сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-80-619

Р.М.Ямалеев

КЛАССИЧЕСКИЕ И КВАНТОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ТЕНЗОРА КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

1980

I. Вектор-функция действия

В классической механике импульс $\vec{p}$ и кинетический момент $\vec{K}$ рассматриваются как объекты одинаковой природы, относящиеся к классу обобщенных импульсов, сопряженных, соответственно, обобщенным координатам. В работе /I/ показано, что направление исследования можно несколько изменить, если рассматривать величины $\vec{p}$ и $\vec{K}$ относительно одних и тех же переменных, определяя кинетический момент через импульс $\vec{p}$ и радиус-вектор $\vec{r}$

$$\vec{K} = [\vec{r} \times \vec{p}]. \qquad (I)$$

Из теории ГЯ* известно, что вектор импульса можно представить как градиент от скалярной функции

$$\vec{p} = grad\, S. \qquad (2)$$

В этом случае, как нетрудно убедиться,

$$div\, \vec{K} = 0, \qquad (3)$$

откуда следует, что $\vec{K}$ можно представить как ротор от некоторой вектор-функции

$$\vec{K} = rot\, \vec{u}. \qquad (4)$$

Сравнение выражений (2) и (4) наталкивает на мысль о существовании уравнения для вектор-функции $\vec{u}$, аналогичного уравнению ГЯ для функции S. Искомое уравнение можно вывести из

---

* ГЯ – Гамильтона-Якоби

анализа дифференциальных форм и пользуясь теорией ГЯ, согласно которой

$$\vec{P} = grad\, S \ , \quad H = -\frac{\partial S}{\partial t} \ , \tag{5}$$

Н – гамильтониан системы.

Знание величин $\vec{P}$ и H , а также соотношений между ними, т.е. функции

$$H = H(\vec{P})$$

вполне достаточно для установления вида уравнения для S и определения ее полного дифференциала

$$dS = (\vec{P}\, d\vec{z}) - H\, dt \ . \tag{6}$$

Рассмотрим, какие величины необходимо знать для определения вектор-функции $\vec{u}$. С этой целью представим полный дифференциал $\vec{u}$ в следующем виде:

$$d\vec{u} = [rot\, \vec{u} \times d\vec{z}] + grad\, (\vec{u}\, d\vec{z}) + \frac{\partial \vec{u}}{dt}\, dt \ , \tag{7}$$

откуда следует, что для решения поставленной задачи необходимо и достаточно знание векторов

$$\begin{aligned} &\vec{K} = rot\, u \\ &\vec{T} = -\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - grad\, (\vec{u}\, \vec{\vartheta}) \ , \end{aligned} \tag{8}$$

а также функции

$$\vec{T} = \vec{T}(\vec{K}) \ . \tag{9}$$

Согласно определениям (I) и (4), вектор $\vec{K}$ есть вектор кинетического момента. Вектор $\vec{T}$ в литературе не имеет соответствующего названия; о нем мы можем здесь сказать лишь то, что, если $\vec{K}$ рассматривать как аналог импульса, $\vec{u}$ – как аналог S , то $\vec{T}$ получит соответствующую интерпретацию как аналог гамильтониана. Пользуясь этой аналогией, сформулируем принцип стационарности для вектор-функции действия, которую определим как интеграл

$$\vec{u} = \int [\vec{K} \times d\vec{z}] - \vec{T}\, dt \ . \tag{IO}$$

Согласно принципу стационарности, уравнения движения определяют те траектории, для которых

$$\delta \vec{u} = 0.$$

Вычислим вариацию интеграла (I0).

$$\delta \vec{u} = \int [\delta \vec{K} \times d\vec{r}] + [\vec{K} \times d(\delta \vec{r})] - \delta \vec{T} dt = 0, \tag{II}$$

