сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-80-614

В.Н.Стрельцов

ОБ ОПЫТЕ МАЙКЕЛЬСОНА-МОРЛИ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

1980

1. Идея этого предложенного сравнительно недавно опыта[1,2] /см.также[3,4] / основывается фактически на разнице скоростей распространения света в направлениях перпендикулярно и параллельно силовым линиям гравитационного поля. Так, опираясь на известное решение Шварцшильда

$$ds^2 = (1-\frac{2m}{r})\,c^2dt^2 - [(1-\frac{2m}{r})^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2], \qquad /1/$$

будем иметь, что в гравитационном поле Земли скорость света перпендикулярно полю тяготения будет равна

$$c_{\perp} = \frac{r\,d\theta}{dt} = \frac{r\sin\theta\, d\phi}{dt} = c(1-\frac{2m}{r})^{1/2}, \qquad /2/$$

где m - масса Земли / m = 0,443 см/. Для скорости света параллельно линиям поля тяготения найдем

$$c_{\parallel} = \frac{dr}{dt} = c(1-\frac{2m}{r}). \qquad /3/$$

На основании /2/ и /3/ действительно имеем, что

$$\Delta c = c_{\perp} - c_{\parallel} \simeq c\,\frac{m}{r}. \qquad /4/$$

По аналогии с классическим опытом Майкельсона-Морли [5] интерферометр помещается, например, в горизонтальной плоскости Земли так, что, например, одно его плечо направлено параллельно меридианам, а другое - параллелям. Затем прибор поворачивается в вертикальную плоскость, скажем, относительно второго плеча. При этом ожидается смещение интерференционных полос, которые можно наблюдать экспериментально.

В случае положительного результата предлагаемый эксперимент, безусловно, мог бы стать в ряд "решающих опытов" по проверке общей теории относительности.

2.1. Чтобы ответить на вопрос о возможном результате такого опыта, рассмотрим сначала, как изменяются длины плеч интерферометра под действием гравитационного поля. Введем для этого локально-инерциальную систему отсчета $(\overset{\circ}{S})$ с помощью преобразований/см.,например/5//.

$$X^i - X^i_P = a^i_k(x^k - x^k_p) + \frac{1}{2} a^i_\ell \Gamma^\ell_{mn}(P)(x^m - x^m_p)(x^n - x^n_p). \qquad /5/$$

Здесь X^i - координаты вводимой системы отсчета, а P - точка встречи интерферирующих лучей. Напомним, что преобразования /5/ вытекают, в частности, из условия обращения в нуль левой части равенства

$$\frac{\partial X^i}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial X^j}{\partial x^j} \overset{\circ}{\Gamma}{}^\ell_{ij} = -\frac{\partial^2 X^\ell}{\partial x^i \partial x^j} + \Gamma^k_{ij} \frac{\partial X^\ell}{\partial x^k}, \qquad /6/$$

где $\overset{\circ}{\Gamma}{}^\ell_{ij}$ - значения символов Кристоффеля в $\overset{\circ}{S}$.

В случае шварцшильдовой метрики /1/ символы Кристоффеля /для $\theta_p = \pi/2$ / имеют вид:

$$\Gamma^t_{tr} = (1 - \frac{2m}{r})^{-1} \frac{m}{r^2}, \quad \Gamma^r_{tt} = (1 - \frac{2m}{r}) \frac{m}{r^2}, \quad \Gamma^r_{rr} = -\Gamma^t_{tr},$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r(1 - \frac{2m}{r}), \quad \Gamma^r_{\phi\phi} = \Gamma^r_{\theta\theta}, \quad \Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r}. \qquad /7/$$

При этом приобразования /5/, описывающие переход к сферическим координатам $\overset{\circ}{S}$ -системы и удовлетворяющие требованию инвариантности интервала, будут иметь вид

$$T - T_p = \gamma^{-1}[t - t_p + \Gamma^t_{tr}(P)(t - t_p)(r - r_p)],$$

$$R - R_p = \gamma[r - r_p + \frac{1}{2}\Gamma^r_{tt}(P)(t - t_p)^2 + \frac{1}{2}\Gamma^r_{rr}(r - r_p)^2], \qquad /8/$$

$$\Theta - \Theta_p = \gamma^{-1}(\theta - \theta_p), \quad \Phi - \Phi_p = \gamma^{-1}(\phi - \phi_p),$$

где $\gamma = (1 - 2m/r_p)^{-1/2}$, r_p - фактически радиус Земли $r_p = 6{,}38 \cdot 10^8$ см.

