сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-80-450

П.Л.Божилов, Г.М.Сотков

ТОЧНО РЕШАЕМАЯ КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНАЯ МОДЕЛЬ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

1980

Божилов П.Л., Сотков Г.М.

P2-80-450

Точно решаемая конформно-инвариантная модель квантовой электродинамики

Рассматривается градиентная модель квантовой электродинамики спинорных частиц в безмассовом случае. Эта модель является обобщением модели с потенциалом $A_\mu = \partial_\mu S(x)$ путем замены $\partial_\mu S(x) \to 1/2 :\partial_\mu S^2(x):$, которая приводит к новым законам преобразования относительно конформной группы как для спинорного поля, так и для потенциала. Характерным свойством этих преобразований является их нелинейность. При этом масштабная размерность спинорного поля имеет локальный операторный характер. Последнее свойство не наблюдается в других градиентных моделях и приводит к тому, что функции Вайтмана спинорного поля уже не являются однородными функциями относительных координат. Их вычисление удается провести при предположении, что вакуумное состояние является конформно-инвариантным. Тогда явные выражения для функций Вайтмана определяются из условия инфинитезимальной конформной инвариантности с точностью до нормировочных постоянных. Показано, что полученные двух- и трехточечные функции согласуются с безмассовым уравнением Дирака.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1980

Bozhilov P.L., Sotkov G.M.

P2-80-450

Exactly Solvable Conformal Invariant Model of the Quantum Electrodynamics

Some kind of generalization of a solvable model of the massless quantum electrodynamics is considered. The exact solutions of the corresponding Dirac equation are found as well as the conformal transformation with respect to which this equation is invariant. The corresponding invariant two- and three-point functions are found and it is shown that they are compatible with the Dirac equation.

1. В работе Цвангера[1] рассматривалась градиентная модель спинорной квантовой электродинамики /КЭД/ в 4-мерном пространстве-времени. Уравнения этой модели следующие:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi^{(0)}(x) - m\Psi^{(0)}(x) = e\gamma^\mu : A_\mu(x)\, \Psi^{(0)}(x): , \qquad /1.1/$$

$$\Box^2 S(x) = 0 \quad (\Box S \neq 0), \qquad /1.2/$$

где $A_\mu(x) = \partial_\mu S(x)$; γ^μ - матрицы Дирака; символ :...: всюду в данной работе означает нормальное произведение; $\Psi^{(0)}(x)$ -спинорное поле, а $\Box = \partial^\nu \partial_\nu$. Уравнение /1.1/ имеет точное операторное решение:

$$\Psi^{(0)}(x) = \Psi_0(x) : e^{-ieS(x)}: . \qquad /1.3/$$

Здесь и в дальнейшем $\Psi_0(x)$ является решением свободного уравнения Дирака и коммутирует с полем $S(x)$.

В работе [2] рассматривались свойства этой модели по отношению к преобразованиям конформной группы в случае безмассовых спинорных частиц. Все преобразования полей $\partial_\mu S$ и $\Psi^{(0)}$ записываются при помощи преобразований поля S /вместо спецконформных преобразований мы выпишем лишь преобразования R-инверсии, так как любое из этих преобразований выражается через другое обычным способом/:

$$U(\rho)\, S^\pm(x)\, U^{-1}(\rho) = S^\pm(\rho x) + e q^\pm \ln\rho,$$
$$U_R S^\pm(x)\, U_R^{-1} = S^\pm(Rx) - e q^\pm \ln|x^2|. \qquad /1.4/$$

Здесь S^+ и S^- - частотные части поля S ; $U(\rho)$ и U_R - операторы представления масштабных преобразований и R-инверсии; $Rx^\nu = -x^\nu/x^2$, а $q = q^+ + q^-$ - конформно-инвариантный постоянный оператор со свойствами:

$$[q^\pm, S^\mp] = \mp \frac{\lambda}{(4\pi)^2 e},$$
$$[q^+, q^-] = [q^\pm, S^\pm] = 0, \quad q^-|0\rangle = 0. \qquad /1.5/$$

$S^{\pm}(x)$, преобразующиеся согласно /1.4/, коммутируют между собой следующим образом /1,2/:

$$[S^{\mp}(x_1), S^{\pm}(x_2)] = \mp \frac{\lambda}{(4\pi)^2} \ln x_{12}^2 , \qquad /1.6/$$

где λ - действительный безразмерный параметр.

