЯ, последовательным развитием которых они бы явились. Как показано в работе [2], создание такой теории возможно в рамках самых основных понятий классической механики. Однако соответствующее обобщение полученных уравнений на квантовый случай приводит только к уравнениям типа Прока для спина 1. В этой связи представляется интересным исследование той формулировки классической механики, которая привела бы непосредственно к уравнениям Паули и Дирака для спина 1/2.

Настоящая работа посвящена исследованию данного вопроса.

1. МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТРЕХМЕРНОГО ВЕКТОРА

Имеет место одно замечательное представление 3-мерного вектора в виде матрицы второго порядка, которое позволяет записывать основные формулы классической механики в несколько ином виде. В этом случае мы всегда имеем возможность перейти от матричного представления к векторному и восстановить прежнюю форму записи известных формул. Однако матрица есть оператор, действующий в соответствующем пространстве. Таким образом, мы приходим к двумерному комплексному пространству, которое соответствует пространству спиновых переменных. Подобное представление в классической механике возникло в связи с параметрами Кэйли-Клейна, они были введены главным образом для облегчения интегрирования уравнений движения сложных гироскопических систем /3/.

Сопоставим вектору

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}, \qquad /1/$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные вектора, матрицу

$$\hat{R}=\begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}. \qquad /2/$$

Вид матрицы /2/ выбран так, чтобы определитель матрицы соответствовал квадрату длины вектора r. В данном случае

$$|\hat{R}|=-|\vec{r}|^2. \qquad /3/$$

Как нетрудно убедиться, матрица /2/ является самосопряженной, кроме того, след ее /или шпур/ равен нулю. Как известно, оба эти свойства матрицы сохраняются при подобном преобразовании.

Рассмотрим преобразование поворота посредством углов Эйлера. Ради краткости введем обозначения:

$$x_{\pm}=x\pm iy.$$

При повороте на угол ϕ вокруг оси z для величин x_+ , x_- и z будем иметь следующие формулы преобразования:

$$x'_{\pm}=e^{-i\phi}x_{\pm}, \quad z'=z.$$

При этом матрица $\hat{R}$ переходит в матрицу $\hat{R}'$

$$\hat{R}'=\begin{pmatrix} z' & x'_- \\ x'_+ & -z' \end{pmatrix}$$

посредством подобного преобразования

$$\hat{R}'=Q_{\phi}R\,Q^{+}_{\phi}, \qquad /4/$$

где

$$Q_{\phi}=\begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}, \qquad /5/$$

Q^{+}_{ϕ} - матрица, эрмитовски сопряженная с Q_{ϕ} .

Матрица, соответствующая повороту вокруг новой оси на угол θ против хода часовой стрелки, имеет вид

$$Q_\theta = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad /6/$$

а матрица поворота вокруг новой оси z на угол ψ против хода часовой стрелки выглядит аналогично матрице /5/:

$$Q_\psi = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix}. \qquad /7/$$

Матрица Q рассматриваемого полного поворота будет равна произведению матриц /5/, /6/, /7/:

$$Q = Q_\phi Q_\theta Q_\psi = \begin{pmatrix} e^{i(\psi+\theta)/2}\cos\frac{\theta}{2} & i\,e^{i(\psi-\phi)/2}\sin\frac{\theta}{2} \\ i\,e^{-i(\psi-\phi)/2}\sin\frac{\theta}{2} & e^{-i(\psi+\phi)/2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Пользуясь матричным представлением /2/, можно переписать все основные формулы классической механики, заменяя вектора на соответствующие матрицы. При этом надо иметь в виду, что длине вектора соответствует определитель матрицы, а производные от матрицы надо понимать в смысле производной Фреше.

В такой формулировке лагранжиан системы есть скалярная функция матриц $\hat{R}, \dot{\hat{R}}$:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\hat{R}, \dot{\hat{R}}).$$

Из интегрального принципа Гамильтона

$$\delta S = \delta \int \mathfrak{L}\, dt = 0$$

находим уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\hat{R}}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \hat{R}} = 0. \qquad /8/$$

Здесь выражение

$$\hat{p} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\hat{R}}}$$

представляет собой обобщенный импульс. Его можно представить через компоненты 3-мерного вектора импульса

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} p_z & p_x + ip_y \\ p_x - ip & -p_z \end{pmatrix} \qquad /9/$$

