объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-80-568

А.Д.Донков, В.Г.Кадышевский, М.Д.Матеев

НЕЕВКЛИДОВО ИМПУЛЬСНОЕ ПРОСТРАНСТВО И ПРОБЛЕМА ДВУХ ТЕЛ

Направлено в ТМФ

1980

§1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В серии работ [1-8] изучалась квантовая теория поля, в основу которой была положена гипотеза о неевклидовости четырехмерного импульсного пространства. Конкретно в качестве модели пространства использовались два пространства де Ситтера, реализованных на поверхностях

$$p_0^2 - \vec{p}^2 - M^2 p_4^2 = -M^2, \qquad /1.1/$$

$$p_0^2 - \vec{p}^2 + M^2 p_4^2 = M^2, \qquad /1.2/$$

где M - новая универсальная постоянная теории, называемая фундаментальной массой. Обратная величина

$$\ell = \frac{1}{M} \qquad /1.3/$$

соответственно называется фундаментальной /иногда элементарной/ длиной. Обычная "плоская" теория формально должна возникать при предельном переходе $\ell \to 0$ $(M \to \infty)$, т.к. при этом все соотношения деситтеровской геометрии совпадают со своими псевдоевклидовыми аналогами.

Теория свободных полей, оперирующая с 4-импульсами, лежащими на массовой оболочке, практически оказывается нечувствительной к кривизне импульсного 4-пространства. Однако при наличии взаимодействия, когда мы вынуждены рассматривать 4-импульсы, не принадлежащие, вообще говоря, массовым поверхностям, отличие кривизны p-пространства от нуля становится весьма важным фактором в области высоких энергий.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы иллюстрировать высказанное утверждение, рассматривая задачу о двух взаимодействующих частицах. Другими словами, нас будет интересовать, как модифицируется описание системы двух релятивистских частиц, если принять гипотезу о деситтеровости импульсного пространства и, таким образом, ввести в теорию фундаментальную массу M. Из двух деситтеровских геометрий ниже мы выбираем вариант /1.1/.

§2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ИМПУЛЬСА В СИСТЕМЕ ДВУХ ЧАСТИЦ

Рассмотрим упругое рассеяние двух скалярных частиц с массами m_1 и m_2. 5 - импульсы частиц в начальном и в конечном состояниях обозначим соответственно через (q_i^μ, Mq_i^4) и (p_i^μ, Mp_i^4), $i = 1,2$. Все они, по определению, принадлежат поверхности /1.1/.

Пусть $\phi_{q_1 q_2}(p_1, p_2)$ - волновая функция системы в отсутствие взаимодействия между частицами. По каждому из аргументов эта величина должна удовлетворять соответствующему уравнению типа Клейна-Гордона [2,3,8]

$$2M^2(p_1^4 - \mathrm{ch}\mu_1)\phi_{q_1 q_2}(p_1, p_1) = 0, \qquad /2.1/$$

$$2M^2(p_2^4 - \mathrm{ch}\mu_2)\phi_{q_1 q_2}(p_1, p_2) = 0, \qquad /2.2/$$

где

$$\mathrm{ch}\mu_1 = \sqrt{1 + \frac{m_1^2}{M^2}}, \qquad \mathrm{ch}\mu_2 = \sqrt{1 + \frac{m_2^2}{M^2}}. \qquad /2.3/$$

В плоском пределе

$$|p_i| \ll M, \quad |m_i| \ll M, \quad p_i^4 \simeq 1 \qquad /2.4/$$

каждое из уравнений /2.1/-/2.2/ совпадает с обычным уравнением Клейна-Гордона. В полной аналогии с [9] перейдем от /2.1/-/2.3/ к эквивалентной системе уравнений:

$$2M^2[p_1^4 + p_2^4 - (\mathrm{ch}\mu_1 + \mathrm{ch}\mu_2)]\phi_{q_1 q_2}(p_1, p_2) = 0, \qquad /2.5/$$

$$2M^2[p_1^4 - p_2^4 - (\mathrm{ch}\mu_1 - \mathrm{ch}\mu_2)]\phi_{q_1 q_2}(p_1, p_2) = 0. \qquad /2.6/$$