В настоящей работе мы построим обобщение вышерассмотренной градиентной модели. Как и в работе[2], будем исследовать конформно-инвариантные свойства новой модели. Построим точные решения уравнения /1.1/ в этом случае и найдем такие преобразования полей, относительно которых это уравнение является ковариантным. В заключительной части работы мы вычислим конформно-инвариантные двух- и трехточечные функции Вайтмана и покажем, что они согласуются с уравнением /1.1/.

2. Рассмотрим уравнение /1.1/ с потенциалом

$$A_\mu(x) = :S(x)\,\partial_\mu S(x): = \frac{1}{2} :\partial_\mu S^2(x): \qquad /2.1/$$

градиентного типа, когда $m=0$. В этом случае точное решение уравнения /1.1/ имеет вид:

$$\Psi(x) = \Psi_0(x) :\exp\{-\frac{ie}{2} S^2(x)\}: . \qquad /2.2/$$

Нетрудно найти также и следующие коммутационные соотношения:

$$[q^{\pm}, \Psi(x)] = \pm \frac{i\lambda}{(4\pi)^2} :S(x)\,\Psi(x): ,$$

$$[S^{\pm}(x_1), \Psi(x_2)] = \mp \frac{ie\lambda}{(4\pi)^2} \ln x_{12}^2 :S(x_2)\Psi(x_2): ,$$

которые легко получаются из равенств /1.5,6/, /2.2/ при естественных в случае свободных полей предположениях:

$$[S^{\pm}(x_1), \Psi_0(x_2)] = 0, \quad S^{-}|0> = 0. \qquad /2.3/$$

Приступим к вычислению двухточечных функций полей A_μ и Ψ . Учитывая /1.6/ и /2.1/, получаем, что двухточечная функция потенциала, как и должно быть, является продольной:

$$<0|A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)|0> = -\frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{(4\pi)^4} \partial_\mu\partial_\nu (\ln x_{12}^2)^2 . \qquad /2.4/$$

С помощью выражения /2.2/, при условии /2.3/, мы приходим к следующему результату:

$$<0|\bar\Psi(x_1)\Psi(x_2)|0> = <0|\bar\Psi_0(x_1)\Psi_0(x_2)|0> \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} [\frac{e\lambda}{(4\pi)^2} \ln x_{12}^2]^{2n} . \qquad /2.5/$$

Ряд из /2.5/ сходится в конечной области

$$|\frac{e\lambda}{(4\pi)^2} \ln x_{12}^2| < 1, \qquad /2.6/$$

в которой двухточечная функция спинорных полей записывается в виде

$$<0|\bar\Psi(x_1)\Psi(x_2)|0> = <0|\bar\Psi_0(x_1)\Psi_0(x_2)|0> [1 - \frac{e^2\lambda^2}{(4\pi)^4} (\ln x_{12}^2)^2]^{-1/2} . \qquad /2.7/$$

Однако получение этих результатов не разрешает проблемы построения модели КЭД с потенциалом /2.1/ ввиду некорректности определения операторнозначной обобщенной функции

$$:\exp\{-\frac{ie}{2} S^2\}: . \qquad /2.8/$$

На это указывает поведение двухточечной функции /2.7/, которая определена только в области /2.6/.

Оказывается, что конформная симметрия позволяет найти двух- и трехточечные функции и они согласуются с полученными посредством операторных решений. В этом подходе необходимости в корректном определении оператора /2.8/ не возникает.

3. Пользуясь конструкциями /2.1/ и /2.2/ и учитывая конформные свойства полей S и Ψ_0 , легко получить законы преобразований для A_μ и Ψ . Так как законы для A_μ получаются простым перемножением законов для S и $\partial_\mu S$, мы их приводить не будем. Для Ψ имеем:

$$U(\rho)\,\Psi(x)\,U^{-1}(\rho) = \rho^{3/2} :\rho^{-\frac{ie^3}{2} q^2 \ln\rho - ie^2 q S(\rho x)} \Psi(\rho x): ,$$

$$U_R \Psi(x)\, U_R^{-1} = \frac{\hat{x}}{|x^2|^2} :|x^2|^{-\frac{ie^3}{2} q^2 \ln x^2 + ie^2 q S(Rx)} \Psi(Rx): , \qquad /3.1/$$

где $\hat{x} = \gamma^\nu x_\nu$. Относительно группы Лоренца поля A_μ и Ψ преобразуются обычным образом.