где

$$\delta \vec{T} = [rot_K \vec{T} \times \delta \vec{K}] + [rot_r \vec{T} \times \delta \vec{r}] , \tag{I2}$$

$$\int [\vec{K} \times d(\delta \vec{r})] = \int [\delta \vec{r} \times d\vec{K}] . \tag{I3}$$

Подставляя (I2) и (I3) в (II) и приравнивая к нулю выражения при одинаковых вариациях, находим

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = - rot_K \vec{T} , \quad \frac{d\vec{K}}{dt} = - rot_r \vec{T}. \tag{I4}$$

Первое из уравнений определяет явный вид функции (9). Отсюда следует, что

$$\vec{T} = \frac{1}{2} [\vec{K} \times \vec{v}] + \vec{V}(\vec{r}) . \tag{I5}$$

С целью раскрытия смысла второго из уравнений рассмотрим уравнение движения для кинетического момента. Согласно второму закону Ньютона,

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = [\vec{r} \times \vec{F}] . \tag{I6}$$

Допустим, что

$$\vec{F} = - grad\, \varphi ,$$

где

φ – потенциальная функция.

Тогда

$$div [\vec{r} \times \vec{F}] = 0 \quad \text{или} \quad [\vec{r} \times \vec{F}] = - rot\, \vec{V},$$

откуда следует, что уравнения (I4) и (I6) эквивалентны. Уравнения (I4) аналогичны уравнениям Гамильтона. Пользуясь формулами (8) и (I5), можно также написать аналог уравнения ГЯ для вектор-функции $\vec{u}$. Искомое уравнение имеет вид:

$$-\frac{\partial \vec{\mathcal{U}}}{\partial t} - grad\,(\vec{\mathcal{U}}\,\vec{\vartheta}) = \frac{1}{2}[rot\,\vec{\mathcal{U}} \times \vec{\vartheta}\,] + \vec{V}(\vec{r}\,). \qquad (17)$$

Так же, как и в рамках традиционной теории ГЯ, мы здесь имеем дело с каноническими преобразованиями

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}\,(\vec{r}_0\,, \vec{K}_0\,, t\,)\,, \\ \vec{K} &= \vec{K}\,(\vec{r}_0\,, \vec{K}_0\,, t\,)\,, \end{aligned} \qquad (18)$$

сохраняющими вид уравнений (14). $(\vec{r}, \vec{K})$ и $(\vec{r}_0\,, \vec{K}_0)$ – совокупность новых и старых координат и компонент вектора кинетического момента, соответственно. В этом случае вектор-функция $\vec{\mathcal{U}}$ играет роль производящей функции. Поскольку

$$\vec{\mathcal{U}} = \int_{r_0}^{r} [\,\vec{K} \times d\vec{r}\,] - \int_{t_0}^{t} \vec{T}\,dt + \vec{\mathcal{U}}_0\,,$$

следует равенство

$$d\,\vec{\mathcal{U}} = [\,\vec{K} \times d\,\vec{r}\,] - [\,\vec{K}_0 \times d\,\vec{r}_0\,] - \vec{T}dt + \vec{T}_0\,dt_0 + d\,\vec{\mathcal{U}}_0\,, \qquad (19)$$

которое и раскрывает смысл уравнения (17).
Из равенства (19) следует, что

$$\vec{K} = rot_r\,\vec{\mathcal{U}}\;,\quad \vec{K}_0 = rot_{r_0}\,\vec{\mathcal{U}}\,,$$

$$\vec{T} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{U}}}{\partial t} - grad\,(\vec{\mathcal{U}}\,\vec{\vartheta}\,).$$

В ряде случаев уравнение (17) и весь изложенный выше формализм можно применить для интегрирования уравнения движения (14). Этот метод может оказаться эффективным, когда в задаче действительно присутствуют внешние векторные поля типа $\vec{K}$, которые действуют только на кинетический момент. Если же внешнее поле вводится обычным путем, например, путем "удлинения" импульса и энергии

$$\begin{aligned} \vec{p} &\longrightarrow \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\,, \\ H &\longrightarrow H - e\varphi\,, \end{aligned} \qquad (20)$$

