+

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

22/12-80

6096/2-80

P2-80-588

Б.Н.Захарьев, Е.Б.Плеханов, А.А.Сузько

МНОГОКАНАЛЬНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ БАРГМАНОВСКОГО ТИПА

Направлено в "Journal of Physics, A"

1980

1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие квантовой механики и ее приложений требует создания методов исследования все более сложных объектов. Одноканальные и одномерные задачи постепенно вытесняются быстрорастущей массой многоканальных и многомерных; для уточнения описания эффективного потенциального взаимодействия составных систем нужно переходить от локальных к нелокальным силам.

Резко возрастающая при этом трудоемкость расчетов делает особенно актуальным поиск случаев, допускающих решения в аналитическом виде /простых точно решаемых моделей/.

Известно, что широкий класс аналитических решений для одномерных, одноканальных уравнений Шредингера с локальным взаимодействием можно получить с помощью аппарата обратной задачи рассеяния /потенциалы баргмановского типа/. Это происходит, когда оказывается вырожденным ядро Q интегрального уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко * [1,4] /ГЛМ/:

$$K(x,y) + Q(x,y) + \int K(x,z)\, Q(z,y)\, dz = 0. \qquad /1/$$

Соответствующий формализм с фиксированным значением орбитального момента изложен в [4]; случай фиксированной энергии $E = \mathrm{const}$ рассмотрен в [5] /потенциалы Малярова-Баргмана/; класс баргмановских потенциалов конечного радиуса действия был получен в [5]. Некоторые приложения этих моделей к приближенному восстановлению потенциалов, действующих между нуклонами и ядрами /$p-n$; $p-\alpha$; $p-{}^{12}C$; $\alpha-\alpha$; ${}^{16}O-{}^{23}Si$; ${}^{18}O-{}^{184}W$; ${}^{40}Ar-{}^{238}U$ /, рассмотрены в работах [6-10]. Важную роль играют баргмановские потенциалы и в физике солитонов /решение нелинейных уравнений/ [11].

В данной работе предлагается усовершенствование метода определения матриц взаимодействия /баргмановского типа/, зацепляющих парциальные уравнения Шредингера в многоканальных задачах /§2/. Благодаря полученному упрощению, оказывается из-

---

* В /1/ Q определяется спектральными данными /параметрами рассеяния/, а по K находят потенциал $V(x) = -2K'(x,x)$. Пределы интегрирования в /1/ выбираются по-разному в зависимости от конкретной задачи [3,4].

лишней процедура оборачивания матриц, имеющих ранг, равный числу каналов, которую раньше [1-3] требовалось выполнять. Существуют ли баргмановские потенциалы в многомерном случае? Установлено, что существованию таких потенциалов в классе локальных взаимодействий препятствуют связи на данные рассеяния, возникающие из-за несоответствия числа независимых переменных в $V(r)$ /три координаты: r, θ, ϕ / и в матрице рассеяния S /пять переменных при отсутствии пространственной симметрии в V: энергия и по два угла для направлений падения и рассеяния волн/. Эта переопределенность обратной задачи сковывает свободу выбора формы ядра Q уравнения ГЛМ: в общем случае исключается сепарабельный вид Q.

Пытаться построить многомерные потенциалы баргмановского типа удобно с помощью уравнений обратной задачи, предложенных Кеем и Мозесом для сил, нелокальных по части переменных /как матрица зацепления каналов "нелокальна" по индексам/.

2. СВЯЗАННЫЕ КАНАЛЫ

Интерес к многоканальным баргмановским потенциалам усиливается тем фактом, что без них класс задач, допускающих решение в замкнутом аналитическом виде, для систем связанных уравнений /2/ значительно беднее, чем при единственном канале.

К тому же предлагаемые ниже формулы очень слабо усложняются с ростом числа учитываемых каналов N. Например, при полностью факторизованном Q уравнение обратной задачи сводится к одному алгебраическому уравнению независимо от N. Уравнение движения в случае нескольких каналов:

$$-\psi''_{\alpha\alpha_0}(r) + \sum_{\alpha'} V_{\alpha\alpha'}(r)\,\psi_{\alpha'\alpha_0}(r) = E_\alpha\,\psi_{\alpha\alpha_0}(r) \qquad /2/$$

является матричным обобщением обычного парциального уравнения Шредингера: $\|V_{\alpha\alpha'}\|$ - матрица взаимодействия, а индекс α_0 в матрице решений $\|\psi_{\alpha\alpha_0}\|$ отвечает одному из полного набора линейно-независимых граничных условий.

