сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-80-505

С.И.Златев, В.А.Матвеев, Г.А.Чёчелашвили

КОМПЕНСАЦИЯ НУЛЕВЫХ МОД И КОЛЛЕКТИВНЫЕ КООРДИНАТЫ В ЗАДАЧЕ О КВАНТОВЫХ ПОПРАВКАХ К МАССЕ СОЛИТОНА

1980

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение моделей элементарных частиц на основе нелинейных уравнений поля, допускающих нетривиальные /солитонные, инстантонные и другие/ классические решения, потребовало разработки последовательной схемы квантования подобных решений. Этой проблеме в последние годы было посвящено много работ.

Известно, что как стандартная теория возмущений, так и непосредственное применение методов континуального интегрирования приводят здесь к бессмысленным выражениям ввиду появления инфракрасных расходимостей, обусловленных симметрией задачи, порождаемой некоторой группой непрерывных преобразований /например, группой трансляций или лоренцевых вращений/. Возникшая проблема получила название проблемы нулевых мод.

Как было показано в работе /4/ на примере однопетлевого и двухпетлевого приближений в двумерной теории нелинейного скалярного поля, сингулярности, связанные с решениями нулевых мод, в точности сокращаются, и обычная диаграммная техника с подходящим образом определенной функцией Грина применима при нахождении квантовых поправок к односолитонным решениям.

Этот результат был обобщен в работе /5/ на случай произвольных порядков петлевого разложения. Следует подчеркнуть, что необходимым условием справедливости результатов работ /4,5/ является квадратичная неинтегрируемость решений нулевой моды /соответствующие состояния принадлежат непрерывному спектру/.

Другой путь преодоления обсуждаемых здесь трудностей опирается на использование метода коллективных координат, введенных Боголюбовым и Тябликовым в 1949 году при формулировке квантовой теории полярона /6/ и получивших дальнейшее обобщение в работах по проблеме сильной связи в квантовой теории поля /7/. В этом подходе параметрам непрерывной группы преобразований симметрии сопоставляются динамические переменные /коллективные координаты/, причем канонически сопряженные им импульсы являются интегралами движения. Накладываемые на теорию связи, устраняющие излишние степени свободы, они автоматически исключают появление нулевых мод.

Развиваемая на этой основе модифицированная диаграммная техника отличается от традиционной как выбором функции Грина, так и наличием целого ряда новых вершин. Последнее обстоятельство делает сравнение результатов метода коллективных координат с вычислениями в рамках стандартной теории возмущений с учетом упомянутого выше явления компенсации сингулярностей нулевой моды весьма непростой задачей.

Как было показано нами ранее, при нахождении поправок к классическим солитонным решениям можно использовать определенным образом модифицированный континуальный интеграл, учитывающий явным образом наличие непрерывной симметрии. Развитая на этой основе диаграммная техника позволяет доказать точную компенсацию вкладов нулевых мод в произвольных порядках петлевого разложения.

В настоящей работе,на основе метода континуального интегрирования, детально обсуждается перенормировка в двумерной скалярной теории и компенсация нулевых мод для двухпетлевой поправки к массе солитона. Показывается, что полученное конечное выражение в точности совпадает с найденным в работе /8/ на основе метода коллективных координат.

2. КВАНТОВЫЕ ПОПРАВКИ К МАССЕ СОЛИТОНА

Рассмотрим двумерную модель скалярного самодействующего поля $\phi(t,x)$ с функционалом действия

$$S[\phi] = \int dt \int dx [\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - U(\phi)]. \qquad /2.1/$$

Предполагается, что действие обладает нетривиальной экстремалью $\phi = \phi_{кл}(t,x)$, т.е.

$$\frac{\delta S}{\delta \phi}[\phi_{кл}] = -\Box\phi_{кл} - \frac{\partial U}{\partial \phi}(\phi_{кл}) = 0. \qquad /2.2/$$

В дальнейшем для конкретности будем считать, что классическое уравнение /2.2/ допускает солитонное решение типа ($\hbar = c = 1$)

$$\phi_{кл}(t,x) = \Phi(r - r_0), \quad r = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}, \quad |v| < 1, \qquad /2.3/$$