то разработанный выше формализм полностью эквивалентен теории ГЯ. Действительно, в этом случае вместо (15) мы можем написать следующую систему уравнений:

$$\vec{T} + \frac{1}{2m}\left[(\vec{P} + \frac{e}{c}A) \times \vec{K} \right] = 0 \,,$$

$$\left[(\vec{P} + \frac{e}{c}A) \times \vec{T} \right] - (H - e\varphi)\vec{K} = 0 \,, \qquad (21)$$

$$((\vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A})\vec{K}) = 0 \,, \qquad ((\vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A})\vec{T}) = 0 \,.$$

Из системы (21) следует, что векторы $\vec{T}$, $\vec{K}$ и $\vec{P}+\frac{e}{c}\vec{A}$ взаимно перпендикулярны. Исключим из системы вектор $\vec{T}$, тогда для вектора $\vec{K}$ получим уравнение

$$-\frac{1}{2m}\left[(\vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A}) \times \left[(\vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A}) \times \vec{K} \right] \right] - (H + e\varphi)\vec{K} = 0 \,.$$

Раскрывая квадратные скобки по известной формуле векторного исчисления, получим

$$-\frac{1}{2m}(\vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A})((\vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A})\vec{K}) + \vec{K}\frac{(\vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A})^2}{2m} - (H + e\varphi)\vec{K} = 0 \,.$$

Но $((\vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A})\vec{K}) = 0$, следовательно,

$$\left[\frac{1}{2m}(\vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A})^2 - (H + e\varphi) \right]\vec{K} = 0 \qquad (22)$$

или

$$\frac{1}{2m}(\vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A})^2 = H + e\varphi \,.$$

Таким образом, мы получили известное соотношение между энергией и импульсом в нерелятивистской классической механике. В данном случае выражение в квадратных скобках равно определителю системы (21), и равенство его нулю предполагает существование нетривиальных решений данной системы.

2. Квантовое уравнение движения для вектора кинетического момента

Изложенный выше формализм, равно как и метод ГЯ, хотя и могут оказать некоторую помощь при решении задач механики, однако с современной точки зрения их главная ценность состоит в том, что они играют существенную роль в построении новых теорий.

В частности, именно концепции классической механики типа ГЯ были исходными пунктами в построении квантовой механики. Забегая вперед, отметим, что если обобщение уравнений ГЯ в духе идей Л. де Бройля приводит к уравнению Шредингера, то применение подобной процедуры к уравнениям (2I) приводит к уравнению Паули для спина "единица". Таким образом, можно сказать, что наличие спина уже содержится в классических уравнениях (2I), но электромагнитное взаимодействие не обнаруживает его. Как известно, спиновые эффекты проявляются только в квантовой механике.

В уравнениях (2I) осуществим переход в квантовую механику согласно известному рецепту, при замене

$$P_i \quad \text{на оператор} \quad -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$H \quad \text{на оператор} \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}.$$

Система (2I) трансформируется при этом в следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\vec{T} + \frac{1}{2m}\left[\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \frac{e}{c}\vec{A}\right) \times \vec{K}\right] = 0,$$
$$\left[\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \frac{e}{c}\vec{A}\right) \times \vec{T}\right] - \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\varphi\right)\vec{K} = 0, \tag{23}$$
$$\left(\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)\vec{K}\right) = 0, \quad \left(\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)\vec{T}\right) = 0.$$

Как и должно быть, в квазиклассическом приближении уравнения (23) переходят в систему (2I). Решение в квазиклассическом приближении будем искать в виде

$$\vec{K} = e^{iS/\hbar}\left[\vec{K}_0 + \hbar\vec{K}_1 + \dots\right],$$
$$\vec{T} = e^{iS/\hbar}\left[\vec{T}_0 + \hbar\vec{T}_1 + \dots\right]. \tag{24}$$