Потенциальные матрицы Баргмана $\|V_{\alpha\alpha'}\|$ получаются при сепарабелизации ядра $\|Q_{\alpha\alpha'}(r,r')\|$ матричного аналога уравнения ГЛМ /1/ *.

* Не следует путать сепарабельность ядер Q /отвечающих локальным силам/ и нелокальных потенциалов V. Сепарабельные взаимодействия в многоканальном случае рассматривались Зубаревым [13].

Особенно удобно сепарабелизовать Q в формализме R-матрицы рассеяния, где спектральная функция строится из произведений парциальных амплитуд приведенных ширин γ_α^λ

$$d\rho_{\alpha\alpha'}(E) = \sum_\lambda \delta(E-E_\lambda)\,\gamma_\alpha^\lambda\,\gamma_{\alpha'}^\lambda \qquad /3/$$

резонансов $(E=E_\lambda)$, чему соответствует [3]

$$Q_{\alpha\alpha'}(r,r') = \sum_{ps}\int \mathring{\phi}_{\alpha p}(E,r)\,d(\rho_{ps}(E) - \mathring{\rho}_{ps}(E))\,\mathring{\phi}^*_{s\alpha'}(E,r') =$$

$$= \sum_\lambda^\infty \{\sum_p \mathring{\phi}_{\alpha p}(E_\lambda,r)\gamma_p^\lambda \cdot \sum \gamma_s^\lambda \mathring{\phi}^*_{s\alpha'}(E_\lambda,r') - \sum \mathring{\phi}_{\alpha p}(\mathring{E}_\lambda,r)\,\mathring{\gamma}_p^\lambda \times \qquad /4/$$

$$\times \sum_s \mathring{\gamma}_s^\lambda \mathring{\phi}^*_{s\alpha'}(\mathring{E}_\lambda,r')\} \equiv \sum_\lambda^\infty \{a_\alpha^\lambda(r)\cdot a_{\alpha'}^{\lambda *}(r') - \mathring{a}_\alpha^\lambda(r)\cdot \mathring{a}_{\alpha'}^{\lambda *}(r')\},$$

где E_λ - положения резонансов R-матрицы; $\phi_{\alpha\beta}$ - решения системы /2/, а ноликом помечены символы, относящиеся к случаю исходного взаимодействия $\mathring{V}$ (обычно полагают $\mathring{V}_{\alpha\alpha'} \equiv 0$, при этом $\mathring{\phi}_{\alpha\beta} = \mathring{\phi}_{\alpha\alpha}\,\delta_{\alpha\beta}$).

Возьмем в /3/ параметры $\{\gamma_\alpha^\lambda\}$ отличными от соответствующих величин $\{\mathring{\gamma}_\alpha^\lambda\}$ только при конечном числе значений λ. Тогда одинаковые по абсолютной величине члены, входящие в выражение в фигурных скобках с разными знаками, взаимно уничтожаются и получится выражение для $Q_{\alpha\alpha'}(r,r')$, сепарабельное как по координатам r и r', так и по индексам α, α'. Важно, что это имеет место и в случае ненулевого исходного потенциала $\mathring{V} \neq 0$.

Заметим, что свобода выбора параметров E_λ; γ_λ в многоканальном случае связана с тем, что совпадает число переменных R-матрицы рассеяния

$$R_{\alpha\alpha'}(E) = \sum_\lambda \frac{\gamma_\alpha^\lambda\,\gamma_{\alpha'}^\lambda}{E - E_\lambda} \qquad /5/$$

и потенциальной матрицы $V_{\alpha\alpha'}(r)$. Здесь мы имеем дело с "нелокальностью" взаимодействия по индексам каналов. В многомерной задаче ей будет соответствовать нелокальность сил по части пространственных переменных.

