ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2-80-436

В.П.Гердт

О ГЛОБАЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЧУ-ЛОУ

Направлено в журнал "Теоретическая
и математическая физика"

1980

Гердт В.П. P2-80-436

О глобальной структуре общего решения уравнений Чу-Лоу

Рассмотрены уравнения Чу-Лоу для статического p -волнового πN -рассеяния. Использована формулировка этих уравнений в виде системы трех нелинейных разностных уравнений первого порядка, общее решение которых зависит от трех произвольных периодических функций. Предложен подход к глобальному построению общего решения, опирающийся на разложение по степеням одной из произвольных функций C(w), которая определяет структуру инвариантной кривой уравнений Чу-Лоу. Показано, что в каждом порядке по C(w) исходная нелинейная задача сводится к линейной. Путем решения последней общее решение уравнений Чу-Лоу найдено с точностью до квадратичных по C(w) членов.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1980

Gerdt V.P. P2-80-436

On Global Structure of the General Solution of the Chew-Low Equations

The Chew-Low equations for static p -wave πN-scattering are considered. The equations are taken as a system of three nonlinear difference equations of the first

1. ВВЕДЕНИЕ

Вот уже на протяжении четверти века уравнения, полученные Чу и Лоу [1] и описывающие статическое p -волновое πN-рассеяние, привлекают внимание физиков и математиков. Столь длительное внимание вызвано уникальностью модели Чу-Лоу, представляющей собой простейшую нетривиальную модель физики элементарных частиц, одновременно удовлетворяющую таким фундаментальным требованиям, как аналитичность, унитарность и кроссинг-симметрия. Кроме того, интерес к модели подогревается неуклонно возрастающим интересом к нелинейным проблемам теоретической и математической физики, ярким примером которых являются уравнения Чу-Лоу. Именно нелинейность этих уравнений создает очень серьезные математические трудности на пути их анализа и решения, которые пока что не удается преодолеть до конца. Тем не менее использование различных методов анализа уравнений Чу-Лоу позволило получить целый ряд важных результатов, касающихся их решений [2-4]. Так, например, авторы совсем недавней работы [3], опираясь на формулировку уравнений Чу-Лоу в виде нелинейной краевой задачи, сумели не только сделать новые важные заключения о существовании и единственности физически интересных решений, но и разработать численные схемы их построения.

Введение униформизующей переменной [5]

$$w = \frac{1}{\pi} \arcsin \nu$$

/ν - энергия пиона в ед. его массы/ позволило свести нелинейную краевую задачу на матричные элементы S -матрицы к системе нелинейных уравнений в конечных разностях - динамической форме уравнений Чу-Лоу [2]. Такой подход оказался исключительно плодотворным как для анализа уравнений Чу-Лоу, так и для нахождения их решений. Было, в частности, показано [4], что решения, обладающие борновским полюсом и правильным пороговым поведением, содержатся в общем решении уравнений Чу-Лоу, зависящем от трех произвольных периодических функций.

В работах [4,6-7] был развит метод построения общего решения вблизи упругого порога πN-реакции, где решение представимо [4] в виде рядов по обратным степеням независимой переменной w. Коэффициенты рядов являются полиномами по одной из произвольных функций C(w), определяющей структуру инвариантной кривой уравнений Чу-Лоу [4,6]. Для вычисления этих коэффициентов был разработан [6,7] эффективный алгоритм, удобный для применения такого мощного инструмента, как программные системы для аналитических вычислений на ЭВМ [8]. Расчеты проводились с помощью систем SCHOONSCHIP [9] и SYMBAL [10] и позволили получить детальную информацию о локальной структуре общего решения уравнений Чу-Лоу.

Следующий шаг должен заключаться в анализе глобальной структуры общего решения. Это необходимо, в частности, для того, чтобы выделить из общего решения класс решений, обладающих требуемым борновским полюсом в точке $w=0$ [4,6], не принадлежащей области применимости локального представления.

В настоящей работе предлагается подход к глобальному построению общего решения, основанный на учете степенных поправок по произвольной функции $C(w)$ к частному решению уравнений Чу-Лоу, имеющему конечное число полюсов. Коэффициенты при степенях функции $C(w)$ являются замкнутыми выражениями, определенными во всей комплексной плоскости униформирующей переменной w. Показано, что они определяются линейными уравнениями в конечных разностях, которые решены для линейного по $C(w)$ приближения.