Подставив (24) в (23) и приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях $\hbar$, получим

$$\vec{T}_0 + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}}S + \frac{e}{c}\vec{A}\right) \times \vec{K}_0\right] = 0.$$

$$\left[\left(\frac{\partial S}{\partial \vec r}+\frac{e}{c}\vec A\right)\times \vec T_0\right]-\left(-\frac{\partial S}{\partial t}+e\varphi\right)\vec K_0=0,$$

$$\left(\left(\frac{\partial S}{\partial \vec r}+\frac{e}{c}\vec A\right)\vec K_0\right)=0, \quad \left(\left(\frac{\partial S}{\partial \vec r}+\frac{e}{c}\vec A\right)\vec T_0\right)=0,$$

т.е. уравнения (21).

В отсутствие внешнего поля каждая компонента векторов $\vec K$ и $\vec T$ удовлетворяет уравнению Шредингера. Включение внешнего поля приводит к появлению в уравнении Шредингера добавочных членов. Появление дополнительных слагаемых связано с некоммутативностью компонент оператора

$$\hat\pi_i=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{e}{c}A_i. \qquad (25)$$

Рассмотрим случай постоянного магнитного поля. Оператор (25) удовлетворяет следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned}
&[\pi_x,\pi_y]=-i\hbar\frac{e}{c}\mathcal{H}_z\\
&[\pi_y,\pi_z]=-i\hbar\frac{e}{c}\mathcal{H}_x\\
&[\pi_z,\pi_x]=-i\hbar\frac{e}{c}\mathcal{H}_y\ ,
\end{aligned} \qquad (26)$$

где $\mathcal{H}_x,\mathcal{H}_y,\mathcal{H}_z$ – составляющие магнитного поля.

Исключим из уравнений (23) вектор $\vec T$. Тогда с учетом соотношений (26) получим следующее уравнение для $\vec K$:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\vec K=\hat H_0\vec K+\mu[\vec{\mathcal{H}}\times\vec K], \qquad (27)$$

здесь $\mu=\frac{\hbar e}{2mc}$,

$$\hat H_0=\frac{1}{2m}\left[\pi_x^2+\pi_y^2+\pi_z^2\right]-e\varphi .$$

Представим вектор-функцию $\vec K$ в виде столбца

$$\vec K=\begin{pmatrix}K_x\\K_y\\K_z\end{pmatrix},$$

тогда уравнение (27) можно переписать так:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \vec{K} = \hat{H}_0 \vec{K} + \mu (\hat{\tau} \vec{\mathcal{H}}) \vec{K}, \tag{28}$$

где $\hat{\tau}$ – оператор с компонентами

$$\tau_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Как известно, оператор $\hat{\tau}$ является генератором группы выражения. Размерность этой группы 3 ; алгебра Ли в присоединенном представлении задается антисимметричными матрицами 3х3 вида (29). Матрицы (29) удовлетворяют коммутационным условиям

$$[\tau_i, \tau_j] = \varepsilon_{ijk} \tau^k,$$

ε_{ijk} – полностью антисимметричный тензор, $\varepsilon_{123} = 1$.

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2 = -2.$$

Уравнение (28) есть уравнение Паули для спина "единица". Его можно было получить непосредственно, подставляя в уравнении Паули вместо оператора σ (матрицы Паули) оператор τ. Но приведенный выше вывод уравнения (28) представляет методический интерес, поскольку показывает взаимосвязь квантового уравнения типа Паули с классическими уравнениями (2I). Уравнения (2I) описывают движение кинетического момента во внешнем поле. Интерес представляет тот факт, что переход к квантовым уравнениям из (2I) привел к появлению в системе спина I, т.е. квантованию кинетического момента. Волновая функция в случае свободного движения имеет вид:

$$\vec{K} = \vec{K}_0 e^{\frac{i}{\hbar}(p z - \varepsilon t)}.$$

Таким образом, амплитуда волновой функции в вероятностной трактовке соответствует вектору кинетического момента.