Обсудим некоторые свойства конформных преобразований полей A_μ и Ψ . В работах[2,3] были найдены две нелинейные реализации конформной группы, относительно которых безмассовое уравнение Дирака с электромагнитным взаимодействием ковариантно. В данном случае преобразования полей A_μ и Ψ задают новую, тоже нелинейную, реализацию конформной группы.

Масштабная размерность потенциала - каноническая ($d_A = 1$), и это согласуется с требованием калибровочной инвариантности в КЭД /4/. Масштабная размерность спинорного поля Ψ аномальна, и она уже является локальным оператором:

$$d_\Psi(x) = 3/2 - ie^2 :qS(x):.$$

Локальность $d_\Psi(x)$ является характерным свойством рассматриваемой модели, которое не наблюдается в других градиентных моделях /1,2,5/. В функциях Вайтмана спинорного поля локальный операторный характер масштабной размерности проявляется в том, что они уже не являются однородными функциями относительных координат /см. /2.8/ и /3.5/ /.

Перейдем к вычислению двух- и трехточечных функций. Пусть вакуум инвариантен относительно масштабных и спецконформных преобразований:

$$D|0\rangle = 0, \quad K_\mu|0\rangle = 0,$$

где D и K_μ - генераторы соответствующих преобразований. Тогда, имея в виду, что

$$[D, A_\mu] = i(1 + x^\nu \partial_\nu) A_\mu + ieq\partial_\mu S,$$

$$[K_\mu, A_\lambda] = -i(2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu + 2x_\mu) A_\lambda + 2x^\nu (g_{\nu\mu} A_\lambda - g_{\nu\lambda} A_\mu) + \qquad /3.2/$$

$$+ 2ie(g_{\mu\lambda} qS + x_\mu q \partial_\lambda S),$$

$$[D, \Psi] = i(3/2 + x^\nu \partial_\nu) \Psi + e^2 :qS\Psi:,$$

$$[K_\mu, \Psi] = -i(2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu + 3x_\mu + \frac{1}{2} x^\nu [\gamma_\mu, \gamma_\nu]) \Psi + 2e^2 x_\mu :qS\Psi:, \qquad /3.3/$$

нетрудно получить инфинитезимальные условия конформной инвариантности для функций Вайтмана.

Введем обозначение:

$$W_{\mu\nu}(x_{12}) = \langle 0| A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) |0\rangle.$$

Имея в виду равенства /3.2,3/, можно записать инфинитезимальные условия для масштабной и спецконформной инвариантности функции следующим образом:

$$(2 + x_1^\lambda \partial_\lambda^1 + x_2^\lambda \partial_\lambda^2) W_{\mu\nu}(x_{12}) = -2\lambda^2 \partial_\mu \partial_\nu \ln x_{12}^2,$$

$$\sum_{j=1}^{2} (2x_{\mu j} x_j^\nu \partial_\nu^j - x_j^2 \partial_\mu^j + 4x_{\mu j}) W_{\nu\rho}(x_{12}) = 2x_{1\nu} W_{\mu\rho}(x_{12}) + 2x_{2\rho} W_{\nu\mu}(x_{12}) +$$

$$+ \frac{2\lambda^2}{(4\pi)^4} [g_{\mu\nu} \partial_\rho \ln x_{12}^2 - g_{\mu\rho} \partial_\nu \ln x_{12}^2 + (x_{1\mu} + x_{2\mu}) \partial_\nu \partial_\rho \ln x_{12}^2],$$

где $\partial_\nu^j = \partial/\partial x_j^\nu$. Общее решение этих уравнений задается выражением

$$W_{\mu\nu}(x_{12}) = [C - \frac{2\lambda^2}{(4\pi)^4} \ln x_{12}^2] \frac{1}{x_{12}^2} (g_{\mu\nu} - \frac{2x_{12\mu} x_{12\nu}}{x_{12}^2}) - \frac{4\lambda^2}{(4\pi)^4} \frac{x_{12\mu} x_{12\nu}}{(x_{12}^2)^2},$$

которое нетрудно привести к виду

$$W_{\mu\nu}(x_{12}) = -\frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{(4\pi)^4} \partial_\mu \partial_\nu (\ln x_{12}^2) + \frac{C}{2} \partial_\mu \partial_\nu \ln x_{12}^2, \qquad /3.4/$$

где C - произвольная постоянная. Для $C = 0$ выражения /2.4/ и /3.4/ совпадают.