2. УРАВНЕНИЯ ЧУ-ЛОУ

Динамическая форма [2] уравнений Чу-Лоу представляет собой следующую систему автономных нелинейных разностных уравнений первого порядка:

$$x' = F(x,y); \quad F(x,y) = \frac{x+2x^2-xy-2y^2}{1+3x+3y-2x^2-3xy-2y^2}; \qquad /1.1/$$

$$y' = -F(y,x); \quad x(w) = -x(-w); \quad y(w) = y(-w); \qquad /1.2/$$

$$zz'(1-2y+x)(1-2y'-x') = 1; \quad z(w) = z(-w); \qquad /2/$$

где x, y, z - мероморфные функции переменной w

$$x = x(w), \quad y = y(w), \quad z = z(w),$$

такие, что

$$x^*(w) = x(w^*), \quad y^*(w) = y(w^*), \quad z^*(w) = z(w^*), \qquad /3/$$

а

$$x' = x(w+1), \quad y' = y(w+1), \quad z' = z(w+1).$$

Матричные элементы статической S-матрицы p-волнового πN-рассеяния связаны с величинами x, y, z соотношениями

$$S_1 = z(1+4y-4x),$$
$$S_2 = z(1-2y-x), \qquad /4/$$
$$S_3 = z(1+y+2x).$$

Физически интересные решения уравнений /1/-/3/ должны удовлетворять следующим дополнительным ограничениям на матричные элементы S-матрицы [4]:

$$S_i(w) = 1 + O((w-1/2)^3); \qquad /5.1/$$

$S_i(w)$ имеют в нуле полюс первого порядка с вычетом

$$\operatorname{Res} S_i(0) \sim \lambda_i, \quad \lambda = (-4, -1, 2); \qquad /5.2/$$

$$\lim |w^{-N} S_i(w)| < \infty \qquad /5.3/$$
$$|w| \to \infty, \quad \operatorname{Re} w = \mathrm{Const}.$$

Эти ограничения обеспечивают: /5.1/ - правильное пороговое поведение p-волн; /5.2/ - наличие у решения борновского полюса; /5.3/ - переход к интегральной форме уравнений Чу-Лоу [1].

Анализ /1/-/3/ показал [2,4], что решения, удовлетворяющие /5/, содержатся в общем решении уравнений /1/-/3/, зависящем от трех произвольных периодических функций. Две из них соответствуют известному β- и $\mathfrak{L}$-произволу [2], который немедленно следует из инвариантности уравнений /1/-/3/ относительно замены

$$x(w) \to x(w+\beta(w)), \quad y(w) \to y(w+\beta(w)), \quad z(w) \to \mathfrak{L}(w)\, z(w+\beta(w)), \qquad /6/$$

где функции β и $\mathfrak{L}$ - мероморфны и обладают свойствами

$$\beta(w) = \beta(w+1), \quad \beta(w) = -\beta(-w), \quad \beta^*(w) = \beta(w^*),$$
$$\mathfrak{L}(w)\,\mathfrak{L}(w+1) = 1, \quad \mathfrak{L}(w) = \mathfrak{L}(-w), \quad \mathfrak{L}^*(w) = \mathfrak{L}(w^*). \qquad /8/$$

Ясно, что произвол /7/ всегда можно учесть посредством замены /6/. Отсюда следует, что нахождение общего решения сводится выше и с учетом соотношения /13/ представим /8/ в виде ряда

$$y=f(x,C)=\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)\,C^i, \qquad f_0(x)=x^2. \qquad /15/$$

Подставим разложение /15/ в уравнение /10/ и выделим члены n-го порядка по C. Нетрудно убедиться, что после такого выделения мы получим соотношения вида

$$\frac{f_n(x)}{(1+x)^4}+(-1)^n f_n\left(\frac{x}{1+x}\right)=F_n(x,f_0(x),\dots f_{n-1}(x)), \qquad /16/$$

$$(n=1,2\dots)$$

где F_n - некоторое выражение, зависящее от функций $f_i(x)$ $(0\le i\le n-1)$ и их производных. Покажем, например, откуда получается второе слагаемое левой части равенства /16/.
С этой целью перепишем правую часть соотношения /10/, учитывая разложение /15/ для функции f и ограничиваясь членами порядка C^n:

$$f(F(x,f(x,C)),-C)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i f_i\Big(F\big(x,\sum_{j=0}^{n-i} f_j(x)\,C^j\big)\Big)\,C^i+O(C^{n+1}).$$

Слагаемое этого равенства, содержащее функцию f_n, имеет вид

$$(-1)^n C^n f_n(F(x,x^2)).$$

Это дает нужный результат, если принять во внимание явный вид функции $F(x,y)$ в уравнении /1/, из которого следует

$$F(x,x^2)=\frac{x}{1+x}.$$

Последнее равенство в точности соответствует тому факту, что решение /14.1/ удовлетворяет разностному уравнению

$$x(w+1)=\frac{x(w)}{1+x(w)}.$$

Аналогично первое слагаемое левой части равенства /16/ выделяется из левой части соотношения /10/.