где $\Phi(r)$ при $|r| \to \infty$ достаточно быстро стремится к своим асимптотическим значениям

$$\Phi(r) \to \Phi^{\pm}, \quad r \to \pm\infty. \qquad /2.4/$$

Соответствующее данному решению действие, как известно, линейно расходится

$$S[\phi_{кл}] = -M_0 \int d\tau; \qquad \tau = \frac{t - vx}{\sqrt{1-v^2}}. \qquad /2.5/$$

определяя классическое значение массы солитона

$$M_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dr\,[\Phi'(r)]^2 \quad . \qquad /2.6/$$

В квантовой теории масса солитона определяется как разность между энергией статического солитона и энергией вакуума

$$M = E_c - E_0 \quad . \qquad /2.7/$$

Как было показано в работе /9/, возникающие при нахождении квантовых поправок в односолитонном секторе ультрафиолетовые расходимости могут быть устранены теми же контрчленами, что и в вакуумном секторе.

Известно, что в вакуумном секторе ультрафиолетовые расходимости могут быть устранены нормальным упорядочением лагранжиана. С другой стороны, метод континуального интегрирования соответствует вейлевскому /т.е. симметричному относительно положительно- и отрицательно-частотных частей операторов поля/ упорядочению лагранжиана. Поэтому для устранения ультрафиолетовых расходимостей в континуальном интеграле необходимо привести нормально упорядоченный лагранжиан к вейлевской форме. Это делается с помощью следующей общей формулы:

$$L(\phi) \to L_R(\phi) = :L(\phi):=$$

$$= \exp\{\frac{i}{2}\int d^2x\, d^2y\, D^{(-)}(x-y)\frac{\delta^2}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}\}L(\phi), \qquad /2.8/$$

где $D^{(-)}(x-y) = \frac{i}{2\pi}\int d^2p e^{ip(x-y)}\theta(-p_0)\delta(p^2-m^2)$ -отрицательно-частотная часть перестановочной функции Паули-Йордана. Вследствие локальности лагранжиана эту формулу можно переписать в виде

$$L_R(\phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2$$

$$- \exp\{-\frac{\gamma}{2}\frac{d^2}{d\phi^2}\}[U(\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2], \qquad /2.9/$$

где

$$\gamma = -iD^{(-)}(0) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\Lambda}^{\Lambda}\frac{dp}{\sqrt{p^2+m^2}} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\Lambda}{m}.$$

Λ - ультрафиолетовое обрезание.

Введем в лагранжиан параметр петлевого разложения стандартным образом

$$L(\phi)\to L^{a}(\phi)=\frac{1}{a^2}L(a\phi). \qquad /2.10/$$

В вакуумном секторе имеем

$$L_R^{a}(\phi)=-\frac{1}{2}\phi(\Box+m^2)\phi-\exp\{-\frac{\gamma}{2}\frac{d^2}{d\phi^2}\}\frac{1}{a^2}\Gamma_0(a\phi),$$

$$/2.11/$$

$$\Gamma_0(\phi)=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}V_n\phi^n=U(\phi)-\frac{m^2}{2}\phi^2 .$$

В односолитонном секторе следует учесть, что после замены /2.10/ статическим односолитонным решением уравнения движения является функция $\frac{1}{a}\Phi(x-a)$. Подставив ϕ в виде

$$\phi(t,x)=\frac{1}{a}\Phi(x-a)+g(t,x),$$

имеем

$$L_R^{a}(g)=\frac{1}{a^2}L(\Phi)-\frac{1}{2}gHg+\frac{\gamma}{2}[U''(\Phi)-m^2]$$

$$/2.12/$$

$$-\exp\{-\frac{\gamma}{2}\frac{d^2}{dg^2}\}\frac{1}{a^2}\Gamma(ag),$$

где

$$H=\partial_t^2+\hat{h},\quad \hat{h}=-\partial_x^2+U''[\Phi(x-a)],$$

$$\Gamma(g)=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}U_n(x)g^n(t,x)=$$