Уравнение /2.6/ есть обобщение "плоского" соотношения

$$[p_1^2 - p_2^2 - (m_1^2 - m_2^2)]\phi_{q_1 q_2}(p_1, p_2) = 0, \qquad /2.7/$$

которое в подходе [10,11] рассматривается как дополнительное условие на волновую функцию двухчастичной системы, выполняющееся и при наличии взаимодействия. При этом /2.7/ используется для введения такой важной переменной, как относительный 4-импульс системы p^μ. Напомним, что 4-вектор p^μ является ортогональным к суммарному 4-импульсу $P^{\mu} = p_1^{\mu} + p_2^{\mu} = q_1^{\mu} + q_2^{\mu}$ и в системе центра масс /СЦМ/, где *

$$p_1^{\mu} = (p_1^0, \vec{p}) ,$$
$$p_2^{\mu} = (p_2^0, -\vec{p}) , \qquad /2.8/$$

приводится к виду

$$p^{\mu} = (0, \vec{p}) . \qquad /2.9/$$

Сравнение /2.9/ и /2.8/ показывает, что в СЦМ 4-вектор относительного импульса связан с 4-импульсами частиц посредством операции сдвига вдоль нулевой оси.

Нетрудно убедиться в том, что все рассуждения, которые в "плоской" теории ведут от соотношения /2.7/ к формуле /2.9/ для относительного импульса, могут быть обобщены на случай импульсного пространства /1.1/.

Во-первых, постулируем, что соотношение /2.6/ остается справедливым и после включения взаимодействия. Далее переходим в СЦМ, где

$$p_1^L = (p_1^0, \vec{p}, Mp_1^4) ,$$
$$p_2^L = (p_2^0, -\vec{p}, Mp_2^4) , \quad (L = 0,1,2,3,4) , \qquad /2.10/$$

$$q_1^L = (q_1^0, \vec{q}_1, Mq_1^4) = (E_1, \vec{q}, M\operatorname{ch}\mu_1), \qquad /2.11/$$
$$q_2^L = (q_2^0, -\vec{q}, Mq_2^4) = (E_2, -\vec{q}, M\operatorname{ch}\mu_2).$$

Вспоминая, что в импульсном пространстве де Ситтера /1.1/ роль сдвига вдоль нулевой оси выполняет поворот в /04/-плоскости /2,3/, приходим к следующему деситтеровскому 5-вектору, непосредственно обобщающему величину /2.9/:

$$p^L = \frac{M}{M_0}(0, \quad \vec{p}, \quad Mp^4) . \qquad /2.12/$$

---

* Подчеркнем, что в отличие от q_1^{μ} 4-импульсы p_i^{μ}, вообще говоря, не принадлежат массовым поверхностям: $p_i^2 \neq m_i^2$. Однако в силу /2.7/ всегда $p_1^2 - m_1^2 = p_2^2 - m_2^2$.

где

$$\vec{p}^2 + M^2 p_4^2 = M_0^2 = M^2 + \frac{1}{4}[s - M^2(\mathrm{ch}\mu_1 - \mathrm{ch}\mu_2)^2],$$
$$s = (q_1 + q_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 . \qquad /2.13/$$

Таким образом, в новой схеме относительный 3-импульс $\vec{p}$ принадлежит 4-сфере /2.13/, радиус которой M_0 зависит от инвариантной массы двухчастичной системы.

Относительный импульс $\vec{q}$ частиц в начальном состоянии, равный по абсолютной величине

$$|\vec{q}| = \sqrt{\frac{[s-(m_1+m_2)^2][s-(m_1-m_2)^2]}{4s}}, \qquad /2.14/$$

допускает аналогичную геометрическую интерпретацию:

$$\vec{q}^{\,2} + M^2 q_4^2 = M_0^2,$$

где в силу /2.13/ и /2.14/

$$q_4 = \frac{1}{2}\sqrt{(\mathrm{ch}\mu_1 + \mathrm{ch}\mu_2)^2 - \frac{M^2}{s}(\mathrm{ch}\mu_1 - \mathrm{ch}\mu_2)^2} . \qquad /2.15/$$

Естественно положить далее:

$$\vec{p} = M_0 \sin\Omega_p \vec{n}_p, \qquad 0 < \Omega_p < \pi,$$
$$M p_4 = M_0 \cos\Omega_p, \qquad n_p^2 = 1, \qquad /2.16/$$

$$\vec{q} = M_0 \sin\Omega_q \vec{n}_q, \qquad 0 \le \Omega_q < \pi, \qquad /2.17/$$
$$M q_4 = M_0 \cos\Omega_q, \qquad n_q^2 = 1.$$

После перехода к относительному импульсу $\vec{p}$, лежащему на 4-сфере /2.13/, уравнение /2.6/ удовлетворяется тождественно, а /2.5/ принимает вид

$$2M^2(p_4 - q_4)\phi_q(\vec{p}). \qquad /2.18/$$

В плоском пределе /1.4/ отсюда находим:

$$(\vec{p}^{\,2} - \vec{q}^{\,2})\phi_q(\vec{p}) = 0. \qquad /2.19/$$

Таким образом, /2.8/ следует трактовать как уравнение свободного относительного движения в кривом импульсном пространстве /1.1/.

§3. КОНФИГУРАЦИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ. КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

В конфигурационном пространстве волновое уравнение /2.19/ выглядит как свободное уравнение Шредингера:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\Delta_{\theta,\phi}}{r^2}-\vec{q}^{\,2}\right)\phi_q(\vec{r})=0, \qquad /3.1/$$

где $\vec{r}$ - относительная координата, а $-\Delta_{\theta,\phi}=\vec{L}^2$ - квадрат относительного момента количества движения. Согласно квазипотенциальной концепции [12] взаимодействие между релятивистскими частицами можно описывать феноменологически с помощью локальной функции $V(\vec{r};\vec{q})$, параметрически зависящей от полной энергии системы. При энергии ниже порога первого неупругого процесса квазипотенциал $V(\vec{r},\vec{q})$ должен быть вещественным, чтобы в этой области выполнялось условие двухчастичной унитарности.

После работы Логунова и Тавхелидзе [12] в литературе обсуждалось много уравнений квазипотенциального типа [9,10,11,13-17]. От нерелятивистского уравнения Шредингера наименее отличается квазипотенциальное уравнение в форме Тодорова [11]

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\Delta_{\theta,\phi}}{r^2}-\vec{q}^{\,2}\right)\phi_q(\vec{r})=-2\mu_q V(\vec{r};\vec{q})\,\phi_q(\vec{r}), \qquad /3.2/$$

где $\mu_q=\dfrac{m_1 m_2}{\sqrt{m_1^2+\vec{q}^{\,2}}+\sqrt{m_2^2+\vec{q}^{\,2}}}$ - "релятивизованная" приведенная масса, а $\vec{q}^{\,2}$ определяется формулой /2.14/. Релятивистская двухчастичная амплитуда упругого рассеяния $A(\vec{p},\vec{q})$, нормированная "нерелятивистским" образом:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=|A(\vec{p},\vec{q})|, \qquad /3.3/$$

может быть записана в виде известного интеграла:

$$A(\vec{p},\vec{q})=-\frac{\mu_q}{2\pi}\int e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}}\,V(\vec{r};\vec{q})\,\phi_q(\vec{r})\,d\vec{r}. \qquad /3.4/$$

Отсюда с учетом сферической симметрии квазипотенциала находим для $A(\vec{p},\vec{q})$ выражение в терминах величин, определенных в евклидовом 3-пространстве относительных импульсов:

$$A(\vec{p},\vec{q}) = -\frac{\mu_q}{2\pi}\int V[(\vec{p}-\vec{q})^2;\vec{q}]\phi_q(\vec{p})\,d^3\vec{p}\ . \qquad /3.5/$$

Как модифицируется квазипотенциальный формализм при переходе к искривленному пространству относительных импульсов /2.13/? Подобный вопрос возник много лет назад /18/, и мы сейчас воспользуемся результатами цитируемой работы.

Во-первых, введем в рассмотрение относительную координату r, канонически сопряженную неевклидову расстоянию на 4-сфере /2.13/. Пусть L_{ij} $(ij = 1,2,3,4)$ - генераторы группы O/4/, играющей роль группы движений $\vec{p}$ -пространства /2.13/.

Положим

$$M_0^2 r^2 = -\frac{1}{2}L_{ij}L_{ij}\ ;\quad i,j = 1,2,3,4. \qquad /3.6/$$

Таким образом, координата r квантуется по закону

$$r^2 = \frac{1}{M_0^2}n(n+2)\,,\quad n = 0,1,2,3,\dots\ . \qquad /3.7/$$

Минимальное отличное от нуля расстояние определяется величиной $\frac{1}{M_0}$, которая в силу /2.13/ зависит как от фундаментальной массы M, так и от инвариантной массы системы $\sqrt{s}$. Из имеющихся экспериментальных данных можно заключить, что массы всех известных элементарных частиц удовлетворяют ограничению

$$m \ll M. \qquad /3.8/$$

В этом приближении из /2.13/ находим

$$M_0^2 = M^2 + \frac{\vec{q}^{\,2}}{2}\Big(1 + \frac{\vec{q}^{\,2}+m_1^2+m_2^2}{m_1m_2+\sqrt{\vec{q}^{\,2}+m_1^2}\sqrt{\vec{q}^{\,2}+m_2^2}}\Big). \qquad /3.9/$$

Следовательно, минимальное расстояние между частицами в пределе очень высоких энергий $\vec{q}^{\,2} \gg M^2$ есть величина порядка дебройлевской длины волны 1/q.