Простейший случай полной факторизации ядра Q /если включение взаимодействия не меняет набора параметров $\{\mathring{E}_\lambda\}$ свободного движения, то $\phi_{\alpha\beta}(\mathring{E}_\lambda, 0) = 0$ и при $E_\lambda \neq \mathring{E}_\lambda$ возможно нарушение граничного условия в $r=0$/

$$Q_{\alpha\alpha'}(r,r') = \sum_p \mathring{\phi}_{\alpha p}(E_{\lambda_1},r)\,\gamma_p^{\lambda_1} \cdot \sum_s \gamma_s^{\lambda_1}\,\mathring{\phi}^*_{s\alpha'}(E_{\lambda_1},r') \equiv$$

$$\equiv a_\alpha^{\lambda_1}(r)\cdot a_{\alpha'}^{\lambda_1 *}(r'). \qquad /6/$$

Матричное уравнение ГЛМ с ядром /6/ сводится к одному алгебраическому уравнению. Действительно, вместе с ядром $Q_{aa'}(r,r')$ сепарабелизуется и матрица $K_{aa'}(r,r')$:

$$K_{aa'}(r,r') = \sum_{ps} \int \phi_{ap}(E,r)\, d(\rho_{ps}(E) - \mathring{\rho}_{ps}(E))\, \mathring{\phi}^*_{sa'}(E,r') =$$

$$= \sum_{\lambda}^{\infty} \{ \sum_p \phi_{ap}(E_\lambda, r)\gamma_p^\lambda \cdot \sum_s \gamma_s^\lambda \mathring{\phi}^*_{sa'}(E_\lambda, r') - \sum_p \phi_{ap}(\mathring{E}_\lambda, r)\mathring{\gamma}_p^\lambda \times \qquad /7/$$

$$\times \sum_s \mathring{\gamma}_s^\lambda \mathring{\phi}^*_{sa'}(\mathring{E}_\lambda, r') \} \equiv \sum_\lambda^\infty \{ A_a^\lambda(r)\cdot a_{a'}^{\lambda *}(r') - B_a^\lambda(r)\cdot b_{a'}^{\lambda *}(r') \} \Rightarrow \qquad /8/$$

$$\Rightarrow A_a^{\lambda_1}(r)\cdot a_{a'}^{\lambda_1 *}(r')$$

для Q из /6/.

Подставляя $K_{aa'}(r,r')$ и $Q_{aa'}(r,r')$ в виде /6/ и /8/ в уравнение ГЛМ, получаем одно алгебраическое уравнение для $A_a^{\lambda_1}(r)$, из которого находим /будем полагать $V_{aa'}(r>r_0)=0$; $\mathring{\phi}_{aa'} = \mathring{\phi}_{aa}\cdot\delta_{aa'}$/:

$$A_a^{\lambda_1}(r) = a_a^{\lambda_1}(r)\cdot P^{\lambda_1}(r); \qquad /9/$$

$$P^{\lambda_1}(r) = \frac{1}{1 - \sum_{a'} \gamma_{a'}^2 \int_r^{r_0} \mathring{\phi}^2_{a'a'}(E_{\lambda_1} r')dr'}. \qquad /10/$$

Важно, что величина P^{λ_1} не зависит от каналовых индексов и через нее выражаются все компоненты вектора $A_a^{\lambda_1}$.

Величины $A_a^{\lambda_1}(r)$ согласно /8/ определяют матрицу $K_{aa'}(r,r')$, а последняя, в свою очередь, дает $V_{aa'}(r)$:

$$K_{aa'}(r,r') = A_a^{\lambda_1}(r)\,\gamma_{a'}^{\lambda_1}\,\mathring{\phi}^*_{a'a'}(E_\lambda, r'); \qquad /11/$$

$$V_{aa'}(r) = -2\frac{d}{dr}\{[\mathring{\phi}_{aa}(E_\lambda, r)\gamma_a^{\lambda_1}\gamma_{a'}^{\lambda_1}\mathring{\phi}^*_{a'a'}(E_{\lambda_1}, r)]/[1 - \sum_{a''}\gamma_{a''}^{\lambda_1^2}\int_r^{r_0}\mathring{\phi}^2_{a''a''}(E_{\lambda_1}, r')dr']\}. \qquad /12/$$