Перейдем к рассмотрению двухточечной функции полей $\Psi(x)$:

$$G_{\alpha\beta}(x_{12}) = \langle 0| \bar\Psi_\alpha(x_1) \Psi_\beta(x_2) |0\rangle.$$

Требование масштабной и спецконформной инвариантности приводит к уравнениям

$$(3 + x_1^\nu \partial_\nu^1 + x_2^\nu \partial_\nu^2) G(x_{12}) = \frac{2e^2\lambda^2}{(4\pi)^4} \frac{\ln x_{12}^2}{1 - \frac{e^2\lambda^2}{(4\pi)^4} (\ln x_{12}^2)^2} G(x_{12}),$$

$$\sum_{j=1}^{2} (2x_{\mu j} x_j^\nu \partial_\nu^j - x_j^2 \partial_\mu + 3x_{j\mu} + \frac{1}{2} x_j^\nu [\gamma_\mu, \gamma_\nu]) G(x_{12}) =$$

$$= -\frac{2e^2\lambda^2}{(4\pi)^4} \frac{\ln x_{12}^2}{1 - \frac{e^2\lambda^2}{(4\pi)^4} (\ln x_{12}^2)^2} (x_{1\mu} + x_{2\mu}) G(x_{12}).$$

Решением этих уравнений является выражение /2.7/, где

$$<0|\bar{\Psi}_0(x_1)\,\Psi_0(x_2)\,|0> = N\,\frac{\hat{x}_{12}}{(x_{12}^2)^2},$$

а N - произвольная постоянная. Ясно, что $G(x_{12})$ отличается от двухточечной функции свободных спинорных полей независимо от калибровочного характера взаимодействия.

Аналогичным образом записываются соответствующие уравнения для трехточечной функции.

$$_{\alpha\beta}\Gamma^{+}_{\mu}(x_1,x_2,x_3) = <0|\bar{\Psi}_\alpha(x_1)S^{+}(x_2)\,\partial_\mu S^{+}(x_2)\,\Psi_\beta(x_3)|0>.$$

Общий вид этой функции следующий:

$$\Gamma^{+}_{\mu}(x_1,x_2,x_3) = \frac{\hat{x}_{13}}{(x_{13}^2)^2}\{C_1\partial_\mu \ln\frac{x_{21}^2}{x_{23}^2} - \frac{ie\lambda^2}{(4\pi)^4}N\frac{\ln x_{12}^2\,\partial_\mu \ln x_{12}^2}{[1-\frac{e^2\lambda^2}{(4\pi)^4}(\ln x_{13}^2)^2]^{3/2}}\}+ \qquad /3.5/$$

$$+\ \frac{\hat{x}_{12}\gamma_\mu\hat{x}_{23}}{x_{12}^2\,x_{13}^2\,x_{23}^2}\{C_2 + \frac{C_3}{[1-\frac{e^2\lambda^2}{(4\pi)^4}(\ln x_{13}^2)^2]^{3/2}}\},$$

где C_1, C_2 и C_3 - произвольные постоянные.

Легко заметить, что все функции, найденные из условий конформной инвариантности, вполне согласуются с функциями, найденными при помощи точного операторного решения. Однако все эти результаты будут относиться к модели, которую мы рассматриваем, если мы докажем, что уравнение Дирака /1.1/ ковариантно относительно преобразований спинорного поля /3.3/ и потенциала /3.2/. Это доказательство нетрудно провести, и мы его приводить не будем.

Если продифференцировать функцию /2.7/ с учетом уравнения /1.1/ с потенциалом /2.1/ и $m=0$, получим следующее равенство:

$$i\gamma^\mu\partial_\mu^2\,G(x_{12}) = e\gamma^\mu G_\mu(x_{12}), \qquad /3.6/$$

где

$$G_\mu(x_{12}) = <0|\bar{\Psi}(x_1):S(x_2)\,\partial_\mu S(x_2)\,\Psi(x_2):|0>.$$

Мы будем говорить, что функции $G(x_{12})$ и $G_\mu(x_{12})$ согласуются с уравнением /1.1/, если равенство /3.6/ удовлетворяется тождественно. Чтобы проверить это, найдем функцию $G_\mu(x_{12})$. Ясно, что ее можно получить из равенства

$$G_\mu(x_{12}) = \lim_{x_3\to x_2}\Gamma^{+}_{\mu}(x_1,x_2,x_3). \qquad /3.7/$$

Подставляя сюда Γ^{+}_{μ} из /3.5/, мы получим, что предел /3.7/ существует, если положить