В сферических координатах /2.16/ оператор Казимира /3.6/ принимает вид

$$-\frac{1}{2}L_{ij}L_{ij} = \frac{1}{\cos^2\Omega}\frac{\partial}{\partial\Omega}\Big(\cos^2\Omega\frac{\partial}{\partial\Omega}\Big) + \frac{1}{\sin^2\Omega}\Lambda_{\theta,\phi}\ . \qquad /3.10/$$

Ортонормированные собственные функции этого оператора, отвечающие спектру /3.7/, хорошо известны /см., например, /19/ /:

$$\langle n, \ell, m | \Omega_p, \vec{n}_p \rangle \equiv$$

$$\equiv N^n_{\ell m}\, C^{1+\ell}_{n-\ell}(\cos\Omega_p)\sin^\ell \Omega_p\, C^{1/2+\ell}_{\ell-m}(\cos\theta)\sin^m\theta\, e^{im\phi} \equiv \qquad /3.11/$$

$$\equiv \langle n, \ell, m | \vec{p} \rangle ,$$

где $C^p_q(z)$ - полиномы Гегенбауэра, а $N^n_{\ell m}$ - нормировочный множитель:

$$N^n_{\ell m} = \sqrt{\frac{2^{2\ell}(n-\ell)!\,2(n+1)\Gamma^2(\ell+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+\ell+2)} \; \frac{2^{2m+1}(\ell-m)!\,(2\ell+1)\Gamma^2(m+1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\ell+m+1)}} . \qquad /3.12/$$

При выполнении определенных условий [19] функцию $f(\vec{p})$, заданную на сфере /2.13/, можно разложить по базису /3.11/:

$$f(\vec{p}) = \sum_{n,\ell,m} \tilde{f}(n,\ell,m) \langle n, \ell, m | \vec{p} \rangle , \qquad /3.13/$$

причем

$$\tilde{f}(n,\ell,m) = \int d\Omega_p\, f(\vec{p}) \langle \vec{p} | n, \ell, m \rangle \qquad /3.14/$$

/ $d\Omega_p = \dfrac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3\sqrt{1-\dfrac{\vec{p}^2}{M_0^2}}}$ - 0/4/ - инвариантный элемент объема/.

Применяя разложение /3.13/ и учитывая /2.17/, нетрудно проверить, что уравнение /2.18/ равносильно следующему дифференциально-разностному уравнению в новом конфигурационном представлении:

$$\Big[4\,\mathrm{sh}^2\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial n} + \frac{2}{n+1}\mathrm{sh}\frac{\partial}{\partial n} - \frac{\Delta_{\theta,\phi}}{(n+1)^2} e^{\frac{\partial}{\partial n}} - \qquad /3.15/$$

$$- 4\sin^2\frac{\Omega_q}{2}\Big]\phi_q(n,\theta,\phi) = 0 .$$

По самому построению /3.15/ описывает свободное относительное движение нашей двухчастичной системы. Если перенести в новую схему концепцию квазипотенциала, то для описания относительного движения двух взаимодействующих частиц мы можем использовать уравнение

$$[4\,\mathrm{sh}^2\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial n} + \frac{2}{n+1}\mathrm{sh}\frac{\partial}{\partial n} - \frac{\Delta_{\theta,\phi}}{(n+1)^2}e^{\frac{\partial}{\partial n}} - 4\sin^2\frac{\Omega_q}{2}]\phi_q(n,\theta,\phi) = $$
$$= -\frac{\mu_q}{2\pi}V(n;\,q)\,\phi_q\,(n,\theta,\phi), \qquad /3.16/$$

где $V(n;\,q)$ - сферически-симметричный квазипотенциал, зависящий от дискретной относительной координаты. В плоском пределе /2.4/ уравнение /3.16/ совпадает с /3.2/.

