объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-80-57

А.Г.Бонч-Осмоловский, М.И.Подгорецкий

О ДВИЖЕНИИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ В ПОЛЕ, ОБЛАДАЮЩЕМ ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Направлено в ЖТФ

1980

1. В связи с появлением ряда теоретических и экспериментальных работ по осевому каналированию ультрарелятивистских электронов имеет смысл остановиться на некоторых общих особенностях движения легких заряженных частиц в электрическом поле, обладающем осевой симметрией. Некоторые из результатов такого анализа могут оказаться полезными и для интерпретации данных по осевому каналированию.

Будем предполагать, что траектория ультрарелятивистской частицы образует малый угол с направлением oz, совпадающим с осью симметрии, расстояние от оси в поперечной плоскости и поперечную скорость частицы обозначим векторами $\vec{r}$ и $\vec{u}$, потенциальную энергию запишем в виде $U(r)$. Поскольку угол между траекторией и осью симметрии мал, поперечное движение частицы оказывается нерелятивистским $(u/c \ll 1)$, а его кинетическая энергия

$$T = \frac{m\gamma u^2}{2}. \qquad (1)$$

В рассматриваемых условиях имеет место закон сохранения полной поперечной энергии $W_\perp$:

$$W_\perp = T + U = \mathrm{Const}. \qquad (2)$$

Строго говоря, закон сохранения (2) справедлив только в пренебрежении трением за счет излучения, однако ниже мы убедимся, что применительно к поперечной энергии такое пренебрежение вполне допустимо. Точнее, величина $W_\perp$ изменяется очень медленно, и на протяжении многих оборотов частицы вокруг оси ее можно считать практически постоянной *.

---

* См. также работу /1/, в которой это утверждение строго доказано для гармонического потенциала $U = kr^2$.

Предположим теперь, что начальные условия подобраны таким образом, что конец вектора $\vec{r}$ описывает окружность радиуса R. Как будет изменяться этот радиус в последующие моменты времени, если учесть возмущающее влияние излучения? Для ответа на поставленный вопрос найдем сначала зависимость поперечной энергии от радиуса кругового движения. Поскольку сейчас мы интересуемся только малыми отклонениями радиуса от R, представим потенциал U в виде

$$U(r) = U(R) - f(R)(r-R) + a(R)(r-R)^2, \tag{3}$$

где $f = -dU/dr$ – внешняя сила, действующая на частицу (мы предполагаем ее направленной в сторону оси симметрии), а $a(r) = \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dr^2}$.

При движении на окружности радиуса r должно быть выполнено равенство

$$\frac{m\gamma u^2}{r} = \frac{dU}{dr} = -f(R) + 2a(R)(r-R), \tag{4}$$

из которого следует, что

$$T = -\frac{1}{2}r f(R) + R a(R)(r-R). \tag{5}$$

Поэтому

$$W_\perp(r) = U(r) - \frac{1}{2}r f(R) + R a(R)(r-R). \tag{6}$$

При наличии излучения величина поперечной энергии со временем уменьшается, т.е. $\frac{dW_\perp}{dt} < 0$ *. Это дает возможность выяснить характер изменения радиуса r. Дифференцируя (6), получим

---

*Непосредственно ясно, что излучение уменьшает полную энергию W, т.е. сумму поперечной и продольной. Можно, однако, показать, что это же относится и к одной только поперечной энергии $W_\perp$.

$$\left(\frac{dW_{\perp}}{dt}\right)_{r=R} = \left[-\frac{3}{2} f(R) + R a(R) \right] \cdot \left(\frac{dr}{dt}\right)_{r=R} . \qquad (7)$$

По условиям задачи первый член в скобках всегда положителен (сила f направлена к центру), в то время как знак второго члена в разных случаях может быть разным. Поэтому величина $[-\frac{3}{2}f(R)+Ra(R)]$ может быть как положительной, так и отрицательной. Если

$$-\frac{3}{2} f(R) + R a(R) < 0, \qquad (8)$$

то, как легко убедиться, круговое движение неустойчиво даже в отсутствие радиационного трения *. Поэтому мы остановимся только на противоположном случае, когда

---

*Для анализа радиального движения можно, как известно, ввести связанную с угловым моментом M дополнительную потенциальную энергию $\frac{M^2}{2m\gamma r^2}$, так что эффективная потенциальная энергия $U' = U(r) + \frac{M^2}{2m\gamma r^2}$.