$$/2.13/$$

$$=U(\phi)-U[\Phi(x-a)]-U'[\Phi(x-a)]g(t,x)-\frac{1}{2}U''[\Phi(x-a)]g^2(t,x),$$

$$U_n(x)=\frac{d^n}{d\phi^n}U(\phi)|_{\phi=\Phi(x-a)} .$$

При нахождении квантовых поправок к массе солитона будем исходить, следуя работе /8/, из континуальных интегралов с периодическими по времени /с периодом T / граничными условиями, определяющих энергию основного состояния в односолитонном и вакуумном секторах

$$E_c = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{iT} \ln \int Dg \exp\{-i \int_{-T/2}^{T/2} dt \int dx\, L_R^a(g)\} \times$$

$$\times \delta(\int \psi_0\, g\, dt\, dx)(1 + \frac{a}{T\sqrt{M_0}} \int \psi_0'\, g\, dt\, dx), \qquad /2.14/$$

$$E_0 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{iT} \ln \int D\phi \exp\{-i \int_{-T/2}^{T/2} dt \int dx\, L_R^a(\phi)\}, \qquad /2.15/$$

где

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{M_0}} \psi_a(x) = \frac{1}{\sqrt{M_0}} \partial_a \Phi(x-a) \qquad /2.16/$$

нормированная функция нулевой моды:

$$\int \psi_0^2 dx = 1. \qquad /2.17/$$

Первая квантовая поправка дается формулой

$$\Delta M_c^{(1)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{iT} \ln \frac{\int Dg \exp\{\frac{1}{2} \int g H g\, d^2x\} \delta(\int g \psi_0 d^2x)}{\int D\phi \exp\{\frac{1}{2} \int \phi(\Box + m^2)\phi\, d^2x\}} \qquad /2.18/$$

$$-\frac{\gamma}{2} \int dx [U''(\Phi) - m^2]$$

и сводится к вычислению детерминанта

$$\Delta M_c^{(1)} = \lim \frac{1}{2iT} \ln \mathrm{Det}\left(\frac{\Box + m^2}{\Box + U''(\Phi)}\right) - \frac{\gamma}{2} \int dx\, V(x) \qquad /2.19/$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{-1}{2iT} \mathrm{Sp} \ln(1 + D_c V) - \frac{\gamma}{2} \int dx\, V(x),$$

где $V(x) = U''(\Phi(x)) - m^2$ и D_c - причинная функция Грина скалярного поля, удовлетворяющая уравнению

$$(\Box + m^2)\, D_c(t, x) = \delta(t)\delta(x). \qquad /2.20/$$

Последующие квантовые поправки определяются перенормированной диаграммной техникой, заданной операторными выражениями

$$\exp\{\frac{i}{2}\int\{(G + c\psi_0\cdot\psi_0)\frac{\delta^2}{\delta g\delta g}\}e^{i\Gamma_R^a[g]}\quad(1 + \frac{a}{T\sqrt{M_0}}\int g\psi_0' d^2x)\Big|_{g=0} \qquad /2.21/$$

в солитонном секторе и

$$\exp\{\frac{i}{2}\int D_c\frac{\delta^2}{\delta\phi\,\delta\phi}\}e^{i\Gamma_R^a[\phi]}\Big|_{\phi=0} \qquad /2.22/$$

в вакуумном секторе. Здесь

$$\Gamma_R^a[g] = \int \exp\{-\frac{\gamma}{2}\frac{d^2}{dg^2}\}\frac{1}{a^2}\Gamma(ag)\,dt\,dx \qquad /2.23/$$

и

$$\Gamma_R^a[\phi] = \int \exp\{-\frac{\gamma}{2}\frac{d^2}{d\phi^2}\}\frac{1}{a^2}\Gamma_0(a\phi)\,dt\,dx. \qquad /2.24/$$

Функция Грина G в формуле /2.21/ удовлетворяет условию $\int G(t,x,t',x')\psi_a(x')dx'dt' = 0$ и уравнению

$$HG(t,x,t',x') = \delta(t-t')\delta(x-x') - \frac{1}{T}\psi_0(x)\psi_0(x') \qquad /2.25/$$