Нормировка амплитуды рассеяния $A(\vec{p},\vec{q})$ по-прежнему дается соотношением /3.3/, а вместо /3.4/ и /3.5/ теперь имеем:

$$A(\vec{p},\vec{q}) = -\frac{\mu_q}{2\pi}\sum_n \int d\Omega_{\theta,\phi} \langle p|n,\theta,\phi\rangle V(n;q)\,\phi_q(n,\theta,\phi), \qquad /3.17/$$

$$A(\vec{p},\vec{q}) = -\frac{\mu_q}{2\pi}\int V(t_{pq}\;;q)\,\phi_q(p)\,d\Omega_p\;. \qquad /3.18/$$

Благодаря сферической симметрии квазипотенциал в правой части /3.18/ зависит от 0/4/-инвариантной величины t_{pq} -"искривленной" передачи относительного импульса. Эта величина определяется соотношением

$$\sqrt{M_0^2 - t_{pq}} = \vec{p}\cdot\vec{q} + M^2 p_4 q_4 \equiv M_0^2\cos\Omega_{pq}\;. \qquad /3.19/$$

Заметим, что с геометрической точки зрения Ω_{pq} есть неевклидово расстояние между точками $\vec{p}$ и $\vec{q}$ в импульсном пространстве /2.13/. В плоском пределе, очевидно,

$$M_0\Omega_{pq} \approx \sqrt{(\vec{p}-\vec{q})^2}\;. \qquad /3.20/$$

Обратим также внимание на то обстоятельство, что на массовой поверхности $\vec{p}^{\,2} = \vec{q}^{\,2}$ в пределе сверхвысоких энергий

$$\vec{q}^{\,2} \gg m_1^2, \qquad \vec{q}^{\,2} \gg M^2 \qquad /3.21/$$

формула /3.19/ сводится к соотношению

$$\vec{p}\cdot\vec{q} = \vec{q}^{\,2}\cos\Omega_{pq}. \qquad /3.22/$$

Следовательно, в этой области угол рассеяния θ совпадает с 0/4/-инвариантной величиной Ω_{pq}:

$$\theta \approx \Omega_{pq}\,. \qquad /3.23/$$

Производя в /3.16/ разделение переменных с помощью подстановки

$$\phi_q(n,\theta,\phi) \to \frac{R_\ell(n;q)}{n+1} Y_{\ell m}(\theta,\phi), \qquad /3.24/$$

приходим к следующему разностному уравнению для радиальной волновой функции $R_\ell(n;q)$:

$$\left[4\,\mathrm{sh}^2 \frac{d}{2dn} - \frac{\ell(\ell+1)}{(n+1)(n+2)} - 4\sin^2\frac{\Omega_q}{2}\right] R_\ell(n;q) = \qquad /3.25/$$

$$= 4\mu_q V(n;q) R_\ell(n;q)\,.$$

§4. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Для ряда квазипотенциалов $V(n;q)$, в том числе "кулоновского":

$$V_c(n;q) \sim \frac{1}{n+1},$$

разностное уравнение /3.25/ может быть решено точно. Некоторые методы приближенного анализа уравнения Шредингера, разработанные в квантовой механике, также могут успешно применяться при работе с уравнением /3.25/. В данном параграфе мы сформулируем квазиклассический /ВКБ/ метод решения /3.25/ - см.[20].

Во-первых, примем во внимание, что из условия квазиклассичности угловой части волновой функции $\phi(n,\theta,\phi)$ следуют стандартные ограничения на допустимые значения угла рассеяния в методе ВКБ[21]:

$$\theta\ell \gg 1, \quad (\pi-\theta)\,\ell \gg 1. \qquad /4.1/$$

При больших орбитальных моментах это условие справедливо почти для всех углов, кроме небольших интервалов вблизи $\theta = 0$ и $\theta = \pi$.

Положим, как обычно*,

$$\hbar(\ell+\frac{1}{2}) = q\rho = L, \qquad /4.2/$$

где ρ - прицельный параметр. С учетом /4.2/ уравнение /2.25/ записывается так:

---

*Далее нам будет удобно вернуться к обычной системе единиц.

$$[4\,\mathrm{sh}^2\frac{d}{dn}-\frac{L^2}{\hbar^2(n+1)(n+2)}-4\sin^2\frac{\Omega_q}{2}]R_\ell(n;q)=4\mu_q V(n;q)\,R_\ell(n;q)\,. \qquad /4.3/$$

Его решение будем искать в виде

$$R_\ell(n;q)=\lambda\, e^{\frac{i}{\hbar}S(n;q)}, \qquad /4.4/$$

где $S(n;q)$ есть функция, имеющая размерность действия, а λ - произвольная константа с размерностью длины.