Важно подчеркнуть, что исходное нелинейное функциональное уравнение /10/ свелось к цепочке линейных функциональных уравнений /16/. Более того, замена переменной $t=1/x$ позволяет придать им вид разностных уравнений

$$t^4 f_n(t)+(-1)^n(t+1)^4 f_n(t+1)=(t+1)^4 F_n(t,f_0(t),\dots f_{n-1}(t)). \qquad /17/$$

$$(n=1,2\dots)$$

Для функции $t^4 f_n(t)$ уравнения /17/ являются линейными разностными уравнениями первого порядка с постоянными коэффициентами. Теория таких уравнений достаточно хорошо разработана[11], хотя успех их решения зависит, очевидно, от структуры правой /неоднородной/ части. Последняя в случае уравнений /17/ определяется результатами решения предшествующих уравнений цепочки и для $n=1,2$ приводится в следующем разделе.

Перейдем теперь к рассмотрению уравнений /1/-/3/. Как и в случае инвариантной кривой, будем искать степенные по $C(w)$ поправки к решению /14.1/, и соответственно этому представим решение /1/-/3/ в виде рядов

$$x(w)=\sum_{i=0}^{\infty} x_i(w)\,C^i(w), \qquad x_0(w)=\frac{1}{w}, \qquad /18.1/$$

$$y(w)=\sum_{i=0}^{\infty} y_i(w)\,C^i(w), \qquad y_0(w)=\frac{1}{w^2}, \qquad /18.2/$$

$$z(w)=\sum_{i=0}^{\infty} z_i(w)\,C^i(w), \qquad z_0(w)=\frac{w^4}{(w^2-1)^2}. \qquad /18.3/$$

Заменим в уравнении /1.1/ функцию $y(w)$ ее разложением /15/, считая известными функции $f_i(x)$, определяемые уравнениями /17/. Затем подставим вместо $x(w)$ ряд /18.1/ и разложим функции $f_i(x)$ по степеням C:

$$f_i(x)=f_i(x_0)+\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}\cdot C x_1+\dots$$

Выделяя из полученного таким образом выражения коэффициент при C^n, придем к следующему разностному уравнению на функцию $x_n(w)$:

$$w^2 x_n(w)-(-1)^n(w+1)^2 x_n(w+1)=X_n(w,x_0(w),\dots x_{n-1}(w)). \qquad /19/$$

$$(n=1,2\dots)$$

Уравнения /19/, как и уравнения /17/, представляют собой цепочку линейных уравнений, неоднородные части которых определяются решениями предшествующих уравнений цепочки, соответствующих меньшим значениям n. И так же, как уравнения /17/, уравнения /18/ тривиальным образом сводятся к уравнениям с постоянными коэффициентами.

Ясно, что решение уравнений /17/ и /19/ позволит немедленно найти коэффициенты $y_i(w)$ разложения /18.2/ для функции $y(w)$.

Далее, при известных функциях $x_i(w)$ и $y_i(w)$ подстановка разложений /18/ в уравнение /2/ приводит к аналогичной цепочке уравнений на функции $z_i(w)$:

$$\frac{(w-1)^2(w+1)^2}{w^4} z_n(w) + (-1)^n \frac{w^2(w+2)^2}{(w+1)^4} z_n(w+1) = Z_n(w, z_0(w), \dots z_{n-1}(w)). \qquad /20/$$

$(n=1,2\dots)$

Таким образом, задача построения общего решения уравнений /1-3/ в виде рядов /18/ сводится к последовательному решению уравнений /17/, /19/ и /20/, являющихся линейными разностными уравнениями первого порядка с постоянными коэффициентами.

