объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-80-526

А.В.Сидоров

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ТОМАСА-ФЕРМИ В КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОДХОДЕ

Направлено в ЯФ

1980

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе в рамках квазипотенциального подхода строится релятивистский аналог статистического метода Томаса-Ферми. При этом за основу берется релятивистское трехмерное двухчастичное* квазипотенциальное уравнение [1]:

$$(2E_q - 2E_p)\Psi_q(\vec{p}) = (2\pi)^{-3} \int \frac{d\vec{k}}{E_k} V(\vec{p},\vec{k};E_q)\Psi_q(\vec{k}),$$

$$E_k^2 - \vec{k}^2 = E^2 - \vec{p}_p^2 = m^2, \quad \hbar = c = 1. \qquad /1.1/$$

Оно было получено на основе ковариантной гамильтоновой формулировки квантовой теории поля [3] и техники ковариантного приравнивания времен двух частиц у волновой функции /ВФ/ уравнения Бете-Солпитера [4].

В уравнении /1.1/ импульсы всех частиц находятся на массовой поверхности:

$$p_0^2 - \vec{p}^2 = m^2. \qquad /1.2/$$

Для решения уравнения /1.1/ удобно перейти в нем к введенному в [5] релятивистскому конфигурационному представлению /РКП/.

Это представление вводится путем разложения ВФ относительного движения двух частиц, например, кварка и антикварка, по функциям

$$\xi(\vec{p},\vec{r}) = \left(\frac{E_p - \vec{p}\vec{r}}{m}\right)^{-1-irm}; \quad \vec{r} = r\vec{n}; \ \vec{n}^2 = 1, \qquad /1.3/$$

образующим полную систему на поверхности массового гиперболоида /1.2/ и реализующим унитарные неприводимые представления группы Лоренца [6], вместо плоских волн $\exp(i\vec{p}\vec{r})$.

В РКП уравнение /1.1/ для радиальной части ВФ с определенным значением орбитального квантового числа ℓ принимает вид конечно-разностного уравнения:

---

* О методе Томаса-Ферми, развитом на основе одночастичного уравнения Дирака, см., например, в [2].

$$[\mathrm{ch}(i\lambda \frac{d}{dr}) + \frac{\lambda^2 \ell(\ell+1)}{r(r+i\lambda)} \exp(i\lambda \frac{d}{dr}) - X(r)] R_{n\ell}(r) = 0, \qquad /1.4/$$

$$X(r) = \frac{2m + E - V(r)}{2m}, \quad \lambda = \frac{h}{mc}, \qquad /1.5/$$

$$\Psi_{n\ell m}(\vec{r}) = \frac{R_{n\ell}(r)}{r} Y_{\ell m}(\theta, \phi). \qquad /1.6/$$

В дальнейшем будем считать, что взаимодействие кварка и антикварка описывается некоторым эффективным сферически симметричным потенциалом $V(r)$ $(V(r=0)=0)$, заданным в РКП. В нерелятивистском пределе $(m \to \infty)$ $\xi(\vec{p}, \vec{r}) \to \exp(i\vec{p}\vec{r})$, так что пространство векторов $\vec{r}$ переходит в обычное координатное пространство, а уравнение /1.4/ - в уравнение Шредингера.

В следующем параграфе выведено выражение для плотности кварков в РКП, а в §3 получена оценка числа узких состояний в системах $b\bar{b}$ и $t\bar{t}$.

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ ТОМАСА-ФЕРМИ ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО КОНЕЧНОРАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть связанные состояния кварка и антикварка, составляющих мезон, заполняют энергетические уровни с энергией связи меньше некоторой фиксированной величины E_F.

Для плотности кварков в этой системе, в полной аналогии с нерелятивистским случаем [8], имеем

$$\rho(r) = \sum_{E_{n\ell m} < E_F} |\Psi_{n\ell m}(\vec{r})|^2 = \sum_{E_{n\ell m} < E_F} \frac{R^2_{n\ell}(r)}{r^2} |Y_{\ell m}(\theta, \phi)|^2 . \qquad /2.1/$$

Суммирование по азимутальному квантовому числу m снимается с помощью соотношения

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} |Y_{\ell m}(\theta, \phi)|^2 = \frac{2\ell+1}{4\pi}, \qquad /2.2/$$