с периодическим по времени граничным условием

$$G(t+T, x, t', x') = G(t, x, t', x'). \qquad /2.26/$$

Такую функцию нетрудно построить[3], если известны собственные функции и собственные значения оператора $\hat{h}$

$$\hat{h}\psi_n = \omega_n^2\psi_n, \qquad \omega_0 = 0.$$

Действительно, имеем:

$$G(t,x,t',x') = -\frac{1}{T}\sum_{(n,m)\neq 0}\frac{e^{i\nu_m(t-t')}}{\nu_m^2 - \omega_n^2 + i\epsilon}\psi_n(x)\psi_n^*(x'), \qquad /2.27/$$

$$\nu_m = \frac{2\pi m}{T}.$$

Сумму /2.27/, в которой отсутствует сингулярный член $(n, m)=0$, удобно представить в виде двух слагаемых $G = G_0 + G_K$

$$G_0(t, x, t', x') = -\frac{1}{T} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{\nu_m^2} e^{i\nu_m(t-t')} \psi_0(x) \psi_0(x'), \qquad /2.28/$$

$$G_K(t, x, t', x') = -\sum_{n \neq 0} \sum_m \frac{e^{i\nu_m(t-t')}}{\nu_m^2 - \omega_n^2 + i\epsilon} \psi_n(x) \psi_n^*(x'). \qquad /2.29/$$

В формулах /2.28/, /2.29/ суммирование по индексу можно провести при помощи следующих равенств:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cos mz = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\pi |z| + \frac{1}{4} z^2, \qquad /2.30/$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imz}}{m^2 - \omega^2 + i\epsilon} = -\frac{\pi}{\tilde{\omega}} \frac{\cos\tilde{\omega}(\pi - |z|)}{\sin \pi\tilde{\omega}}, \qquad /2.31/$$

$$\tilde{\omega} = |\omega| - i\epsilon, \quad -2\pi \leq z \leq 2\pi.$$

Получим

$$G_0(t, x, t', x') = \left[-\frac{T}{12} + \frac{1}{2}|t-t'| - \frac{1}{2T}(t-t')^2\right] \psi_0(x) \psi_0(x'), \qquad /2.32/$$

$$G_K(t, x, t', x') = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{2\tilde{\omega}_n} \frac{\cos \tilde{\omega}_n\left(\frac{T}{2} - |t-t'|\right)}{\sin \tilde{\omega}_n \frac{T}{2}} \psi_n(x) \psi_n^*(x'). \qquad /2.33/$$

Отметим, что в пределе $T \to \infty$ функция G_K переходит в функцию Грина метода коллективных координат

$$G_K \to \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{\omega_n} e^{-i\tilde{\omega}_n |t-t'|} \psi_n(x) \psi_n^*(x'). \qquad /2.34/$$

Вторая квантовая поправка к энергии солитона дается выражением

$$\Delta E_c^{(2)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{iT} W_2,$$

где W_2 - член, пропорциональный α^2 в выражении /2.21/

$W_2 =$

$$(a)\quad -\frac{i}{8}\int dt\, dx\, U_4(x)\, G^2(t,x,t,x) - \frac{\gamma}{4}\int dt\, dx\, U_4(x)\, G(t,x,t,x)$$

$$+\frac{i\gamma^2}{8}\int dt\, dx U_4(x)$$

$$(b)\quad +\frac{i}{8}\int dt_1 dx_1 dt_2 dx_2 G(t_1,x_1,t_1,x_1) U_3(x_1) G(t_1,x_1,t_2,x_2) U_3(x_2) G(t_2,x_2,t_2,x_2)$$

$$+\frac{\gamma}{4}\int dt_1 dx_1 dt_2\, dx_2 G(t_1,x_1,t_1,x_1) U_3(x_1) G(t_1,x_1,t_2,x_2) U_3(x_2)$$

/2.35/

$$-\frac{i}{8}\gamma^2\int dt_1 dx_1 dt_2 dx_2 U_3(x_1) G(t_1,x_1,t_2,x_2) U_3(x_2)$$