Круговое движение соответствует экстремуму U' в точке $r = R$, для которой $\frac{M^2}{m\gamma R^3} = -f(R)$. Вторая производная U' в этой точке $\left(\frac{d^2U'}{dr^2}\right)_{r=R} = \frac{2}{R}\left[-\frac{3}{2}f(R)+Ra(R)\right]$. Следовательно, в условиях (8) движение по кругу неустойчиво и частица "сваливается" в ту или иную сторону от точки $r = R$ при сколь угодно малых возмущениях (см. также /2/, стр. 47). Наоборот, при выполнении (9) движение устойчиво, т.е. направленное изменение кривизны орбиты может произойти только за счет силы трения. Чем меньше величина $\left(\frac{d^2U'}{dr^2}\right)_{r=R}$, тем больше влияние трения на скорость сворачивания траектории.

$$-\frac{3}{2}f(R) + Ra(R) > 0\ , \qquad (9)$$

тем более, что именно этот случай имеет отношение к проблеме каналирования. Тогда из (7) и из факта убывания энергии поперечного движения ($dW_\perp/dt < 0$) следует, что радиус с течением времени уменьшается, т.е. движение происходит по сворачивающейся спирали. При этом, в соответствии с (3), потенциальная энергия также уменьшается. Для кинетической энергии имеем

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_{r=R} = \left[-\frac{1}{2}f(R) + Ra(R)\right]\left(\frac{dr}{dt}\right)_{r=R}\ , \qquad (10)$$

т.е. в зависимости от соотношения между величинами $f(R)$ и $a(R)$ она может как уменьшаться, так и увеличиваться.

В качестве конкретного примера рассмотрим случай, когда

$$U(r) = -\frac{A}{r^n},\ f(R) = -\frac{An}{R^{n+1}},\ a = -\frac{An(n+1)}{2R^{n+2}}\ . \qquad (11)$$

Тогда

$$Ra(R) - \frac{3}{2}f(R) = \frac{An(2-n)}{2R^{n+1}}\ ,$$

т.е. при $n > 2$ движение неустойчиво, а при $0 < n < 2$ оно устойчиво и радиус с течением времени уменьшается. Заметим, что при $n < 0$ обязательно $A < 0$, иначе сила направлена от центра и финитное поперечное движение невозможно. Поэтому при $n < 0$ движение также устойчиво и радиус окружности с течением времени уменьшается независимо от абсолютной величины n.

Если потенциал имеет вид (11), то при движении по кругу любого радиуса выполнено соотношение

$$T = -\frac{n}{2}U\ . \qquad (12)$$

Следовательно, при $n<0$ (например, при гармоническом потенциале, когда $n=-2$) поперечная кинетическая энергия изменяется в том же направлении, что и потенциальная (обе они уменьшаются), а при $n>0$ изменения происходят в противоположных направлениях, т.е. при уменьшении радиуса (случай $n<2$) поперечная скорость увеличивается.

При осевом каналировании электронов потенциал может быть записан в виде /3/

$$U(r) = -k\ln(1+b^2/r^2), \quad k>0. \qquad (13)$$

Для осей <110> кремния в широком интервале радиусов r выражение (13) хорошо аппроксимируется формулой

$$U(r) \sim 1/r^{1,6} \quad *. \qquad (13^1)$$

Следовательно, здесь движение устойчиво, спираль сворачивается, а поперечная скорость растет. Последнее утверждение означает, что при осевом каналировании углы между траекториями электронов и направлением осей также увеличиваются. Заметим, что последний результат *не связан с аппроксимацией* (13^1), *он следует и из более* точной формулы (13). Тогда

$$\frac{dW_\perp}{dr} = \frac{2kb^4}{(b^2r+r^3)^2\cdot r} > 0,$$

т.е. из $\frac{dW_\perp}{dt}<0$ вытекает также $\frac{dr}{dt}<0$ и спираль сворачивается. Поскольку $\frac{dU}{dr} = \frac{2kb^2}{b^2r+r^3} > 0$, а для кинетической энергии формула (10) переходит в соотношение $\frac{dT}{dr} = -\frac{2kb^2r}{(b^2+r^2)^2}$, то потенциальная энергия с течением времени уменьшается, а кинетическая энергия возрастает.