4. СТЕПЕННЫЕ ПОПРАВКИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим уравнения /17/, /19/ и /20/ при $n=1$. В этом случае они определяют линейные по $C(w)$ члены разложений /18/, представляющие собой в общем решении степенные поправки первого порядка по отношению к решению /14/. Вычисление правой части уравнения /17/ дает

$$F_1 = 0. \qquad /21/$$

Следовательно,

$$t^4 f_1(t) - (t+1)^4 f_1(t+1) = 0, \qquad /22/$$

или $f_1(t) = 1/t^4$, что в переменной x означает

$$f_1(x) = x^4. \qquad /23/$$

Конечно, умножение /23/ на произвольную периодическую функцию от t также дало бы решение уравнения /22/. Однако, как отмечалось в разделе 2, весь функциональный произвол в общем решении исчерпывается функциями /7/ и /9/. Поэтому достаточно ограничиться частными решениями уравнений /17/, /19/ и /20/, обладающими свойствами четности, мероморфности и вещественности по переменной w, которым должны удовлетворять решения уравнений /1/-/3/.

Зная функцию $f_1(x)$, даваемую равенством /23/, вычислим правую часть уравнения /19/ для $n=1$. Это дает следующее уравнение на функцию $x_1(w)$:

$$w^2 x_1(w) + (w+1)^2 x_1(w+1) = \frac{2(2w+1)}{w^2(w^2-1)(w+2)}. \qquad /24/$$

Легко видеть, что решение уравнения /24/ имеет вид

$$x_1(w) = \frac{2}{w^3(w^2-1)}. \qquad /25/$$

Исходя из /15/, /23/ и /25/, найдем для функции $y_1(w)$ в разложении /18.2/ следующее выражение:

$$y_1(w) = \frac{w^2+3}{w^4(w^2-1)}. \qquad /26/$$

Наконец, используя /25/ и /26/, получаем явный вид уравнения /20/ при $n=1$:

$$\frac{(w-1)^2(w+1)^2}{w^4} z_1(w) - \frac{w^2(w+2)^2}{(w+1)^4} z_1(w+1) = \frac{12(2w+1)}{(w^2-1)^2 w^2(w+2)^2}, \qquad /27/$$

решением которого является функция

$$z_1(w) = \frac{4w^2}{(w^2-1)^4}. \qquad /28/$$

Формулы /18/, /25/, /26/ и /28/ дают общее решение уравнений /1/-/3/ с точностью до квадратичных по $C(w)$ членов:

$$x(w) = \frac{1}{w} + \frac{2C(w)}{w^3(w^2-1)} + O(C^2(w)),$$

$$y(w) = \frac{1}{w^2} + \frac{(w^2+3)\,C(w)}{w^4(w^2-1)} + O(C^2(w)), \qquad /29/$$

$$z(w) = \frac{w^4}{(w^2-1)^2} + \frac{4w^2 C(w)}{(w^2-1)^4} + O(C^2(w)).$$

Соответственно матричные элементы S-матрицы /4/, с учетом линейных по $C(w)$ поправок к решению /14.2/, равны

$$S_1(w) = \frac{w^2(w-2)^2}{(w^2-1)^2} + \frac{4(w^2-w+1)^2}{(w^2-1)^4} C(w) + O(C^2(w)),$$

$$S_2(w) = \frac{w^2(w-2)}{(w-1)^2(w+1)} - \frac{2(w^2-w+1)}{(w-1)^4(w+1)^2} C(w) + O(C^2(w)), \qquad /30/$$

$$S_3(w) = \frac{w^2}{(w-1)^2} + \frac{C(w)}{(w-1)^4} + O(C^2(w)).$$

Отметим тот факт, что коэффициенты линейных по $C(w)$ членов в формулах /29/-/30/, как и нулевое приближение в разложениях /18/, являются рациональными функциями переменной w. Однако коэффициенты при квадратичных по $C(w)$ членах в разложениях /18/ уже не обладают этим свойством. Данное заключение вытекает из того факта, что функция $f_2(x)$ в формуле /15/ не является рациональной. Последняя определяется уравнением /17/ при $n=2$. Правая часть этого уравнения получается путем прямых, но довольно громоздких вычислений, опирающихся на знание решения /23/ уравнения /22/. В результате получается следующий явный вид уравнения /17/ при $n=2$:

$$t^4 f_2(t) + (t+1)^4 f_2(t+1) = \frac{-15t^4 - 30t^3 - 7t^2 + 8t + 8}{(t^2-1)^2 t^2 (t+2)^2}. \qquad /31/$$

Разлагая правую часть уравнения /31/ на элементарные дроби, можно показать, что ему нельзя удовлетворить в классе рациональных функций. Решение этого уравнения, равно как и уравнений /19/ и /20/ при $n=2$, представляет отдельную, довольно серьезную проблему, которой мы не будем касаться в настоящей работе.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, представление общего решения уравнений Чу-Лоу рядами /18/ позволило переформулировать исходную линейную задачу /1/-/3/ в виде бесконечной цепочки /17/, /19/ и /20/ линейных разностных уравнений, определяющих отдельные члены указанных рядов. Первые уравнения /22/, /24/ и /27/ этой цепочки легко решаются и приводят к выражениям /29/ для общего решения в линейном по произвольной функции $C(w)$ приближении. В отличие от локального представления /12/, справедливого при достаточно большом $|w|$ [4], коэффициенты разложения /18/ заданы во всей комплексной w-плоскости, что важно для понимания глобальных свойств общего решения.