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0.$$

Тогда имеем

$$G_\mu(x_{12}) = -\frac{ie\lambda^2}{(4\pi)^4}N\frac{\hat{x}_{12}}{(x_{12}^2)^2}\frac{\ln x_{12}^2\,\partial_\mu \ln x_{12}^2}{[1-\frac{e^2\lambda^2}{(4\pi)^4}(\ln x_{12}^2)^2]^{3/2}},$$

и равенство /3.6/ выполняется тождественно. Следовательно, упомянутое согласование имеет место.

4. Рассмотрим модель продольной КЭД с потенциалом

$$A^{(1)}_\mu(x) = z_1\partial_\mu S(x) + z_2 :S(x)\,\partial_\mu S(x):, \qquad /4.1/$$

где $z_{1,2}$ - произвольные реальные числа. Конструкция потенциала /4.1/ позволяет включать или выключать чисто калибровочные взаимодействия. При этом в случае $z_2=0$ получается модель Цванцигера[1,2], а при $z_1=0$ - рассмотренная выше модель. Ясно, что градиентный характер двухточечной функции потенциала не меняется. Точное операторное решение

$$\Psi^{(1)}(x) = \Psi_0(x):\exp\{-iez_1S(x) - \frac{ie}{2}z_2S^2(x)\}:$$

имеет тот же недостаток, что и /2.2/: содержит некорректно определенный оператор. Поэтому мы снова обратимся к конформной инвариантности. Как и в модели с потенциалом /2.1/, конформная инвариантность и в этом случае определяет двух- и трехточечные функции с точностью до нормировочных постоянных. Так, например, имеем:

$$<0|\bar{\Psi}^{(1)}(x_1)\Psi^{(1)}(x_2)|0> = N\frac{\hat{x}_{12}}{(x_{12}^2)^2}[1-\frac{e^2\lambda^2}{(4\pi)^4}z_2^2\ln x_{12}^2]^{-1/2}\exp\{-\frac{e^2\lambda}{(4\pi)^2}z_1^2\frac{\ln x_{12}^2}{1-\frac{e^2\lambda^2}{(4\pi)^4}z_2^2(\ln x_{12}^2)^2}\}$$

и

$$<0|\bar{\Psi}^{(1)}(x_1):A^{(1)}_\mu(x_2)\,\Psi^{(1)}(x_2):|0> = <0|\bar{\Psi}^{(1)}(x_1)\Psi^{(1)}(x_2)|0>.$$

$$
\left\{ \frac{\frac{ie\lambda}{(4\pi)^2} z_1^2 - \frac{ie\lambda^2}{(4\pi)^4} z_2^2 \ln x_{12}^2}{1 - \frac{e^2\lambda^2}{(4\pi)^4} z_2^2 (\ln x_{12}^2)^2} + \frac{\frac{2ie^3\lambda^3}{(4\pi)^6} z_2^2 (\ln x_{12}^2)^2}{\left[1 - \frac{e^2\lambda^2}{(4\pi)^4} z_2^2 (\ln x_{12}^2)^2\right]^2} \right\} \partial_\mu \ln x_{12}^2 .
$$

Наконец отметим, что вопрос о самосогласованности этой модели решается аналогично тому, как это сделано в третьем разделе.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить проф. Д.Стоянова за идеи, полезные обсуждения и постоянный интерес к этой работе. На заключительном этапе мы обсуждали свои результаты и с В.Петковой, Р.Зайковым и Л.Хаджиивановым, которым мы благодарны за критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zwanziger D. Phys.Rev.,1978,D17,p.457.
2. Златев С., Сотков Г., Стоянов Д. ОИЯИ, Р2-12800, Дубна,1979.
3. Сотков Г., Стоянов Д. ОИЯИ, Р2-12857, Дубна, 1979.
4. Todorov I.T., Mintchev M., Petkova V.B. Conformal Invariance in Quantum Field Theory, Publicazione della Classe diScienze della Squola Normale Superiore, Pisa, 1978.
5. Strocchi F., Mintchev M. Pisa preprint, SNS 3/77, 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 июня 1980 года.