2. ДВУМЕРНОЕ КОМПЛЕКСНОЕ ПРОСТРАНСТВО. СПИНОРЫ

Как уже было отмечено выше, представление вектора /1/ в виде матрицы /2/ приводит к понятию двумерного комплексного пространства. Действительно, матрицу $\hat{R}$ в этом случае можно рассматривать как оператор, действующий в двумерном комплексном пространстве, которое далее будем называть спинорным пространством. Введем соответствие между векторами спинорного пространства и векторами 3-мерного пространства так, чтобы имело место уравнение

$$\hat{R}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad /10/$$

где λ - собственное значение матрицы $\hat{R}$, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$- собственные вектора. Собственные значения уравнения /10/ находятся из равенства

$$\begin{vmatrix} z-\lambda & x-iy \\ x+iy & -z-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $\lambda_{1,2} = \pm r$; r - длина вектора /1/.

Таким образом, каждому вектору /1/ из 3-мерного пространства с компонентами x, y, z сопоставляется два вектора из спинорного пространства, которые будем называть спинорами, соответствующие собственным значениям λ_1 и λ_2.

Ортогональному преобразованию в обычном действительном пространстве трех измерений соответствует унитарная матрица $\hat{Q}$, определитель которого равен +1, в двумерном комплексном пространстве $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \hat{Q}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \qquad /11/$$

И наоборот, если в спинорном пространстве определена унитарная матрица $\hat{Q}$, соответствующая ортогональному преобразованию /повороту/ в двумерном комплексном пространстве, то, как известно, матрицы /операторы/ в этом пространстве будут определяться согласно формуле

$$\hat{R}' = \hat{Q}\hat{R}\hat{Q}^{+} ,$$

что совпадает с формулой /4/.

Пространство (uv) не является чисто математической конструкцией, созданной только для того, чтобы установить соответствие между 3-мерными векторами и матрицами второго порядка. Оно физически вполне реально, однако в классической механике мы не в состоянии обнаружить его с помощью известных взаимодействий. Со спинорным пространством мы сталкиваемся только в квантовой механике в силу некоммутативности компонент оператора импульса в присутствии внешнего поля.

3. НЕКОТОРЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ В СПИНОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Спинорное пространство не обладает кинематикой и динамикой как таковой. Здесь не имеет смысла вводить понятие скорости, ускорения и т.д. Однако здесь имеют смысл понятия оператора скорости, оператора ускорения. Временной зависимостью обладают только операторы, действующие в данном пространстве. Таким образом, имеет место ситуация, аналогичная представлению Гейзенберга в квантовой механике: динамикой обладают операторы, а не собственные вектора данного пространства. Например, уравнение движения для оператора импульса /9/ имеет вид:

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = \hat{F},$$

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} F_z & F_+ \\ F_- & -F_z \end{pmatrix} , \qquad /12/$$

что, естественно, совпадает с обычными уравнениями движения.

В настоящей работе мы прежде всего будем интересоваться понятием момента импульса в спинорном пространстве и его уравнением движения. С этой целью проведем некоторую аналогию.

Момент импульса определяется как векторное произведение импульса на радиус-вектор

$$\vec{K} = [\vec{r} \times \vec{p}] . \qquad /13/$$

Преобразуем выражение /13/ так, чтобы оно выглядело как действие оператора $\hat{p}$ /соответствующей матрицы/ на вектор $\vec{r}$ /представленный в виде 3-строчного столбца/. Имеем

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} 0 & p_z & -p_y \\ -p_z & 0 & p_x \\ p_y & -p_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \equiv \hat{p}\vec{r}. \qquad /14/$$

Так выглядит матрица $\hat{p}$ в 3-мерном пространстве. Для полноты картины заметим, что подобный вид имеет антисимметричная матрица поворота радиуса-вектора на бесконечно малый угол:

$$d\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & d\Omega_z & -d\Omega_y \\ -d\Omega_z & 0 & d\Omega_x \\ d\Omega_y & -d\Omega_x & 0 \end{pmatrix}. \qquad /15/$$