Соответствующие преобразования для дифференциалов будут даваться выражениями

$$dt = dT\gamma, \; dr = dR\gamma^{-1}, \; d\theta = d\Theta\gamma, \; d\phi = d\Phi\gamma. \qquad /9/$$

Обозначим через dL длину некоторого отрезка /стержня/ в $\overset{\circ}{S}$ -системе. На основании /8/ и /9/ для длин указанного отрезка в поле тяготения перпендикулярно и параллельно его линиям будем иметь, соответственно

$$r_p d\phi = R_p d\Phi = dL,$$

$$dr = dR(1 - \frac{2m}{r_p})^{1/2} = dL(1 - \frac{2m}{r_p})^{1/2}. \qquad /10/$$

Отсюда вытекает, что при повороте плеча интерферометра из первого положения во второе его длина уменьшается на величину $\Delta \simeq dL\, m\, r_p^{-1}$. В результате с учетом /2/,/3/ и /10/ для разности времен распространения световых лучей в двух положениях интерферометра будем иметь

$$\Delta t = 2(\frac{dr}{c_\parallel} - \frac{r_p d\phi}{c_\perp}) = 0. \qquad /11/$$

На основании последнего можно заключить, что предлагаемый опыт Майкельсона-Морли в гравитационном поле Земли должен дать отрицательный результат*.

2.2а. Перейдем теперь к рассмотрению опыта с интерферометром конечных размеров. На основании /10/ естественным обобщением соотношений между длинами плеч интерферометра в радиальном и азимутальном направлениях можно считать следующее равенство

$$\int (1 - \frac{2m}{r})^{-1/2} dr = \int d\sigma, \qquad /12/$$

где $d\sigma$ - пространственная часть / $d\theta$ = 0/ интервала /1/.

Уравнение для траектории световых лучей вблизи притягивающего тела массы m /в азимутальной плоскости/ имеет вид:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3mu^2 \qquad (u = 1/r). \qquad /13/$$

В отсутствие возмущающего члена $3mu^2$ решением /13/ является прямая линия

---

* С точки зрения изотропных координат этот вывод представляется вполне естественным.

$$r\cos\phi = R_p\ . \qquad /14/$$

Подставив снова /14/ в /13/, получим второе /с точностью до членов $(m/r_p)^2 \approx 10^{-18}$ / приближение

$$r\cos\phi = R_p - \frac{m}{R_p} r(1+\sin^2\phi)\ . \qquad /15/$$

Нетрудно показать, что для угла $\phi = \ell / r$ /при $\ell = 1$ м $\phi \approx 10^{-7}$ /, где ℓ - длина плеча интерферометра, отличие данной траектории от прямой линии будет определяться пренебрежимо малой величиной $m\ell^2/r_p^3$, поэтому

$$d\sigma = \frac{r_p d\phi}{\cos^2\phi}\ . \qquad /16/$$

Проводя интегрирование в /12/ слева от r_p до $r_p+\ell$, а справа от 0 до ϕ , получим

$$\ell + m\ln(1+\frac{\ell}{r_p}) = r_p\, \mathrm{tg}\,\phi \qquad /17/$$

или, отбрасывая малые члены,

$$\mathrm{tg}\,\phi \approx \frac{\ell}{r_p}(1+\frac{m}{r_p})\ . \qquad /17'/$$

Вычислим теперь время распространения света в радиальном и азимутальном направлениях:

$$t_{\parallel} = \frac{1}{c}\int (1-\frac{2m}{r})^{-1} dr \simeq \frac{\ell}{c}(1+\frac{2m}{r_p}), \qquad /18/$$

$$t_{\perp} = \frac{1}{c}\int (1-\frac{2m}{r})^{-1/2} d\sigma \simeq \frac{r_p}{c}(1+\frac{m}{r_p})\, \mathrm{tg}\,\phi\ . \qquad /19/$$

Подставляя /17'/ в /19/, найдем, что

$$t_{\parallel} = t_{\perp}\ . \qquad /20/$$

Таким образом, и для конечных размеров плеч в рамках данного подхода /с точностью до членов порядка m^2/r_p^2 / обсуждаемый эксперимент должен привести к отрицательному результату.