2. До сих пор речь шла о специальном классе поперечных движений, близких к круговым. Интересно поэтому выяснить, в какой мере полученные результаты имеют общее значение. Для этой цели удобно воспользоваться теоремой вириала для финитного поперечного движения. Согласно этой теореме для средних по времени величин имеет место равенство

$$2\langle T\rangle = -\langle \vec{r}\vec{f}(r)\rangle . \tag{14}$$

Соотношение (14) справедливо только для устойчивых поперечных движений, которые являются периодическими или почти периодическими. Кроме того, все силы предполагаются консервативными. Последнее требование в рассматриваемой нами задаче, строго говоря, не выполнено. Можно, однако, показать, что радиальная составляющая силы радиационного трения очень мала по сравнению с консервативной силой $\vec{f}$. Поэтому, хотя величины $\langle T\rangle$ и $\langle\vec{r}\vec{f}\rangle$ начинают зависеть от времени, связь между ними по-прежнему задается формулой (14).

Для потенциальной энергии (11) теорема вириала принимает вид

$$\langle T\rangle = -\frac{n}{2}\langle U\rangle . \tag{15}$$

Среднее значение поперечной энергии

$$\langle W_{\perp}\rangle = \langle T\rangle + \langle U\rangle = \frac{2-n}{2}\langle U\rangle . \tag{16}$$

Так как $\frac{d\langle W_{\perp}\rangle}{dt} < 0$, то из (15) и (16) следует, что в интересующем нас случае устойчивого движения, когда $n < 2$, величина $\langle U\rangle$ также убывает, траектория сворачивается, а кинетическая энергия в среднем возрастает.

Таким образом, выводы о характере движения, близкого к круговому, полученные ранее для потенциальной энергии вида (11), остаются верными и для произвольных движений, но относятся теперь к соответствующим средним характеристикам. Как легко проверить, такая же ситуация имеет место и для потенциальной энергии вида (13). Отсюда, в частности, следует, что из-за радиационного торможения любое начальное угловое распределение электронов при осевом каналировании в среднем уширяется (многократное рассеяние каналирующих частиц действует, разумеется, в том же направлении).

3. Для получения более детализированной картины рассматриваемого движения обратимся к уравнениям Лоренца-Дирака. В общем случае имеем

$$m\frac{d}{dt}(\gamma\vec{v}) = \vec{f}_л + \vec{f}_p, \tag{17}$$

где $\vec{v}$ - полная скорость частицы, $\vec{f}_л = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}]$ - - сила Лоренца, $\vec{E}$ и $\vec{H}$ - внешние поля, $\vec{f}_p$ - сила радиационного торможения. Последняя записывается в виде*

$$\vec{f}_p = \eta\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v},\nabla)\right)\vec{f}_л + \frac{\eta e^2}{mc}\{[\vec{E},\vec{H}] + \frac{1}{c}[\vec{H}[\vec{H},\vec{v}]] + \frac{1}{c}\vec{E}(\vec{v},\vec{E})\} -$$

$$- \frac{\eta e^2\gamma^2}{mc^2}\vec{v}\{(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v},\vec{H}])^2 - \frac{1}{c^2}(\vec{E},\vec{v})^2\}, \quad \eta = \frac{2e^2}{3mc^3}. \tag{18}$$

Умножив (17) скалярно на $\vec{v}$, получим

$$m\vec{v}\frac{d}{dt}(\gamma\vec{v}) = (\vec{v}, \vec{f}_л) + (\vec{v}, \vec{f}_p). \tag{19}$$

Как легко убедиться, всегда имеет место тождество $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2}\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}$, из которого следует

$$\vec{v}\frac{d}{dt}(\gamma\vec{v}) = v^2\frac{d\gamma}{dt} + \gamma\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = (v^2 + \frac{c^2}{\gamma^2})\frac{d\gamma}{dt} = c^2\frac{d\gamma}{dt}.$$

---

* Выражение для радиационной силы можно найти, например, в /4/, стр.273.