Как известно, спину 1 соответствуют спиновые матрицы вида

$$\tau_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad /16/$$

Матрицы $\hat{p}$ и $d\hat{\Omega}$ можно представить в виде разложения по матрицам /16/:

$$\hat{p} = p_x \tau_x + p_y \tau_y + p_z \tau_z . \qquad /17/$$

Точно так же можно разложить матрицу /9/ по спиновым матрицам Паули:

$$\hat{p} = p_x \sigma_x + p_y \sigma_y + p_z \sigma_z . \qquad /18/$$

Развивая данную аналогию, запишем момент импульса в спинорном пространстве в фоФме, аналогичной формуле /14/:

$$\vec{K}_s = \begin{pmatrix} p_z & p_+ \\ p_- & -p_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_u \\ K_v \end{pmatrix}.$$

Соответственно уравнение движения будет иметь вид:

$$\frac{d\vec{K}_s}{dt} = \hat{F}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_u \\ N_v \end{pmatrix}, \qquad /19/$$

где оператор $\hat{F}$ определяется выражением /12/. Приращения, которые получают составляющие двумерного вектора при бесконечно малом преобразовании,определяются матричным уравнением

$$d\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} d\hat{\Omega},$$

где $d\hat{\Omega}$ - матрица вида /15/.

Выражение /16/ является аналогом приращения 3-мерного вектора

$$d\vec{r} = \vec{r}\, d\hat{\Omega} ,$$

где $d\hat{\Omega}$ - матрица вида /15/.

Напишем уравнения Эйлера в спинорном пространстве. Уравнение движения /19/ в подвижной системе Эйлера примет вид

$$\left(\frac{d\vec{K}_s}{dt}\right) = \left(\frac{d\vec{K}_s}{dt}\right) + \hat{\omega}\vec{K}_s = N_s ; \qquad /20/$$

здесь $\left(\frac{d}{dt}\right)$, $\left(\frac{d}{dt}\right)$ - производные в инерциальной и во вращающихся системах отсчета соответственно; $\hat{\omega}$ - оператор угловой скорости тела, равный

$$\hat{\omega} = \frac{d\hat{\Omega}}{dt}.$$

Предположим, что $\hat{\omega}$ и $\vec{K}_s$ связаны посредством "момента инерции" I_s ,

$$I_s = \begin{pmatrix} I_u & \\ & I_v \end{pmatrix}, \qquad \vec{K}_s = I_s\hat{\omega} . \qquad /21/$$

С учетом /20/ уравнения /19/ примут вид

$$\begin{aligned} &\frac{dK_u}{dt} + \omega_z K_u + \omega_+ K_v = N_u , \\ &\frac{dK_v}{dt} + \omega_- K_u - \omega_z K_v = N_v , \end{aligned} \qquad /22/$$

или

$$I_u\dot{\omega}_z + I_v\dot{\omega}_- + I_u(\omega_z^2 + \omega_+^2) + I_v(\omega_-\omega_z + \omega_+\omega_z) = N_u ,$$

$$I_u \dot{\omega}_+ - I_v \dot{\omega}_z + I_u(\omega_z \omega_- + \omega_+ \omega_z) + I_v(\omega_-^2 + \omega_z^2) = N_v .$$

Последние уравнения являются аналогом уравнений Эйлера в спинорном пространстве.

4. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА. УРАВНЕНИЕ ПАУЛИ

Прежде чем вывести уравнение Паули для спина 1/2, рассмотрим случай спина 1. К уравнению Паули для спина 1 приводят обычные соотношения между компонентами момента импульса и импульса. Начнем с определения момента импульса через импульс и радиус-вектор

$$\vec{K} = [\vec{r} \times \vec{p}\,] . \qquad /23/$$

В рамках теории Гамильтона-Якоби, где

$$\vec{p} = \frac{\partial S}{\partial \vec{x}} ,$$

S - функция действия, $\vec{K}$ можно представить как

$$\vec{K} = \operatorname{rot} \vec{U} , \qquad /24/$$

где $\vec{U}$ - некоторая функция, являющаяся векторным аналогом скалярной функции действия. Выражение для абсолютного дифференциала $\vec{U}$ запишем в виде:

$$d\vec{U} = [\operatorname{rot}\vec{U} \times d\vec{r}\,] + [\operatorname{grad}(\vec{v}\vec{U}) + \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}]\, dt . \qquad /25/$$

Отсюда видно, что для определения $\vec{U}$ кроме $\vec{K}$ необходимо еще знать вектор

$$-\vec{T} = \operatorname{grad}(\vec{v}\vec{U}) + \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} . \qquad /26/$$