В качестве примера рассмотрим движение в постоянном магнитном поле /2/. Если магнитное поле достаточно слабое, то членами в операторе $\hat{H}_0$, содержащими квадрат векторного потенциала, мы можем пренебречь. В этом случае для гамильтониана получим следующее приближенное выражение:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) - e\varphi + \frac{e}{2mc} [(\hat{M} + \hbar \hat{\tau}) \vec{\mathcal{H}}], \tag{30}$$

$\hat{M}$ – оператор орбитального момента количества движения.

В задаче со сферической симметрией зависящая от магнитного поля поправочная часть оператора энергии коммутирует с главной частью. Поэтому поправка к уровню энергии на магнитное поле состоит просто в добавлении к нему собственного значения поправочного члена. Если направить ось z вдоль магнитного поля, то добавка будет равна

$$\Delta E = \frac{e\hbar}{2mc}\,(M \pm \Delta M)\,\mathcal{H}_z\,, \tag{31}$$

где

M – собственное значение оператора $\hat{M}_z$,
а $\Delta M = \pm 1, 0$ – собственное значение оператора $\hat{\tau}$.

3. Классические и квантовые уравнения движения для тензора кинетического момента в СТО[ж)]

В рамках СТО с помощью ~~4-мерных~~ векторов импульса p_i и координат x_i можно составить следующее выражение для антисимметричного тензора кинетического момента

$$M_{ij} = x_i p_j - x_j p_i\,, \tag{32}$$

которое обобщает выражение (I) на релятивистский случай /3/. Раскроем тензор (32) в матричной форме

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & K_1 & K_2 & T_1 \\ -K_1 & 0 & K_3 & T_2 \\ -K_2 & -K_3 & 0 & T_3 \\ -T_1 & -T_2 & -T_3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Таким образом, векторы $\vec{K}$ и $\vec{T}$ в СТО объединяются в один антисимметричный тензор, причем

$$\vec{K} = [\vec{r} \times \vec{p}]\,, \quad \vec{T} = \vec{r}\,\varepsilon - \vec{p}\,t\,. \tag{34}$$

ж) СТО – специальная теория относительности

В теории ГЯ, где

$$P_i = \frac{\partial S}{\partial x^i} ,$$

выражение (32) можно представить в виде

$$M_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x^k} - \frac{\partial u_k}{\partial x^i} , \tag{35}$$

обобщающем формулы (8). Получим уравнения на 4-вектор-функцию u_i в рамках теории ГЯ. С этой целью умножим (32) слева на p^i и просуммируем по i. Учитывая основное соотношение классической релятивистской механики

$$\mathcal{E}^2 = P^2 + m_0^2 , \tag{36}$$

получим

$$\begin{gathered} m_0^2 x_k - P_k S = p^i M_{ki} , \\ S = p^i x_i . \end{gathered} \tag{37}$$

Если принять во внимание (35), то система (37) превращается в следующее уравнение типа ГЯ на 4-вектор-функцию u_i, обобщающее уравнение (17) на случай СТО

$$P_i \left(\frac{\partial u_k}{\partial x^i} - \frac{\partial u_i}{\partial x^k} \right) + P_k \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = m_0^2 x_k . \tag{38}$$

Соотношение (35) наталкивает на мысль о существовании волновых уравнений типа уравнений Максвелла для функций u_i. Действительно, если из (35) можно получить первую пару уравнений Максвелла, то в качестве аналога второй пары (в эйкональном приближении) мы имеем уравнения (37). Интересно, что в этом случае роль "тока" выполняет выражение

$$J_k = m_0^2 x_k - P_k S ,$$

причем, как нетрудно проверить,

$$p^k J_k = 0 .$$

Квантовомеханические волновые уравнения, естественно, мы получим так же, как и в нерелятивистском случае, путем замены

$$P_i \to \hat{\pi}_i \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{e}{c} A_i . \tag{39}$$