В силу /3.7/ целочисленная переменная n связана с относительным расстоянием r соотношением

$$\frac{\hbar^2}{M_0^2c^2}\,n(n+2)=r^2. \qquad /4.5/$$

В квазиклассическом приближении $\hbar\to 0,\ n\gg 1$, имеем отсюда

$$r\simeq\frac{\hbar}{M_0c}\,n. \qquad /4.6/$$

Данную величину естественно использовать в качестве независимой переменной в квазиклассической области. При этом вместо /4.4/ будем иметь:

$$R_\ell^{\text{ВКБ}}(r;q)=\lambda\, e^{\frac{i}{\hbar}S(r;q)}\,. \qquad /4.7/$$

При подстановке /4.7/ в уравнение /4.3/ необходимо учесть, что

$$e^{\pm\frac{\hbar}{M_0c}\frac{d}{dr}}\,e^{\frac{i}{\hbar}S(r;q)}=e^{\frac{i}{\hbar}S(r\pm\frac{\hbar}{M_0c};\,q)}\,. \qquad /4.8/$$

Наши дальнейшие действия разбиваются на следующие этапы:

1/ Функция $S(r\pm\frac{\hbar}{M_0c};q)$ разлагается в ряд Тейлора с точностью до членов второго порядка по степеням $\frac{\hbar}{M_0c}$.

2/ Экспоненты, в показателях которых содержится $\hbar$, разлагаются по степеням $\hbar$ с той же точностью.

3/ Все члены, имеющие одинаковый порядок малости по $\hbar$, группируются вместе.

4/ Налагается "условие квазиклассичности", состоящее в том, что члены, не содержащие $\hbar$, считаются значительно большими тех членов, которые содержат $\hbar$ в первой степени.

В явном виде "условие квазиклассичности" выглядит так:

$$|2+2\frac{\tilde{p}(r)}{M_0^2c^2} - \frac{L^2}{M_0^2c^2r^2}| >> \frac{\hbar}{M_0c}|\frac{d}{dr}\sqrt{1+\frac{\tilde{p}^2(r)}{M_0^4c^4} - \frac{L^2}{M_0^2c^2r^2}}|, \quad /4.9/$$

$$\tilde{p}(r) \equiv -M_0^2c^2\cos\Omega_q - \mu_q V(r;q) . \quad /4.10/$$

В плоском пределе /4.6/ переходит в известное квантовомеханическое условие квазиклассичности:

$$|\frac{d}{dr}\frac{\hbar}{p(r)}| << 1 , \quad /4.11/$$

где $p(r) = \sqrt{2\mu(\frac{q^2}{2\mu} - V(r))}$ - классический импульс частицы.

Процедура, описанная выше, приводит к следующему выражению для волновой функции /4.7/:

$$R_\ell^{ВКБ}(r;q) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\tilde{p}^2(r)}{M_0^4c^4}-\frac{L^2}{M_0^2c^2r^2}}} e^{-\frac{M_0c}{\hbar}\int_{r_0}^{r}\ln\frac{1}{M^2c^2}[-\tilde{p}(r)\pm i\sqrt{M_0^4c^4-\tilde{p}^2(r)-\frac{L^2M_0^2c^2}{r^2}}]}, \quad /4.12/$$

где r_0 есть "точка поворота", определяемая из уравнения

$$M_0^4c^4 - \tilde{p}^2(r) - \frac{L^2M_0^2c^2}{r^2} = 0. \quad /4.13/$$

С помощью /4.1/ можно найти фазовый сдвиг $\delta_\ell^{ВКБ}$, т.е. разность фаз волновой функции /4.12/ в асимптотической области $r\to\infty$ и свободной волновой функции. Прямые вычисления дают:

$$\delta_\ell^{ВКБ}(q) = \frac{M_0c}{\hbar}\int_{r_0}^{\infty}|\operatorname{arctg}[-\frac{1}{\tilde{p}(r)}\sqrt{M_0^4c^4-\tilde{p}^2(r)-\frac{L^2M_0^2c^2}{r^2}}]-\Omega_q|dr - \frac{M_0c}{\hbar}r_0\Omega_q - \frac{\pi L}{2\hbar} . \quad /4.14/$$

§5. РАССЕЯНИЕ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ НА БОЛЬШИЕ УГЛЫ

В работах [21,22] было отмечено, что в квантовой механике рассеяние частиц высоких энергий на большие углы может быть описано как квазиклассическое рассеяние на эффективном гладком потенциале в области классически запрещенных углов. Применим это соображение в рамках нашего подхода для нахождения сечения рассеяния на большие углы.