2.2б. Следует, впрочем, отметить, что предыдущий вывод фактически базировался на преобразованиях /5/, обеспечивающих обращение в нуль символов Кристоффеля в точке. Чтобы исключить гравитационное поле вдоль некоторой кривой, напр., вдоль отрезка координатной линии x° , необходимо заменить /5/ следующими преобразованиями:

$$X^i = X^i(0) + \int_0^{x^\circ} a^i_o(x^\circ)\,dx^\circ + a^i_\alpha(x^\circ)\,x^\alpha + \Gamma^k_{\beta\sigma}(x^\circ)\, a^i_k(x^\circ)\, x^\beta x^\sigma\ , \qquad /21/$$

где $\alpha, \beta, \sigma = 1, 2, 3$. Однако, поскольку мы рассматриваем распространение светового сигнала, нужно взять "световую линию", определяемую, например, дифференциальным уравнением

$$\pm(1-\frac{2m}{r})\,dr = c\,dt \qquad /22/$$

или соответствующим интегральным уравнением

$$ct = \pm(r - r_p + 2m\ln\frac{r-2m}{r_p-2m}), \qquad /23/$$

которое после замены $\ell = r - r_p$ и отбрасывания членов порядка ℓ^2/r_p^2 будет иметь вид

$$ct \simeq \pm\,\ell(1+\frac{2m}{r_p})\ . \qquad /23'/$$

Чтобы можно было пользоваться преобразованиями /21/, обеспечивающими устранение гравитационного поля вдоль линии $x^\alpha = 0$, введем вместо ℓ новую переменную ℓ_1

$$\ell_1 = \ell \mp ct(1-\frac{2m}{r_p}), \qquad /24/$$

обеспечивающую при $\ell_1 = 0$ действительно выполнение равенства /23'/. На основании /24/ с точностью до членов порядка $m\ell/r_p^2$ для компонент метрического тензора найдем

$$g_{tt} \simeq 0,\quad g_{t\ell_1} \simeq -c,\quad g_{\ell_1\ell_1} \simeq -(1+\frac{2m}{r_p}). \qquad /25/$$

Ввиду постоянства данных величин, все шесть соответствующих символов Кристоффеля будут равны нулю. Отсюда на основе выражения

$$\frac{da^n_i(x^\circ)}{dx^\circ} = \Gamma^k_{oi}(x^\circ)\, a^n_k(x^\circ) \qquad /26/$$

вытекает, что все коэффициенты a^n_i постоянны, а поэтому при распространении света вдоль оси r для формулы преобразования времени будем иметь

$$T = a_0^c t \qquad /27/$$

в полном согласии с первым выражением /9/.

Аналогичный результат имеет место и при рассмотрении распространения светового сигнала в перпендикулярном направлении вдоль оси ϕ, отличающейся от траектории света на малую, порядка ℓ^2/r_p^2, величину. А это означает, что и в рамках данного подхода с указанной точностью предлагаемый опыт должен дать отрицательный результат.

Автор выражает благодарность А.Ф.Писареву, обратившему внимание на эту проблему, за полезные дискуссии, Р.А.Асанову и Г.Н.Афанасьеву за весьма плодотворные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yilmaz H. Phys.Rev.Lett., 1959, 3, p.320.
2. Yilmaz H. Hadronic J., 1979, 2, p.997.
3. Shamir J., Fox R. Phys.Rev., 1969, 184, p.1303.
4. Широков М.Ф. В сб.: "Современные проблемы общей теории относительности". Изд-во ин-та физики АН БССР, Минск, 1979, с.67.
5. Michelson A.A., Morley E.W. Amer.J.Sci., 1887, 34, p.333.
6. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. ГИТТЛ, М., 1953, § 91.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 сентября 1980 года.