Таким образом, уравнения (35) и (37) примут вид

$$M_{ik} = \hat{\pi}_i\, U_k - \hat{\pi}_k\, U_i \;,$$
$$m_o^2\, U_k = \hat{\pi}^i M_{ki} + \hat{\pi}_k\, \mathcal{S} \qquad (40)$$
$$\mathcal{S} = \hat{\pi}^i\, U_i \;.$$

В отсутствие взаимодействия каждая компонента волновой функции удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона. Если положить $\mathcal{S}=0$, то уравнения (40) переходят в известные уравнения Прока /4/, однако, в отличие от последних, внешнее поле в (40) включается корректно. Интересно, что одно из обобщений уравнений Прока (формализм Штукельберга) /5/ имеет форму (40). Обобщения уравнения Прока предпринимались с целью устранения противоречия в процедуре включения взаимодействия. Подробное обсуждение этих вопросов можно найти в работе /5/.

Систему уравнений первого порядка (40) можно записать в виде уравнений второго порядка для $(U_i\,, \mathcal{S})$. Они имеют вид

$$(\hat{\pi}^2 - m_o^2)\, U_k + [\hat{\pi}_k, \hat{\pi}^i]\, U_i = 0 \;,$$
$$(\hat{\pi}^2 - m_o^2)\,\mathcal{S} + \frac{i\hbar}{2}\,\frac{e}{c}\, F_{ke}\, U^{ke} = 0 \;,$$
$$F_{ke} = \frac{\partial A_e}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^e} \;. \qquad (41)$$

Рассмотрим случай постоянного магнитного поля $\vec{\mathcal{H}}$. В этом случае для пространственной части вектора $U_i = (\vec{U}, U_o)$ получим уравнения

$$(\hat{\varepsilon}^2 - \hat{p}^2)\,\vec{U} - i\hbar\,\frac{e}{c}\,[\vec{\mathcal{H}} \times \vec{U}] = m_o^2\, \vec{U} \;,$$
$$\hat{\varepsilon} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\varphi \;, \quad \hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \vec{x}} + \frac{e}{c}\vec{A} \;. \qquad (42)$$

Выражению в квадратных скобках, как уже было показано выше, соответствует взаимодействие спина I с магнитным полем.

Предполагается, что система волновых уравнений (40) соответствует элементарным частицам (например, векторным мезонам) со спином, равным единице. Однако данное соответствие, как известно, является не столь адекватным, как, например, соответствие уравнения Дирака электрону. Приведенный выше вывод уравнений (40) позволяет трактовать их как волновые релятивистские уравнения для тензора кинетического момента. Обычно полагалось, что только уравнения Клейна-Гордона имеют соответствующий классический аналог в виде выражения (36) или релятивистского уравнения ГЯ. При этом система уравнений типа Дирака, Прока и др. выводилась путем факторизации оператора Клейна-Гордона. В настоящей работе мы вывели уравнения типа Прока для спина I на основе принципа соответствия из классической механики. Есть основание полагать, что подобную процедуру, при соответствующей модификации метода, можно применить и для уравнения Дирака, однако это выходит за рамки настоящей работы.

В заключение автор благодарит профессора Е.П.Жидкова за поддержку и интерес к работе, А.Б.Пестова - за стимулирующую дискуссию.

Литература

I. Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р4-I2774, Дубна, I979.

2. Фок В.А.Начало квантовой механики. "Наука", М., I976.

3. Мёллер К. Теория относительности. Атомиздат, М., I975.

4. Proca A. Compt. Rend. 202, 1420, 1936.

5. Young J.A., Bludman S.A. Phys. Rev. 131, 5, 2326, 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 сентября I980 года.