Как показано в работе /2/, с другой стороны,

$$-\vec{T} = \frac{1}{2m}[\,\vec{p} \times \vec{K}\,] . \qquad /27/$$

Подставляя /24/ и /26/ в /27/, получим уравнение для $\vec{U}$:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \operatorname{grad}(\vec{v}\vec{p}\,) = \frac{1}{2m}[\,\vec{p} \times \vec{K}\,] . \qquad /28/$$

Имеют место следующие алгебраические соотношения между векторами $\vec{K}$ и $\vec{T}$:

$$\vec{T} + \frac{1}{2m}[\vec{p}\times\vec{K}] = 0,$$

$$-[\vec{p}\times\vec{T}] - H\vec{K} = 0, \qquad /29/$$

$$(\vec{p}\vec{K}) = 0, \quad (\vec{p}\vec{T}) = 0.$$

Уравнение /29/ является первым квазиклассическим приближением уравнения Паули для спина 1. Квантовомеханические уравнения получатся, если в уравнениях /29/ произвести замену вектора импульса и гамильтониана на соответствующие операторы по общепринятому правилу:

$$\vec{p} = -ih\frac{\partial}{\partial\vec{x}} + \frac{e}{c}\vec{A}, \qquad /30/$$

$$H = ih\frac{\partial}{\partial t} - e\phi,$$

$(\vec{A}, \phi)$ - потенциалы электромагнитного поля.

Уравнение Паули для спина 1/2 будем выводить аналогичным способом. Наряду с моментом импульса в спинорном пространстве (u, v) введем еще аналог вектора $\vec{T}$:

$$\vec{T}_s = \hat{p}\vec{K}_s,$$

или

$$\vec{T}_s = \begin{pmatrix} T_u \\ T_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_z & p_+ \\ p_- & -p_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_u \\ K_v \end{pmatrix}. \qquad /31/$$

В этих обозначениях система уравнений /29/ примет вид

$$\vec{T}_s + \frac{1}{2m}\hat{p}\vec{K}_s = 0, \qquad /32/$$

$$\hat{p}\vec{T}_s - H\vec{K}_s = 0.$$

В квантовом случае оператор $\hat{p}$ есть

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} -ih\frac{\partial}{\partial z} + \frac{e}{c}A_z & -ih\frac{\partial}{\partial x} + h\frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{c}A_+ \\ -ih\frac{\partial}{\partial x} - h\frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{c}A_- & ih\frac{\partial}{\partial z} - \frac{e}{c}A_z \end{pmatrix}. \qquad /33/$$

Подставляя в /32/ $\hat{p}$ из /33/ и H из /30/, получим известное уравнение Паули.

5. СПИНОРЫ В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ /СТО/

Много работ посвящено математической теории спиноров в четырехмерном евклидовом и псевдоевклидовом пространствах. В настоящей работе мы ограничимся определением спинора как собственного вектора оператора 4-мерного псевдоевклидова пространства, который в СТО имеет вид

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} z & x-iy & 0 & -it \\ x+iy & -z & -it & 0 \\ 0 & it & z & x+iy \\ it & 0 & x-iy & -z \end{pmatrix} . \qquad /34/$$

Обозначим через $\psi=(\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4)$ 4-компонентный спинор. Тогда

$$\hat{R}\psi=\lambda\psi . \qquad /35/$$

Уравнение /35/ имеет собственные значения

$$\lambda_{1,2} = \pm S ,$$

где S - величина интервала.

Импульс, канонически сопряженный с оператором $\hat{R}$, имеет вид

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} p_z & p_x+ip_y & 0 & -i\epsilon \\ p_x-ip_y & -p_z & -i\epsilon & 0 \\ 0 & i\epsilon & p_z & p_x-ip_y \\ i\epsilon & 0 & p_x+ip_y & -p_z \end{pmatrix} . \qquad /36/$$

Рассмотрим собственные значения и собственные вектора оператора $\hat{p}$:

$$\hat{p}\,\phi=\lambda\phi . \qquad /37/$$

Здесь ϕ 4-мерный спинор, $\lambda_{1,2} = \pm m_0$ - масса покоя. Если в уравнении /37/ сделаем замену /30/, то получим известное уравнение Дирака.

В параграфе 3 было введено определение "векторного произведения" в спинорном пространстве, которое является аналогом обычной операции векторного произведения для 3-мерного вектора. Пользуясь данной аналогией, приведем несколько уравнений, производя соответствующую замену векторного произведения в уравнениях типа Прока и в уравнениях Максвелла.