Дальнейший прогресс в рамках предложенного подхода требует нахождения следующих членов разложений /18/. Знание структуры этих членов необходимо, во-первых, для исследования вопроса о сходимости рядов /18/, без чего они носят формальный характер. Во-вторых, как это видно из формул /30/, решение в линейном приближении не имеет борновского полюса, требуемого условием /5.2/. Заметим, однако, что произведение $z_1(w)\,x_1(w)$, согласно формулам /25/ и /28/ имеющее полюс первого порядка в точке $w=0$, в силу соотношений /4/ дает вклад в квадратичные по $C(w)$ поправки к выражениям /30/. Это позволяет надеяться на то, что уже в квадратичном приближении решение будет обладать борновским полюсом. Конечно, возможно сокращение полюсного вклада $z_1(w)\,x_1(w)$ не учтенными пока поправками второго порядка в формулах /29/, и для ответа на этот вопрос их нужно вычислить явно. Наличие борновского полюса позволит фиксировать значение $C(0)$ и тем самым выделить из /18/ физически интересные решения. Что касается условий /5.1/ и /5.3/, то их легко учесть в рамках локального представления /12/, наложив соответствующие ограничения на произвол /7/ [4].

Следует подчеркнуть, что решение уравнений /17/, /19/ и /20/ сопряжено с громоздкими аналитическими выкладками, требуемыми для вычисления их правых частей, т.е. функций F_n, X_n и Z_n. Объем этих выкладок быстро растет с ростом n. Так, например, если получение равенства /21/ заняло несколько часов ручного труда, то вычисление правой части уравнения /31/ потребовало уже нескольких дней ручных выкладок. К счастью, все нужные для таких вычислений математические операции доступны современным машинным средствам аналитических вычислений [18], из которых наиболее удобной для рассматриваемой задачи является система REDUCE-2 [12]. Последняя имеется в ОИЯИ на ЭВМ ЕС-1040 и CDC-6500. Эта система "умеет" находить наибольший общий делитель двух полиномов и тем самым упрощать рациональные дроби, что делает ее весьма эффективной для аналитических манипуляций над ними. Например, воспроизведение с помощью системы REDUCE-2 результата /21/ и вычисление правой части уравнения /31/ потребовало всего 21 с и 7 мин машинного времени ЭВМ ЕС-1040 соответственно.

Автор выражает благодарность В.А.Мещерякову и Б.Н.Хоромскому за полезные обсуждения вопросов, затронутых в работе, а также В.В.Полянскому, проверившему ряд громоздких результатов ручного счета с помощью системы REDUCE-2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chew G.F., Low F.E. Phys.Rev., 1956, 101, p.1570.
2. Журавлев В.И., Мещеряков В.А. ЭЧАЯ, 1974, т.5, вып.1, с.172.
3. Жидков Е.П. и др. ЖВМ и МФ, 1979, 19, с.998; Жидков Е.П., Нгуен М., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р5-12916, Дубна, 1979.
4. Гердт В.П., Мещеряков В.А. ТМФ, 1975, 24, с.155.
5. Мещеряков В.А. ОИЯИ, Р-2369, Дубна, 1965.
6. Гердт В.П. ЖВМ и МФ, 1979, 19, с.1601.
7. Гердт В.П. ОИЯИ, Д11-80-13, Дубна, 1980, с.159.
8. Гердт В.П., Тарасов О.В., Ширков Д.В. УФН, 1980, 130, с.113.

9. Strubbe H. Comp.Phys.Comm., 1974, 8, p.1.
10. Engeli M. SYMBAL User's Manual, Univ. of Texas, 1969.
11. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. "Наука", М., 1967; Levy H., Lessman F. Finite Difference Equations, London, PITMAN, 1959.
12. Hearn A.C. REDUCE User's Manual. Second Edition, Univ. of Utah, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 июля 1980 года.