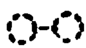
$$(c)\quad +\frac{i}{12}\int dt_1 dx_1 dt_2 dx_2 U_3(x_1) G^3(t_1,x_1,t_2,x_2) U_3(x_2)$$

$$(d)\quad -\frac{i}{2T\sqrt{M_0}}\int dt_1 dx_1 dt_2 dx_2 \psi_0'(x_1) G(t_1,x_1,t_2,x_2) U_3(x_2) G(t_2,x_2,t_2,x_2)$$

$$-\frac{\gamma}{2T\sqrt{M_0}}\int dt_1\, dx_1 dt_2 dx_2 \psi_0'(x_1) G(t_1,x_1,t_2,x_2)\, U_3(x_2).$$

Соответствующие диаграммы имеют вид:

(a) $-\frac{i}{8}$  $-\frac{i}{4}$  $-\frac{i}{8}$  $= -\frac{i}{8}$ 

(b) $\frac{i}{8}$  $+\frac{i}{4}$  $+\frac{i}{8}$  $= \frac{i}{8}$ 

(c) $\frac{i}{12}$ 

(d) $-\frac{i}{2}$  $-\frac{i}{2}$  $= -\frac{i}{2}$ 

При этом выбраны следующие правила соответствия:

G	———	U_3	
$-i\gamma$	- - - - -	U_4	$\times$
$G-i\gamma$	━━━	$\frac{1}{T\sqrt{M_0}}\psi'_0$	

Как показано в приложении, вклады от нулевых мод в функции Грина, имеющих вид $c\psi_0\cdot\psi_0$, сокращаются в W_2. Поэтому в формуле /2.21/ произвольный коэффициент можно для удобства выбрать равным $T/12$ и работать с функцией Грина

$$G' = G'_0 + G_K\,,$$

$$G'_0(t,x,t',x') = F(t-t')\,\psi_0(x)\,\psi_0(x') = \qquad /2.36/$$

$$=\left[\frac{1}{2}|t-t'| - \frac{1}{2T}(t-t')^2\right]\psi_0(x)\,\psi_0(x')\,.$$

Учитывая, что $F(0)=0$, а также

$$\int U_3(x)\,\psi_0^3(x)\,dx = 0, \qquad \int U_3(x)\,\psi_0(x)\,\psi_n(x)\,\psi_n^*(x)\,dx = 0,$$

находим, что G'_0 не дает вклада в диаграммы (a), (b), (d).

Вычислим вклад от G'_0 в диаграмму (c), обозначив его через $C_0 = C_0^1 + C_0^2$

$$C_0^1 = -\frac{i}{4}\int dt_1dx_1dt_2dx_2\,\psi_0(x_1)\,U_3(x_1)\,F(t_1-t_2)\,G_K^2(t_1,x_1,t_2,x_2)\,U_3(x_2)\,\psi_0(x_2)$$

/2.37/

$$C_0^2 = \frac{i}{4}\int dt_1dx_1dt_2dx_2\,\psi_0^2(x_1)\,U_3(x_1)\,F^2(t_1-t_2)\,G_K(t_1,x_1,t_2,x_2)\,U_3(x_2)\,\psi_0^2(x_2)\,.$$

Применив равенства

$$\sqrt{M_0}\int U_3(x)\psi_0(x)\,\psi_k(x)\,\psi_n^*(x)\,dx = (\omega_n^2-\omega_k^2)\int \psi_n^*(x)\,\psi'_k(x)\,dx, \qquad /2.38/$$

$$\sqrt{M_0}\int U_3(x)\,\psi_0^2(x)\,\psi_n(x)\,dx = \omega_n^2\int \psi'_0(x)\,\psi_n(x)\,dx, \qquad /2.39/$$

получим

$$C_0^1 = -\frac{i}{16M_0}\sum_{k,n\neq 0}\frac{(\omega_n^2-\omega_k^2)\,|(\psi_n,\psi_k')|^2}{\omega_n\omega_k\sin(\tilde\omega_n\frac{T}{2})\sin(\tilde\omega_k\frac{T}{2})}\int dt_1 dt_2 F(t_1-t_2)\times \qquad /2.40/$$

$$\times\cos\tilde\omega_n\left(\frac{T}{2}-|t_1-t_2|\right)\cos\tilde\omega_k\left(\frac{T}{2}-|t_1-t_2|\right),$$

$$C_0^2 = \frac{i}{8M_0}\sum_{n\neq 0}\omega_n^3\frac{|(\psi_n,\psi_0')|^2}{\sin(\tilde\omega_n\frac{T}{2})}\int dt_1\,dt_2F^2(t_1-t_2)\cos\tilde\omega_n\left(\frac{T}{2}-|t_1-t_2|\right). \qquad /2.41/$$