В работе[2] получены следующие уравнения для тензора кинетического момента:

$$[\vec{p} \times \vec{K}] - \epsilon \vec{T} = \vec{j},$$

$$[\vec{p} \times \vec{T}] + \epsilon \vec{K} = 0, \qquad /38/$$

$$(\vec{p}\vec{T}) = \rho, \quad (\vec{p}\vec{K}) = 0.$$

Здесь

$$\vec{K} = [\vec{r} \times \vec{p}], \quad \vec{T} = \vec{r}\epsilon - \vec{p}t,$$

$$\vec{j} = m_0^2 \vec{r} - I_0 \vec{p}, \quad \rho = m_0^2 t - \epsilon I_0, \qquad /39/$$

$$I_0 = \epsilon t - \vec{r}\vec{p}.$$

В спинорном пространстве величины $\vec{K}$ и $\vec{T}$ трансформируются в следующие:

$$\vec{K} = \hat{p}\vec{r} - \epsilon \vec{t},$$

$$\qquad /40/$$

$$\vec{T} = \hat{p}\vec{t} - \epsilon \vec{r},$$

где $\hat{p}$ - оператор из /9/, $\vec{r}_s, \vec{t}_s$ - "пространственные" и "временные" спиноры вида

$$\vec{r}_s = \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix}, \quad \vec{t}_s = \begin{pmatrix} t_u \\ t_v \end{pmatrix}. \qquad /41/$$

Совместно они образуют 4-мерный спинор

$$\psi = \begin{pmatrix} r_s \\ t_s \end{pmatrix}.$$

Для величин /40/ справедливы следующие уравнения:

$$\hat{p}\vec{K}_s - \epsilon \vec{T}_s = m_0^2 \vec{r}_s \quad ,$$

$$\hat{p}\vec{T}_s - \epsilon \vec{K}_s = m_0^2 \vec{t}_s \quad . \qquad /42/$$

Уравнения /42/ являются аналогом уравнений Прока в спинорном пространстве. Соответственно аналог уравнений Максвелла в спинорном пространстве имеет вид

$$\hat{p}H_s - \epsilon E_s = j_r \ ,$$

$$\hat{p}E_s - \epsilon H_s = j_t \ . \qquad /43/$$

Здесь $F = \begin{pmatrix} H_s \\ E_s \end{pmatrix}$ - спинор "напряженности поля", $j = \begin{pmatrix} j_r \\ j_t \end{pmatrix}$ - спинор "тока". Спинор напряженности H_s и E_s можно записать через спиноры-потенциалы A_r и A_t:

$$H_s = \hat{p}A_r - \epsilon A_t \ ,$$

$$E_s = \hat{p}A_t - \epsilon A_r \ .$$

Уравнения /43/ инвариантны относительно "калибровочных" преобразований

$$A'_r = A_r + \hat{p}f \ ,$$

$$A'_t = A_t + \epsilon f \ ,$$

где $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, причем

$$(\hat{p}^2 - \epsilon)\, f = 0 \ .$$

Подобная инвариантность напоминает калибровочную инвариантность в электродинамике с учетом условия Лоренца.

В заключение отметим основные моменты настоящей работы:

1. Вектора обычного 3-мерного пространства являются операторами по отношению к спинорному пространству.

2. Векторное произведение рассматривается как действие вектора импульса, представленного в виде разложения по спиновым матрицам /16/, на 3-мерный вектор. Аналог этой операции в спинорном пространстве есть действие оператора импульса /9/ на спинор.

3. Классические уравнения для момента импульса в векторном пространстве при переходе в квантовую область приводят к урав-

нениям Паули и Прока для спина 1, в спинорном пространстве аналогичные операции приводят к уравнениям Паули и Дирака для спина 1/2.

4. Представляет интерес рассматривать некоторые уравнения для спиноров, полученные по аналогии с волновыми уравнениями для векторных полей путем замены векторного произведения на соответствующее операторное, векторов - на соответствующие спиноры.

Автор благодарит проф. Е.П.Жидкова за поддержку и интерес к работе, А.Б.Пестова - за плодотворную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Young J.A., Bludman S.A. Phys.Rev., 1963, 131, 5, p.2326.
2. Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р4-12774, Дубна, 1979.
3. Голдстейн Г. Классическая механика. "Наука", М., 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 сентября 1980 года.