В квазиклассическом приближении амплитуда рассеяния записывается в виде

$$A^{\text{ВКБ}}(q,\theta)=\frac{1}{2iq}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)P_\ell^{\text{ВКБ}}(\cos\theta)e^{2i\delta_\ell^{\text{ВКБ}}(q)}, \qquad /5.1/$$

где $P_\ell(\cos\theta)$ – квазиклассическое приближение к полиномам Лежандра /20/. Далее естественно заключаем, что основной вклад в сумму /5.1/ дают те значения ℓ, которые близки к корню уравнения

$$2\frac{d\delta_\ell^{\text{ВКБ}}(q)}{d\ell}\pm\theta=0. \qquad /5.2/$$

Подставляя сюда выражение для фазового сдвига /4.14/, находим уравнение, связывающее угол рассеяния с прицельным параметром ℓ и содержащее фундаментальную массу M:

$$\frac{\rho q}{M_0c}\int_{r_0}^{\infty}\frac{\tilde{p}(r)\,dr}{\left(r-\frac{\rho^2q^2}{M_0^2c^2}\right)\sqrt{1-\frac{\rho^2q^2}{M_0^2c^2r^2}-\tilde{p}^2(r)}}=\frac{\pi\pm\theta}{2}. \qquad /5.3/$$

Легко видеть, что в плоском пределе уравнение /5.3/ переходит в классическое уравнение траектории относительного движения частиц:

$$\rho q\int_{r_0}^{\infty}\frac{dr}{r^2\sqrt{2\mu(E-V(r))-\frac{L^2}{r^2}}}=\frac{\pi\pm\theta}{2}. \qquad /5.4/$$

При больших энергиях $M_0^2c^2\cos\Omega_q \gg \mu_q V(r;q)$ в /5.3/ можно пренебречь зависимостью от потенциала и явно вычислить интеграл. Это дает следующее приближенное уравнение траектории:

$$\rho(\theta)=\frac{r_0\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-\sin^2\Omega_q\sin^2\frac{\theta}{2}}}. \qquad /5.5/$$

В области "классически запрещенных углов", где $\rho(\theta)$ и r_0 принимают комплексные значения, амплитуда рассеяния может быть представлена в виде /20/

$$A^{\text{ВКБ}}(\theta,q)\sim e^{-\frac{1}{\hbar}\operatorname{Im}S^{\text{ВКБ}}(\theta)}, \qquad /5.6/$$

где действие $S^{ВКБ}(\theta)$ определяется следующим интегралом:

$$S^{ВКБ}(\theta) = \int L\, d\theta = q \int \rho(\theta)\, d\theta . \qquad /5.7/$$

Принимая во внимание /5.5/, находим отсюда:

$$S^{ВКБ}(\theta) = 2M_0 c r_0 \arcsin(\sin\Omega_q \sin\frac{\theta}{2}). \qquad /5.8/$$

Следовательно, при высоких энергиях $M_0^2 c^2 \cos\Omega_q \gg \mu_0 V(r; q)$ для амплитуды рассеяния имеем с учетом /1.17/ и /2.19/

$$A^{ВКБ}(\theta, q) \sim \exp[-\frac{2M_0 c\, Im\, r_0}{\pi} \arcsin(\sin\Omega_q \sin\frac{\theta}{2})] = \exp[-\frac{M_0 c\, Im\, r_0}{\pi}\Omega_{pq}]. \qquad /5.9/$$

Заметим, что /5.9/ не только переходит в соответствующую "плоскую" формулу

$$A^{ВКБ}(\theta, q) \sim e^{-\frac{Im\, r_0}{\pi}\sqrt{(\vec{p}-\vec{q})^2}} \qquad /5.10/$$

/см. 3.20/, но и выглядит как прямое геометрическое обобщение выражения /5.10/ на случай искривленного пространства относительных импульсов /2.13/.