Поэтому (19) переходит в соотношение

$$mc^2 \frac{d\gamma}{dt} = (\vec{v}, \vec{f}_л) + (\vec{v}, \vec{f}_р) , \qquad (20)$$

выражающее закон сохранения полной энергии $W = mc^2\gamma + U$.

Из формулы (18) следует, что правые части уравнений (17) и (20) содержат члены, пропорциональные величине γ^2. Для ультрарелятивистских частиц в уравнении (20) можно оставить только этот член, поскольку он очень велик по сравнению с остальными. Покажем, что с уравнением (17) дело обстоит совершенно иначе и что его можно привести к виду, в котором член с γ^2 фактически отсутствует*.

Выполним в левой части (17) дифференцирование по t, учтя при этом (20). Тогда получим уравнение

$$m\gamma \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}_л - \frac{\vec{v}}{c^2}(\vec{v}, \vec{f}_л) + \vec{f}_р - \frac{\vec{v}}{c^2}(\vec{v}, \vec{f}_р) . \qquad (21)$$

В правой части (21) имеется несколько членов, пропорциональных γ^2. С помощью явного выражения (18) для радиационной силы $\vec{f}_р$ можно найти сумму этих членов Σ. Тогда получим

$$\Sigma = -\frac{\eta e^2}{mc^2}\vec{v} \ \{(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}, \vec{H}])^2 - \frac{1}{c^2}(\vec{E}, \vec{v})^2\} .$$

Следовательно, правая часть (21) не содержит γ^2, в ней присутствуют лишь члены нулевого и первого порядка по γ. Легко также видеть, что члены, пропорциональные первой степени γ, определяются градиентами внешних полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ и их производными по времени; при движении в стационарных и пространственно однородных внешних полях эти члены исчезают и в правой части (21) остаются лишь силы, не зависящие от γ.

---

*Для частных случаев плоскостного каналирования и движения частицы в магнитном поле это обстоятельство уже отмечалось и использовалось в наших работах /1,5,6/.

Уравнения (17) и (21), конечно, эквивалентны, и по мере надобности мы будем пользоваться как одним, так и другим. Интересующую нас конкретную задачу целесообразно рассматривать в цилиндрической системе координат (r, ϕ, z). Тогда уравнение (17) расчленяется на три уравнения:

$$m\frac{d}{dt}(\gamma\dot{r}) = m\gamma r\dot{\phi}^2 + f_{л,r} + f_{p,r} = m\gamma r\dot{\phi}^2 - \frac{dU}{dr} + \frac{\eta\dot{r}}{mc^2} f^2_{л,r} +$$

$$+ \eta\gamma\dot{r}\frac{df_{л,r}}{dr} - \frac{\eta\gamma^2\dot{r}}{mc^2} f^2_{л,r}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right), \tag{22}$$

$$m\frac{d}{dt}(\gamma r^2\dot{\phi}) = r f_{p,\phi} = -\frac{\eta r^2\gamma^2}{mc^2} f^2_{л,r}\,\dot{\phi}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right), \tag{23}$$

$$m\frac{d}{dt}(\gamma\dot{z}) = f_{p,z} = -\frac{\eta\gamma^2\dot{z}}{mc^2} f^2_{л,r}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right),$$

$$f_{л,r} = -\frac{dU}{dr}, \quad \eta = \frac{2e^2}{3mc^3}. \tag{24}$$

Закон сохранения энергии (20) записывается в виде

$$mc^2\frac{d\gamma}{dt} = \dot{r} f_{л,r} + \eta\gamma\dot{r}^2\frac{df_{л,r}}{dr} + \frac{\eta f^2_{л,r}}{m}\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\gamma^2\right) - \frac{\eta\gamma^2 f^2_{л,r}}{m}. \tag{25}$$

В интересующих нас условиях $\gamma^2 \gg \gamma \gg 1$, $\dot{r}^2/c^2 \ll 1, \dot{z} \simeq c$. Поэтому уравнения (24) и (25) совпадают друг с другом и переходят в

$$mc^2\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\eta}{m}\gamma^2\left(\frac{dU}{dr}\right)^2. \tag{26}$$