Интегралы по t_1 и t_2 легко берутся. В пределе $T\to\infty$, как и следовало ожидать, нет членов, возрастающих быстрее, чем T /такие члены могли бы возникнуть только в несвязанных диаграммах/.

$$C_0^1 \underset{T\to\infty}{=} \frac{iT}{8M_0}\sum_{k,n\neq 0}\left(\frac{\omega_k}{\omega_n}-1\right)|(\psi_n,\psi_k')|^2, \qquad /2.42/$$

$$C_0^2 \underset{T\to\infty}{=} -\frac{iT}{8M_0}\int\psi_0'\psi_0'\,dx. \qquad /2.43/$$

В итоге для второй квантовой поправки к энергии солитона получим

$$\Delta E_c^{(2)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{iT}(a_K+b_K+c_K+c_0), \qquad /2.44/$$

где a_K, b_K, c_K - вклады соответствующих диаграмм, вычисленные с функцией Грина G_K.

Диаграммы (d) не содержат членов, растущих при $T\to\infty$, и поэтому не вносят вклада в энергию солитона.

В вакуумном секторе, как нетрудно заметить, все члены, кроме члена $-\frac{i}{12}V_3\int D_c^3$ в порядке α^2 сокращаются перенормировкой. Если $V_3=0$, то в этом порядке поправка к энергии вакуума также равна нулю.

3. СРАВНЕНИЕ С РЕЗУЛЬТАТОМ МЕТОДА КОЛЛЕКТИВНЫХ КООРДИНАТ

В работе вычислена вторая квантовая поправка к массе солитона в модели Sine-Gordon методом коллективных координат.

Покажем, что, несмотря на отличие использованной в этой работе диаграммной техники от техники, развитой нами, результаты вычислений в обоих подходах совпадают для второй квантовой поправки к массе солитона.

В модели Sine-Gordon потенциал $U(\phi)=1-\cos\phi$. Решение уравнения движения $\Phi(x)=4\,\mathrm{arctg}\, e^{x}$. В работе /8/ детально приведены формулы для ортонормированной системы собственных функций оператора $\hat{h}-\psi_n(x)$, а также для перехода от суммирования по дискретному индексу n к интегрированию по непрерывному параметру k при $L\to\infty$. Здесь L - объем пространственного интегрирования, на котором определяются функции $\psi_n(x)$. Следуя этим формулам, нетрудно получить для функций $G_K(t,x,t',x')$ и $G_K(t,x,t,x)-i\gamma$ следующие выражения:

$$G_K(t,x,t',x')\xrightarrow[L\to\infty]{}\int\frac{dk}{2\pi\omega_k}\frac{\cos\tilde{\omega}_k\left(\frac{T}{2}-|t-t'|\right)}{\sin\tilde{\omega}_k\frac{T}{2}}\rho_k(x)\rho_k^*(x') \qquad /3.1/$$

$$G(t,x,t,x)-i\gamma\xrightarrow[L\to\infty]{}-\frac{i}{2}\int\frac{dk}{2\pi\omega_k}g_k(x),\qquad \omega_k=\sqrt{1+k^2}, \qquad /3.2/$$

где $\rho_k(x)$ - нормированные на $2\pi\delta(k-k')$ собственные функции оператора $\hat{h}$, принадлежащие непрерывному спектру и

$$g_k(x)=1-|\rho_k(x)|^2. \qquad /3.3/$$

Для членов a_K получим:

$$a_K=-\frac{i}{8}\int dt\,dx\,U_4(x)[G(t,x,t,x)-i\gamma]^2=\frac{iT}{32}\int dx\int\frac{dk\,dk'}{(2\pi)^2\,\omega_k\omega_{k'}}U_4(x)g_k(x)g_{k'}(x). \qquad /3.4/$$