Комбинируя /2.3/ и /5.9/, получаем следующее выражение для дифференциального сечения рассеяния в рассматриваемой области значений кинематических переменных:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{s}|A^{ВКБ}(\theta, q)|^2 \approx \frac{1}{s} e^{-\frac{4M_0 c}{\pi} Im\, r_0 \arcsin\sqrt{\frac{t_{pq}}{4M_0^2 c^2}}}, \quad t_{pq} = (\vec{p}-\vec{q})^2 . \qquad /5.11/$$

В [6] была получена аналогичная формула в рамках теории с импульсным пространством де Ситтера /1.2/:

$$\frac{d\sigma}{dt} \sim \frac{1}{s}\left(\sqrt{\frac{t_{pq}}{4M^2c^2}} + \sqrt{1 + \frac{t_{pq}}{4M^2c^2}}\right)^{-\frac{4Mc}{\pi} Im\, r_0} . \qquad /5.12/$$

Оба эти выражения, /5.11/ и /5.12/, имеют одинаковый плоский предел

$$\frac{d\sigma}{dt} \sim \frac{1}{s} e^{-\frac{2\,\mathrm{Im}\, r_0}{\pi}\sqrt{t_{pq}}} . \qquad /5.13/$$

Эту работу мы хотели бы резюмировать так. Если в природе существует новый универсальный масштаб - фундаментальная масса /или, что эквивалентно, фундаментальная длина/, то развитый здесь аппарат может служить для феноменологического описания двухчастичных систем во всей области энергий, включая /3.21/.

Авторы искренне благодарны П.Н.Боголюбову, В.А.Матвееву, Р.М.Мир-Касимову, Р.М.Мурадяну, А.Н.Тавхелидзе и Р.Н.Фаустову за полезные обсуждения результатов данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадышевский В.Г. ОИЯИ, Р2-5717, Дубна, 1971.
2. Кадышевский В.Г. В кн.: Проблемы теоретической физики. Памяти Игоря Евгеньевича Тамма. "Наука", М., 1972, с.52-73.
3. Донков А.Д. и др. Болгарский физический журнал, 1974, т.1, с.58,150,233; 1975, т.2, с.3; Труды Математического ин-та им. В.А.Стеклова, т.136. "Наука", М., 1975, с.85-129.
4. Мир-Касимов Р.М. В кн.: ОИЯИ, Р1,2-7642, Дубна, 1973.
5. Кадышевский В.Г., Матеев М.Д., Мир-Касимов Р.М. ОИЯИ, Е2-8892, Р2-8877, Дубна, 1975.
6. Донков А.Д. и др. В кн.: Нелокальные, нелинейные и неперенормируемые теории. ОИЯИ, Д2-9788, Дубна, 1976; Труды XVIII Международной конференции по физике высоких энергий. ОИЯИ, Д1,2-104000, Дубна, 1977.
7. Матеев М.Д. В кн.: ОИЯИ, Д2-10533, Дубна, 1977.
8. Волобуев И.П. и др. ТМФ, 1979, т.40, №3, с.363-372.
9. Матвеев В.А., Мурадян Р.М., Тавхелидзе А.Н. ОИЯИ, Р2-3900, Дубна, 1968.
10. Боголюбов П.Н. ТМФ, 1970, т.5, с.244-255.
11. Todorov I.T. Phys.Rev.D, 1971, v.3, p.2351.
12. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cimento, 1963, v.29, p.330.
13. Kadyshevsky V.G. Nucl.Phys. B., 1968, v.136, p.125; Kadyshevsky V.G., Mateev M.D. Nuovo Cimento A, 1968, v.55, p.275.
14. Freeman M., Mateev M.D., Mir-Kasimov R.M. Nucl.Phys., 1969, v.B12, p.197-215.
15. Fronsdal C. Phys.Rev., 1967, v.156, p.1665.
16. Brodsky J. Preprint SLAC-PUB 1328 (T), Stanford, 1973.
17. Gross F. Phys.Rev., 1969, v.186, p.144.

18. Kadyshevsky V.G., Mir-Kasimov R.M., Skachkov N.B. Nuovo Cimento, A., 1968, v.55, p.233.
19. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. "Наука", М., 1965.
20. Филиппова Л.А. Изв. АН АзССР, 1974, т.30, с.1.
21. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика, изд. 3, перераб. и дополн. "Наука", М., 1974.
22. Alliluev S.P., Gerstein S.S., Logunov A.A. Phys.Lett., 1965, v.18, p.195.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 августа 1980 года.