что приводит к выражению

$$\rho(r) = \sum_{E_{n\ell} < E_F} \frac{R^2_{n\ell}(r)}{r^2} \frac{2\ell+1}{4\pi}. \qquad /2.3/$$

В работе [9] было предложено решать уравнение /1.4/ методом ВКБ. Воспользуемся выражением для радиальной части ВФ, полученным в квазиклассическом приближении [10]:

$$R_{n\ell}(r) = C[X^2(r) - 1 - (\lambda\Lambda/r)^2]^{-1/4} \times$$
$$\times \cos \int_{r_-}^{r} \frac{dr}{\lambda} \ln[X(r) + \sqrt{X^2(r) - 1 - (\lambda\Lambda/r)^2}], \qquad /2.4/$$

где $r_{-(+)}$ - классическая точка поворота, определяемая из условия

$$X(r_{-(+)}) = \sqrt{1 + (\lambda\Lambda/r)^2}; \; \Lambda = \ell + \frac{1}{2}. \qquad /2.5/$$

Константа C определяется из условия нормировки ВФ:

$$\int_0^\infty R_{n\ell}^2(r)\,dr = 1,$$

откуда следует

$$|C|^2 = \frac{1}{\pi} \frac{dE_{n\ell}}{dn}. \qquad /2.6/$$

Подставим /2.4/ в /2.3/ и заменим среднее значение квадрата косинуса на 1/2:

$$\rho(r) = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{E_{n\ell}<E_F} \frac{dE_{n\ell}}{dn} \frac{2\ell+1}{r^2}[X^2(r) - 1 - (\lambda\Lambda/r)^2]^{-1/2}. \qquad /2.7/$$

Перейдем при фиксированном ℓ от суммирования по n к интегрированию по X:

$$\sum_n \frac{dE_{n\ell}}{dn}[X^2(r) - 1 - (\lambda\Lambda/r)^2]^{-1/2} =$$
$$= \frac{2}{\lambda} \int_{X_-}^{X_+} dX[X^2 - 1 - (\lambda\Lambda/r)^2]^{-1/2}. \qquad /2.8/$$

Интегрирование в правой части /2.8/ производится от

$$X_- = [2m + E_F - V(r)]/2m[1 + \lambda\Lambda/r)^2]^{1/2}$$

до

$$X_+ = \sqrt{1 + (\lambda\Lambda/r)^2}.$$

При $X < X_-$ ВФ затухает экспоненциально, поэтому ее вкладом в $\rho(r)$ можно пренебречь:

$$\rho(r) = \frac{1}{(2\pi)^2\lambda} \sum_\ell \frac{2\ell+1}{r^2} \operatorname{Arch} \frac{X(r)}{\sqrt{1 + (\lambda\Lambda/r)^2}}. \qquad /2.9/$$

Воспользуемся теперь тем, что $d/d\ell[1+(\lambda\Lambda/r)^2] = 2\lambda^2\Lambda^2/r^2$, и заменим суммирование по ℓ на интегрирование:

$$\rho(r) = \frac{1}{(2\pi)^2\lambda^3}\int_1^X d[1+(\lambda\Lambda/r)^2]^{1/2}\ \mathrm{Arch}\frac{X}{[1+(\lambda\Lambda/r)^2]^{1/2}} = \qquad /2.10/$$

$$= \frac{X(r)\sqrt{X^2(r)-1} - \mathrm{Arch}\,X(r)}{(2\pi)^2\lambda^3}.$$

Этот же результат может быть получен интегрированием по объему в пространстве импульсов:

$$\rho(r) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\vec{k}}{m^{-1}\,k_0}, \quad k_0^2 - \vec{k}^2 = m^2. \qquad /2.11/$$

В выражении /2.11/ удобно перейти к гиперболическим координатам: $m\vec{n}_k \mathrm{sh}\chi = \vec{k}$, $m\,\mathrm{ch}\chi = k_0$, что дает

$$\rho(r) = \frac{m^3}{(2\pi)^2}(\mathrm{sh}\chi_F\,\mathrm{ch}\chi_F - \chi_F), \qquad /2.12/$$

где

$$\mathrm{ch}\chi_F(r) = [2m + E_F - V(r)]/2m.$$

Соотношения /2.10/ и /2.12/ позволяют вычислить полное число состояний с энергией ниже E_F:

$$N = 4\pi\int_0^{r_+}\rho(r)\,r^2 dr. \qquad /2.13/$$

Область применимости выражений /2.9/, /2.10/, /2.12/, /2,13/ совпадает с областью применимости квазиклассического подхода в уравнении /1.4/.