Уравнение (23) принимает вид

$$m\frac{d}{dt}(\gamma r^2\dot{\phi}) = -\frac{\eta r^2}{mc^2}\gamma^2\left(\frac{dU}{dr}\right)^2\dot{\phi}, \tag{27}$$

а уравнение (22) после описанной выше процедуры сокращения членов с γ^2 и пренебрежения малым членом $\frac{\eta r \dot{f}^2_{л, r}}{mc^2}$ переходит в

$$m\gamma\ddot{r} = m\gamma r\dot{\phi}^2 - \frac{dU}{dr} - \eta\gamma\dot{r}\frac{d^2U}{dr^2}\,. \tag{28}$$

Уравнение (27) регулирует изменение углового момента M, и его можно переписать в виде

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{\eta r^2\gamma^2}{mc^2}\left(\frac{dU}{dr}\right)^2\dot{\phi}\,. \tag{27^1}$$

Вводя величину M в уравнение (28), получим также

$$\ddot{r} = \frac{M^2}{m^2\gamma^2 r^3} - \frac{1}{m\gamma}\frac{dU}{dr} - \frac{\eta\dot{r}}{m}\cdot\frac{d^2U}{dr^2}\,. \tag{28^1}$$

Если бы излучение отсутствовало, частица могла бы двигаться по окружности $r=R$, определяемой условием

$$\frac{M_0^2}{m\gamma_0 R^3} = \frac{dU}{dr}\Big|_{r=R}\,. \tag{29}$$

В дальнейшем анализируются траектории, близкие к этой окружности, т.е. для величины $\delta=r-R$ предполагается выполненным неравенство

$$\delta/R \ll 1\,. \tag{30}$$

Кроме того, мы будем интересоваться только начальным интервалом времени, в течение которого относительные изменения лоренц-фактора и углового момента достаточно малы, т.е.

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma_0} \ll 1\,, \qquad \frac{\Delta M}{M_0} \ll 1\,. \tag{31}$$

Тогда можно записать

$$\gamma = \gamma_0 (1 - \frac{at}{\gamma_0}), \quad M = M_0 (1 - \frac{at}{\gamma_0}),$$
$$a = \frac{2e^2 \gamma_0^2}{3m^3 c^5} (\frac{dU}{dr})^2_{r=R} . \tag{32}$$

Подставляя (32) в уравнение (28) и произведя его линеаризацию, т.е. пренебрегая членами, пропорциональными $\delta \cdot at$, $(\dot{a}t)^2$, $\delta\dot{\delta}$ и $\dot{\delta}^2$, придем к уравнению, описывающему движение частицы при малых отклонениях от круговой траектории (29). Это уравнение имеет вид

$$\ddot{\delta} + \epsilon\dot{\delta} + \Omega^2 \delta = -\mu t, \tag{33}$$

в котором

$$\epsilon = \frac{\eta}{m} (\frac{d^2U}{dr^2})_R = \frac{2c^2}{3m^2c^3} (\frac{d^2U}{dr^2})_R , \tag{34}$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{m\gamma_0} [\frac{3}{R} (\frac{dU}{dr})_R + (\frac{d^2U}{dr^2})_R] , \tag{35}$$

$$\mu = \frac{a}{m\gamma_0^2} (\frac{dU}{dr})_R . \tag{36}$$

4. Решение уравнения (33) может быть легко получено в общем виде; мы приводим его только в предположении

$$\epsilon / |\Omega| \ll 1 , \tag{37}$$

поскольку в практически интересных случаях это условие обычно выполняется.

Знак величины Ω^2 определяется конкретным видом потенциала $U(r)$. Если $\Omega^2 < 0$, главные члены решения уравнения (33) имеют вид

$$\delta = - \frac{\mu t}{\Omega^2} + Ae^{-|\Omega| t} + Be^{|\Omega| t} , \tag{38}$$

где коэффициенты A и B связаны с начальными условиями. Наличие экспоненты с положительным показателем отражает отмеченную уже выше неустойчивость движения, поскольку, в зависимости от знака B, движение может происходить как по раскручивающейся, так и по скручивающейся спирали. Поэтому в дальнейшем мы будем интересоваться только случаем $\Omega^2 > 0$, когда выполнено условие (9). Тогда

$$\delta = -\frac{\mu t}{\Omega^2}\left(1 - e^{-\frac{\epsilon}{2}t} \cdot \frac{\sin \Omega t}{\Omega t}\right) + (A \sin \Omega t + B \cos \Omega t)\, e^{-\frac{\epsilon}{2}t}, \tag{39}$$

где A и B по-прежнему определяются начальными условиями.