С помощью $K_{aa'}(r,r')$, представляющей ядро так называемого оператора обобщенного сдвига, находим решение $\phi_{aa_0}(E,r)$ по известной функции свободного движения $\mathring{\phi}_{aa_0}(E,r)$:

$$\phi_{aa_0}(E,r) = \mathring{\phi}_{aa}(E,r)\delta_{aa_0} - P^{\lambda_1}(r)\,\mathring{\phi}_{aa}(E_{\lambda_1}, r)\gamma_a^{\lambda_1}\gamma_{a_0}^{\lambda_1}\int_r^{r_0}\mathring{\phi}^*_{a_0a_0}(E_{\lambda_1}, r')\mathring{\phi}_{a_0a_0}(E,r')dr'. \qquad /13/$$

В более общем случае, когда в Q и K остается M факторизованных членов, в векторах $\vec{a}(r)$, $\vec{A}(r)$ и $\vec{b}(r)$, $\vec{B}(r)$ появляется дополнительный векторный индекс, пробегающий M значений, а P^λ становится матрицей $M\times M$, обратной к матрице, составленной из известных величин (a_a, b_a)-коэффициентов для A_a и B_a.

Для компактности записи можно для величин A_a и B_a (a_a и b_a) ввести единое буквенное обозначение, используя указанный дополнительный индекс также и для их отличия. Тогда многочленные формулы будут простым матричным обобщением одночленных. При этом, как и выше, не требуется оборачивать матрицы по индексам каналов благодаря сепарабельности по ним ядра Q, что существенно упрощает решение по сравнению с [2,3].

В классе матриц взаимодействия имеются "прозрачные" $V_{aa'}(r)$, которые не дают отражения ни при каких энергиях *, хотя падающая волна может сильно возмущаться в области, где $V_{aa'} \neq 0$, размешиваясь по всем каналам. Находить такие потенциальные матрицы удобнее в подходе Марченко, где ядро Q определяется по S -матрице и параметрам связанных состояний.

Приведенные ширины резонансных состояний с V типа /12/ отличаются от γ_a^λ и определяются по /13/. Это относится и к работе [3].

Авторы выражают благодарность И.В.Амирханову, Е.Бангу и Е.Х.Христову за ценные указания по теме данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агранович З.С., Марченко В.А. Обратная задача рассеяния, гл.6, §§1,2. Изд-во Харьковского университета, 1960.
2. Cox J.R. J.Math.Phys., 1954, 5, p.1063;1975, 16, p.1402.
3. Захарьев Б.Н., Плеханов Е.Б., Сузько А.А. Изв. АН СССР, сер.физ, 1980, 44, №5, с.949; ОИЯИ, Е4-12913, Дубна,1979.
4. Шадан К., Сабатье П.С. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. "Мир", М., 1980.
5. Маляров В.В., Поплавский И.В., Попушой М.Н. ЖЭТФ, 1975, 68, с.432.
6. Benn J., Scharf G. Nucl.Phys., 1969, A134, p.481.
7. Визнер Я. и др. ЭЧАЯ, 1978, 9, №3, с.710.
8. Маляров В.В. и др. ЯФ, 1972, №4, с.873; 1975, 21, №5, с.987; 1975, 22, №4, с.860; 1975, 25, №1, с.72; 1978, 27, №4, с.1128; Укр.физ.журнал, 1978, 23, №9, с.1505.
9. Lipperheide R. Phys.Lett., 1979, 82B, No.1, p.39.
10. Frobrich P. et al. Phys.Rev.Lett., 1979, 49, No.16, p.1147.
11. Захаров В.Е. и др. Теория солитонов. "Наука", М., 1980.
12. Kay I., Mases H.E. Nuovo Cimento, 1961, 22, No.4, p.689.
13. Зубарев А.Л. ЯФ, 1976, 23, вып.1, с.77.

* Это обобщение продолжается и на многочастичные системы.

14. Жигунов В.П., Захарьев Б.Н. Методы сильной связи каналов в квантовой теории рассеяния. Атомиздат, М., 1974.
15. Фаддеев Л.Д. Современные проблемы математики, т.3. ВИНИТИ, М., 1974, с.93.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 сентября 1980 года.