В нерелятивистском пределе выражения /2.9/, /2.10/, /2.12/, /2.13/ переходят в свои нерелятивистские аналоги [8].

3. ОЦЕНКА ЧИСЛА УЗКИХ СОСТОЯНИЙ КВАРКОНИЯ

Как известно, наиболее легкие связанные состояния двух тяжелых кварков $c\bar{c}$ и $b\bar{b}$, т.е. Ψ и Υ-частицы, имеют большое время жизни и малую полную ширину распада. Объясняется это тем, что для них энергетически запрещены распады с подхватом из моря пары легких кварков:

$$Q\bar{Q} \to Q\bar{q} + \bar{Q}q\,;\ Q = s, c, b, t\ldots;\ q = u, d \qquad /3.1/$$

а распад на легкие адроны подавлен по правилу Окубо-Цвейга-Иизуки. Однако для высоколежащих уровней системы $Q\bar{Q}$ распад /3.1/становится энергетически возможным. Представляет интерес оценить возможное число уровней системы двух тяжелых кварков, лежащих ниже порога реакции /3.1/.

А. Прежде чем применить результаты предыдущего раздела, произведем вычисления в рамках нерелятивистской кварковой модели, которая успешно применяется для описания свойств связанных состояний двух тяжелых кварков[11].В этой модели масса мезона определяется как

$$M_{Q\bar{Q}} = 2m_Q + E^{\text{св.}}_{QQ} , \qquad /3.2/$$

где $E^{\text{св.}}_{Q\bar{Q}}$ - энергия связи, определяемая из уравнения Шредингера. Порог реакции /3.1/ задается условием $M_{Q\bar{Q}} < 2M_{Q\bar{q}}$ или $E^{\text{пор.}}_{Q\bar{Q}} = 2m_q + 2E^{\text{св.}}_{Q\bar{q}}$, где $E^{\text{св.}}_{Q\bar{q}}$ - энергия связи основного уровня в системе $Q\bar{q}$.Пороговое значение энергии связи $E^{\text{пор.}}_{Q\bar{Q}}$ зависит от приведенной массы системы $Q\bar{q}$, а следовательно, определяется массой легкого кварка m_q и не зависит от массы тяжелого кварка[12].Однако нерелятивистское описание системы $Q\bar{q}$ не обосновано, т.к.

$$m_Q m_q/(m_Q+m_q) \sim m_q - E^{\text{св.}}_{Q\bar{q}} .$$

В работе[12] на основе условия квантования Борна-Зоммерфельда было определено число s-состояний ($\ell = 0$),лежащих ниже порога

$$n^{\ell=0}_{Q\bar{Q}} = \frac{1}{4} + c\sqrt{m_Q} . \qquad /3.3/$$

Существует два узких s-состояния в семействе Ψ-частиц, т.е. $n^{\ell=0}_{c\bar{c}} = 2$. Это позволяет зафиксировать константу C и получить для Υ-частиц оценку $n^{\ell=0}_{b\bar{b}} = 3$[12], что и подтверждено экспериментально.

Оценим теперь полное число уровней системы $Q\bar{Q}$, лежащих ниже порога. Имеем

$$N_{Q\bar{Q}} = 4\pi \int_0^R \rho_{Q\bar{Q}}(r) r^2 dr , \qquad /3.4/$$

где $\rho_{Q\bar{Q}}(r)$ - плотность кварков в потенциальной яме ,при условии, что заполнены все энергетические уровни вплоть до $E^{\text{пор}}_{Q\bar{Q}}$. В приближении Томаса-Ферми для плотности $\rho_{Q\bar{Q}}(r)$ имеем

$$\rho_{Q\bar{Q}}(r) = \int_{|\vec{k}| < k_{\text{пор.}}} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} = \frac{k^3_{\text{пор.}}(r)}{6\pi^2} , \qquad /3.5/$$