Для движения, усредненного по быстрым колебаниям с частотой Ω, получаем

$$\bar{\delta} = -\frac{\mu t}{\Omega^2}, \tag{40}$$

т.е. усредненная траектория сворачивается, что вполне согласуется с результатом, полученным ранее. Амплитуда колебаний вокруг средней траектории со временем затухает, если $a(R) = \frac{1}{2} \left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=R} >$, и нарастает при $a(R) < 0$.

Иными словами, по отношению к радиальному движению электромагнитное трение может быть как положительным, так и отрицательным, т.е. радиальная составляющая силы трения может быть направлена как по радиальной скорости, так и против нее*. При потенциале (13), отвечающем

---

*Если бы сила радиационного трения была строго антипараллельна скорости $\vec{v}$, знак ее радиальной составляющей был бы всегда противоположен знаку радиальной составляющей скорости. Из возможности совпадения знаков следует, что в общем случае угол между силой радиационного трения и скоростью немного отличается от 180°.

осевому каналированию электронов, имеет место раскачка колебаний, так как

$$a(R) = -\frac{kb^2(b^2+3R^2)}{R^2(b^2+R^2)^2} < 0 .$$

Потенциал (11) приводит к раскачке колебаний, если $n > -1$, и к их затуханию, если $n < -1$ (напомним, что при $n<0$ величина $A<0$). В частности, для гармонического потенциала ($n=-2$) колебания вокруг усредненной траектории затухают.

5. Остается еще выяснить пределы применимости использованных ограничений (30), (31) и (37). Для определенности будем исходить из потенциала (11), предполагая, что показатель n сильно отличается от критического значения $n=2$. Из (11), (34) и (35) следует, что

$$\frac{\epsilon^2}{\Omega^2} = \frac{4n(n+1)^2}{9(2-n)} \cdot \frac{\gamma_0}{\tilde{\gamma}}\left(\frac{r_e}{R}\right)^2 \simeq \frac{\gamma_0}{\tilde{\gamma}}\left(\frac{r_e}{R}\right)^2 , \qquad (41)$$

где величина $\tilde{\gamma} = mc^2/U$, а $r_e = e^2/mc^2$ – электромагнитный радиус электрона. Хорошо известно (см., например /4/, стр.267), что уравнения Лоренца-Дирака имеют смысл только при условии

$$\gamma E \ll \frac{(mc^2)^2}{e\hbar c}, \qquad (42)$$

которое в рассматриваемом случае переходит в

$$\gamma_0/\tilde{\gamma} \ll \frac{e^2}{\hbar c}\cdot\frac{R}{r_e} . \qquad (42^1)$$

Поэтому соотношение (41) означает, что

$$\frac{\epsilon^2}{\Omega^2} \ll \frac{e^2}{\hbar c}\cdot\frac{r_e}{R} \simeq \frac{r_e}{100R} \ll 1 , \qquad (41^1)$$

т.е. требование (37) всегда выполнено с большим запасом. Неравенства (31) с учетом (32) ограничивают время t, в течение которого можно пользоваться линеаризованным уравнением (33). Они приводят к условию

$$t \ll \tau = \gamma_0/a. \tag{43}$$

Неравенство (30) в совокупности с соотношением (40) также приводит к условию (43), так как из требования

$$\frac{|\tilde{\delta}|}{R} = \frac{\mu t}{R\Omega^2} \ll 1$$

следует

$$t \ll \frac{R\Omega^2}{\mu} = \frac{(2-n)\gamma_0}{a}.$$

Дополнительное ограничение на допустимый интервал t возникает в случае, когда $\epsilon<0$, т.е. когда показатель в экспоненте положителен. Тогда из (30) и (39) следует требование

$$t \ll \theta = 1/\epsilon. \tag{44}$$

Соотношение между параметрами τ и θ зависит от энергии частицы. Легко убедиться в том, что

$$\frac{\tau}{\theta} = \frac{\tilde{\gamma}}{n\gamma_0} \simeq \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma_0}, \tag{45}$$