Если теперь учтем, что $U_4(x)=-\cos\Phi(x)=-\left(1-\frac{2}{\mathrm{ch}^2 x}\right)$, то найдем, что вместе с членом c вклад от диаграммы d_k в массу солитона соответствует сумме членов, обозначенных в /8/ через c_1

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{iT}(a_K+C_0^2)\Rightarrow c_1. \qquad /3.5/$$

Аналогично

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{iT}b_K=$$

$$/3.6/$$

$$=\frac{1}{8T}\int dt_1dx_1dt_2dx_2\,[G_K(t_1,x_1,t_1,x_1)-i\gamma]U_3(x_1)G(t_1,x_1,t_2,x_2)U_3(x_2)\times$$

$$\times[G_K(t_2,x_2,t_2,x_2)-i\gamma]=$$

$$= -\frac{1}{32}\int \frac{dk_1 dk_2 dk_3}{(2\pi)^3 \omega_{k_1}\omega_{k_2}\omega_{k_3}^2}\int dx_1 \sin\Phi(x_1)\,\rho_{k_3}(x_1) g_{k_1}(x_1)\times$$

$$\times \int dx_2 \sin\Phi(x_2)\,\rho_{k_3}(x_2)\, g_{k_2}(x_2) \Rightarrow c_2$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{iT} C_K = -\frac{1}{48}\int \frac{dk_1 dk_2 dk_3 \left|\int dx \sin\Phi(x)\rho_{k_1}(x)\rho_{k_2}(x)\rho_{k_3}(x)\right|^2}{(2\pi)^3 \omega_{k_1}\omega_{k_2}\omega_{k_3}(\omega_{k_1}+\omega_{k_2}+\omega_{k_3})}$$

$$\Rightarrow c_3 \qquad /3.7/$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{iT} C_0^1 = \frac{1}{8}\int \frac{dk\,dk'}{(2\pi)^2}\left(\frac{\omega_k}{\omega_{k'}} - 1\right)\left|(\rho_k, \rho'_{k'})\right|^2 \Rightarrow c_4 . \qquad /3.8/$$

Вклад в энергию вакуума в порядке α^2 отсутствует, так как $V_3 = 0$.

Авторы глубоко благодарны Н.Н.Боголюбову, А.Н.Тавхелидзе, Н.В.Красникову, Ш.И.Вашакидзе и Г.П.Джорджадзе за интерес к работе и полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Проиллюстрируем взаимное сокращение вкладов от нулевых мод на примере двухпетлевого приближения. Подставим в выражение для W_2 функцию Грина $G + c\,\psi_a \cdot \psi_a$. G определена в /2.27/. Разобьем W_2 на члены, содержащие разные степени γ

$$W_2 = A + \gamma B + \gamma^2 D .$$

Рассмотрим сначала неперенормированную часть

$$A_c = A_0 + cA_1 + c^2 A_2 + c^3 A_3 ,$$

$$A_3 \sim \left(\int dt\, dx\, U_3(x)\, \psi_a^3(x)\right)^2 = 0,$$

$$A_2 \sim \int dt\, dx\, U_4(x)\, \psi_a^4(x)$$

$$-3\int dt_1 dx_1 dt_2 dx_2\, \psi_a^2(x_1) U_3(x_1)\, G(t_1, x_1, t_2, x_2) U_3(x_2)\, \psi_a^2(x_2) .$$

Приняв во внимание, что $\partial_a \psi_a(x) = -\int dt_1 dx_1 G(t,x,t_1,x_1) U_3(x_1) \psi_a^2(x_1)$, получим

$$A_2 \sim \partial_a \int U_3(x) \psi_a^3(x) dx\, dt$$

$$A_1 = -\frac{i}{4} \{ \int dt\, dx\, G(t,x,t,x) U_4(x) \psi_a^2(x)$$

$$- \int dt_1 dx_1 dt_2 dx_2 \psi_a^2(x_1) U_3(x_1) G(t_1,x_1,t_2,x_2) U_3(x_2) G(t_2,x_2,t_2,x_2)$$

$$- \int dt_1 dx_1 dt_2 dx_2 \psi_a(x_1) U_3(x_1) G^2(t_1,x_1,t_2,x_2) U_3(x_2) \psi_a(x_2)$$