где

$$k^2_{пор}(r)/2\mu = E^{пор.}_{Q\bar{Q}} - V(r), \quad \mu_Q = m\ /2.$$

Подставляя /3.5/ в /3.4/ и определяя R из условия $E^{пор}_{Q\bar{Q}} - V(R) = 0$, получаем

$$N_{Q\bar{Q}} = A m_Q^{3/2}. \qquad /3.6/$$

В системе $c\bar{c}$ ниже порога лежат 5 уровней: два s-уровня 1s и 2s и трехкратно вырожденный p-уровень. Таким образом, $N_{c\bar{c}} = 5$ и согласно /3.6/ для $s\bar{s}$-, $b\bar{b}$- и $t\bar{t}$-систем в предположении, что $E^{пор}_{Q\bar{Q}}$ и $V(r)$ не зависят от вида кварков, имеем

$$N_{Q\bar{Q}} = 5(m_Q/m_c)^{3/2}. \qquad /3.7/$$

В табл.1 представлены предсказания для $N_{Q\bar{Q}}$ в предположении, что m_s = 0,5 ГэВ, m_c = 1,37 ГэВ/11/, m_b = 4,79 ГэВ/11/, m_t = 20 ГэВ/13/.

Таблица 1

Оценка числа узких состояний в системе $Q\bar{Q}$ в нерелятивистском случае

$Q\bar{Q}$	m_Q /ГэВ/	$N_{Q\bar{Q}}$	$n^{\ell}_{Q\bar{Q}}$			
			$\ell = 0$ /11/	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$
$s\bar{s}$	0,5	1	1,3			
$c\bar{c}$	1,37 /10/	5	2	1		
$b\bar{b}$	4,79 /10/	33	3,5	2,1	2	1
$t\bar{t}$	20 /12/	280	6,9	4,5	4,9	3,3

Соотношение /3.3/ может быть обобщено на случай произвольного фиксированного значения числа ℓ. Для этого воспользуемся модифицированным квазиклассическим условием квантования:

$$\int_0^R dr \sqrt{m_Q [E^{пор.}_{Q\bar{Q}} - V(r)]} = \pi\left(n + \frac{\ell}{2} - \frac{1}{4}\right), \qquad /3.8/$$

получаем

$$n^{\ell}_{Q\bar{Q}} = \frac{1}{4} - \frac{\ell}{2} + B\sqrt{m_Q}\,. \qquad /3.9/$$

В системе $c\bar{c}$ ниже порога лежит лишь один p уровень. Условие $n^1_{c\bar{c}} = 1$ позволяет зафиксировать константу B и получить $n^1_{b\bar{b}} = 2$, $n^1_{t\bar{t}} = 4{,}5$.

До сих пор мы конкретизировали вид потенциала $V(r)$. Однако порядок расположения уровней в спектре зависит от вида потенциала. *Полагая, что* $V(r) \sim r$, *делаем заключение, что ниже порога лежат следующие уровни системы* $b\bar{b}$:

$$1s,\ 1p,\ 2s,\ 1D,\ 2p,\ 1F,\ 3s,\ 2D, \qquad /3.10/$$

которые вместе составляют 26 состояний. Остальные 7 состояний принадлежат уровню 1G, который, таким образом, имеет энергию, близкую к пороговой. В табл.1 приведены значения $n^{\ell}_{Q\bar{Q}}$. В случае $\ell = 2$ и $\ell = 3$ мы воспользовались результатом /3.10/, согласно которому $n^2_{b\bar{b}} = 2$, $n^3_{b\bar{b}} = 1$.

Б. Переходя к оценкам в рамках релятивистского подхода, предположим, что потенциал $V(r)$ является линейным: $V(r) = \sigma r$, а коэффициент σ не зависит от вида кварков.

Квазиклассическое условие квантования в РКП получено в работе [10]:

$$I(\chi_n) = \chi_n \operatorname{ch}\chi_n - \operatorname{sh}\chi_n = \frac{\sigma}{2m_Q^2}\pi\left(n + \frac{\ell}{2} - \frac{1}{4}\right). \qquad /3.11/$$

Отсюда находим число состояний $n^{\ell}_{Q\bar{Q}}$:

$$n^{\ell}_{Q\bar{Q}} = \frac{1}{4} - \frac{\ell}{2} + \frac{2m_Q^2}{\pi\sigma} I(\chi_Q^{пор}), \qquad /3.12/$$

где

$$\operatorname{ch}\chi_Q^{пор} = \frac{2m_Q + E_Q^{пор}}{2m_Q}.$$

Согласно [14], выберем следующие значения масс кварков: $m_c = 1{,}21$ ГэВ, $m_b = 4{,}46$ ГэВ, а в качестве массы t-кварка выберем минимальное из приведенных в [13] значений: $m_t = 20$ ГэВ. Предположим также, что для всех тяжелых кварков

$$E^{пор}_{Q\bar{Q}} = 2m_D - 2m_c = 1{,}86. \qquad /3.13/$$

Результаты оценок по формуле /3.12/ представлены в табл.2.