т.е. при $\gamma_0<\tilde{\gamma}$ допустимый интервал t ограничивает величина θ, а при $\gamma_0>\tilde{\gamma}$ – величина τ. Из соотношения (41^1) следует, что всегда выполнено условие $\Omega\theta \gg 1$. Аналогичное неравенство обычно относится и к параметру τ, поскольку

$$\Omega^2\tau^2 = \frac{9}{4}\left(\frac{2-n}{n^3}\right)\left(\frac{R}{r_e}\right)^2\left(\frac{\tilde{\gamma}}{\gamma_0}\right)^3, \tag{46}$$

т.е. с учетом (42^1) получаем

$$\Omega^2\tau^2 \gg \left(\frac{R}{r_e}\right)^2\left(\frac{r_e}{R}\right)^3\left(\frac{hc}{e^2}\right)^3 \simeq 10^6\frac{r_e}{R}. \tag{46^1}$$

Величина Ω примерно совпадает с ω_0 –частотой обращения частицы по окружности радиуса R. В частности, при потенциале (11) имеет место соотношение $\Omega^2=(2-n)\,\omega_0^2$. Следовательно, из неравенств (41^1) и (46^1) вытекает, что за время одного оборота по кругу относительное изменение поперечной энергии частицы очень мало и в течение многих оборотов форма траектории остается почти такой, как в том случае, если бы сила трения отсутствовала. Это обстоятельство уже отмечалось выше при обсуждении закона сохранения (2); оно остается, конечно, верным и при произвольном некруговом движении, которое рассматривалось в связи с теоремой вириала. Существенно, что в теореме вириала играют роль только радиальные составляющие сил, а радиальная составляющая электромагнитного трения очень мала по сравнению с $f(r)$. Действительно, из уравнения (22) следует, что отношение этих компонент

$$\kappa \simeq \frac{e^2\gamma^2 f \dot{r}}{m^2c^5} = \frac{e^2\gamma^2 f}{(mc^2)^2}\cdot\frac{\dot{r}}{c}.$$

Поскольку нас интересуют только финитные поперечные движения, величина $\dot{r}/c$ не может превосходить предельного угла каналирования Θ_k, который, как известно (см., например,[5]), равен $(\gamma\tilde{\gamma})^{-1/2}$. С другой стороны, по порядку величины $f \simeq \frac{U}{R}$. Следовательно, $\kappa \lesssim \frac{r_e}{R}\left(\frac{\gamma_0}{\tilde{\gamma}}\right)^{3/2}$, а тогда, учитывая ($42^1$), получим $\kappa \ll 1$.

В заключение приведем несколько численных оценок величин, характерных для рассматриваемых явлений. При каналировании электронов, движущихся на расстоянии 5.10^{-9} см от оси <110> кремния, $U(R) \simeq 17{,}5$ эВ, $\tilde{\gamma} \simeq 3.10^4$, $\epsilon \simeq 3{,}6.10^{10}$ c^{-1} и $a \simeq 7.10^5$ γ^2 c^{-1}; соответствующие характерные длины $L_\epsilon = \frac{2c}{\epsilon} \simeq 1{,}7$ см, $L_a = \frac{c\gamma}{a} \simeq \frac{4\cdot10^4}{\gamma}$ см.

Считаем своим приятным долгом поблагодарить В.Л.Любошица за многочисленные обсуждения и важные замечания и А.О.Грубича за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бонч-Осмоловский А.Г., Подгорецкий М.И. ОИЯИ, Р2-11250, Дубна, 1978.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика , ГИФМЛ, М., 1958.
3. Линхард Й. УФН, 1969, 99, с.249.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля , изд-во "Наука", М., 1973.
5. Бонч-Осмоловский А.Г., Подгорецкий М.И. ЯФ,1979, 29, с.432.
6. Бонч-Осмоловский А.Г., Подгорецкий М.И. ЖТФ,1979, 49, с.449.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 января 1980 года.