$$+ \frac{2}{TM_0} \int dt_1 dx_1 dt_2 dx_2 \psi_a'(x_1) G(t_1,x_1,t_2,x_2) U_3(x_2) \psi_a^2(x_2) -$$

$$- \frac{1}{2} [\int dt\, dx\, G(t,x,t,x) U_3(x) \psi_a(x)]^2 \}.$$

Последний член в A_1 равняется нулю, так как

$$\int dt\, dx\, G(t,x,t,x) U_3(x) \psi_a(x) \sim \partial_a \ln \int Dg\, e^{-\frac{i}{2}\int gHg\, d^2x} \delta(\int \psi_a g\, d^2x) = 0.$$

Применив равенство

$$\int G(t_2,x_2,t,x) U_3(x) \psi_a(x) G(t,x,t_1,x_1) dt\, dx =$$

$$= -\partial_a G(t_2,x_2,t_1,x_1) + \frac{1}{TM_0} \psi_a(x_2) \int G(t_1,x_1,t,x) \psi_a'(x) dt\, dx$$

$$+ \frac{1}{TM_0} \psi_a(x_1) \int G(t_2,x_2,t,x) \psi_a'(x) dt\, dx$$

к третьему члену и просуммировав все оставшиеся члены, убеждаемся, что

$$A_1 \sim \partial_a \int dt\, dx\, G(t,x,t,x) U_3(x) \psi_a(x) = 0,$$

$$A_c = A_0.$$

Рассмотрим члены, пропорциональные y и y^2:

$$B_c = B_0 + c B_1 + c^2 B_2$$

$$B_2 \sim (\int U_3(x) \psi_a^3(x) dx\, dt) = 0$$

$$B_1 \sim \int dt\, dx U_4(x) \psi_a^2(x) -$$

$$- \int dt_1 dx_1 dt_2 dx_2 \psi_a^2(x_1) G(t_1,x_1,t_2,x_2) U_3(x_1) U_3(x_2) =$$

$$= \partial_a^2 \int U_2(x) dx = 0$$

$$D_c = D_0 + cD_1 , \quad D_1 \sim \left(\int U_3(x) \psi_a(x) dx \right)^2 = 0.$$

Мы убедились, что $W_2^{(c)} = W_2^{(0)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Extended Systems in Field Theory. Phys.Rep., 1976, 23C,p.240; Nonlocal, Nonlinear and Nonrenormalizable Field Theories. Proc. of the IV Int. Workshop in Alushta, April, 1976, JINR, D2-9788, Dubna, 1976.
2. Dashen R., Hasslacher B., Neveu A. Phys.Rev., 1974, D10, p.4114,4130; Faddeev L.D. Les Houches Lectures, 1975; Goldstone J., Jackiw R. Phys.Rev., 1975, D11, p.1486; Christ N.N., Lee T.D. Phys.Rev., 1975, D12, p.1606;Callan C., Gross D. Nucl.Phys., 1975, B93, p.29; Gervais J.L., Sakita B. Phys.Rev., 1975, D11, p.2943; Gervais J.L., Jevicki A., Sakita B. Phys.Rev., 1975, D12, p.1038; Tomboulis E. Phys. Rev., 1975, D12, p.1678; Creutz M. Phys.Rev., 1975, D12, p.3126.
3. Jevicki A. Nucl.Phys., 1976, B117, p.365.
4. Faddeev L.D., Korepin V.E. Phys.Lett., 1976, 63B, p.435.
5. Matveev V.A. Nucl.Phys., 1977, B121, p.403.
6. Боголюбов Н.Н., Тябликов С.В. ЖЭТФ, 1949, 19, с.256.
7. Солодовникова Е.П., Тавхелидзе А.Н., Хрусталев О.А. ТМФ, 1972, 10, с.162; Разумов А.В., Хрусталев О.А. ТМФ, 1976, 29, с.300; Kuleshov S.P., Matveev V.A., Smondyrev M.A., JINR, E2-9116, Dubna, 1975; Creutz M. BNL-21923, 1976.
8. De Vega H.J. Nucl.Phys., 1976, B115, p.411.
9. Корепин В.Е., Фадеев Л.Д. ТМФ, 1975, 25, с.147.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 июля 1980 года.