Таблица 2

Оценка числа узких состояний в системе $Q\bar{Q}$ в рамках релятивистского подхода $V(r) = \sigma r$, $E^{пор.}_{Q\bar{Q}} = 1,31$

$Q\bar{Q}$	m_Q /ГэВ/	$N_{Q\bar{Q}}$	$n^{\ell}_{Q\bar{Q}}$			
			$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$
$c\bar{c}$	1,21	5	2	1	-	-
$b\bar{b}$	4,46	35	3,6	2,2	2	1
$t\bar{t}$	20	330	7,5	5,0	5,0	3,5

Полное число узких состояний оценим с помощью формулы /2.13/. В случае линейного потенциала интеграл в правой части /2.13/ легко вычисляется:

$$N_{Q\bar{Q}} = \frac{m_Q^6}{\pi^4 \sigma^3} J(\chi_Q^{пор}), \qquad /3.14/$$

$$J(\chi) = \frac{sh^5\chi}{30} + \frac{19}{36} sh^3\chi + \frac{7}{12} sh\chi - \frac{\chi}{4} ch\chi - \frac{\chi}{3} ch^3\chi . \qquad /3.15/$$

Фиксируя σ из условия $N_{c\bar{c}} = 5$, получаем $N_{b\bar{b}} = 35$ и $N_{t\bar{t}} = 330$ /см. табл.2/.

Данные таблиц 1 и 2 свидетельствуют о том, что число узких состояний в релятивистском случае несколько больше, чем в нерелятивистском.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В нерелятивистском приближении Томаса-Ферми удается получить дифференциальное уравнение для потенциала

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r V(r) = a V(r)^{3/2} .$$

При этом используется уравнение Пуассона: $\nabla^2 V(r) = 4\pi\rho(r)$.
Мы надеемся в дальнейшем найти аналог уравнения Пуассона в РКП. Это позволит, используя результаты §2, вывести уравнение, которому удовлетворяет потенциал $V(r)$ в РКП.

Автор признателен В.Г.Кадышевскому, С.П.Кулешову и Н.Б.Скачкову за обсуждения и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cim., 1963, 29, p.380.

2. Мигдал А.Б. Фемироны и бозоны в сильных полях. "Наука", М., 1978.
3. Kadyshevsky V.G. Nucl.Phys., 1968, B6, p.125.
4. Faustov R.N. Ann.Phys., 1973, 78, p.176.
5. Kadyshevsky V.G., Mir-Kasimov R.M., Skachkov N.B. Nuovo Cim., 1968, 55A, p.233; ЭЧАЯ, 1972, 2, №3, с.635.
6. Шапиро И.С. ДАН СССР, 1956, 106, с.647.
7. Freeman M., Mateev M.D., Mir-Kasimov R.M. Nucl.Phys., 1969, B12, p.197.
8. Мигдал А.Б. Качественные методы в квантовой теории. "Наука", М., 1975.
9. Донков А.Д. и др. В кн.: Взаимодействие адронов при высоких энергиях. Материалы Межд.конф., Баку, 24-7 апреля 1972 г./; Изд-во Ин-та физики АН АзССР, Баку, 1972, с.5; В кн.: Труды IV Международного симпозиума по нелокальным теориям поля, Алушта, 1976. ОИЯИ, Д2-9788, Дубна, 1976.
10. Скачков Н.Б., Соловцов И.Л. ЯФ, 1980, т.31, с.1332.
11. Quigg C., Rosner J.L. FERMILAB-PUB-79/22-THY, Batavia, 1979.
12. Quigg C., Rosner J.L. Phys.Lett., 1978, 72B, p.462.
13. Krammer M., Krasemann H., Ono S. DESY 80/25, 1980.
14. Сидоров А.В., Скачков Н.Б. ОИЯИ, Р2-80-45, Дубна, 1980.

Рукопись поступила в издательский отдел 25 июля 1980 года.