сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-80-428

В.А.Грибов

РАЗМЕРНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ В МОДЕЛИ, ПРИВОДЯЩЕЙ К УРАВНЕНИЮ ТИПА РАДИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

1980

Грибов В.А. P2-80-428

Размерная регуляризация в модели, приводящей к уравнению типа радиального уравнения Шредингера

Рассмотрена задача квантовой теории поля, приводящая в n-мерном евклидовом пространстве, при некоторых допущениях, к уравнению типа радиального уравнения Шредингера с потенциалом $V(x)=c^2x^{-(n-2)}$. Показано, что точное регулярное при $x = 0$ решение этого уравнения, с точностью до бесконечного нормировочного множителя, непрерывно по размерности пространства n в точке $n = 4$. Для этого же решения конечный отрезок ряда теории возмущений по константе связи c^2 свободен при $n < 4$ от расходимостей и при $n \to 4-0$ переходит, с точностью до бесконечного нормировочного множителя, в соответствующий отрезок разложения по c^2 точного решения в 4-мерном случае. Аналогичные результаты получены для уравнения Шредингера, которое в 4-мерном случае содержит сингулярный потенциал логарифмического типа. Тем самым показана применимость размерной регуляризации в рассмотренных случаях.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1980

Gribov V.A. P2-80-428

Dimensional Regularization with a Model which Leads to a Radial Schrödinger Equation

A problem of quantum field theory is considered which leads, under some assumptions, to a radial Schrödinger equation with poten-

I. Одним из методов устранения расходимостей в квантовой теории поля, особенно удобным в случае калибровочных полей, является метод размерной регуляризации /см. обзорную работу [I]/. Основной идеей этого подхода является получение интересующих нас в теории поля выражений первоначально не в 4-мерном пространстве, а в пространстве n измерений, где n – непрерывный /возможно – комплексный/ параметр. При $n \neq 4$ вычисления по теории возмущений свободны от ультрафиолетовых расходимостей, характерных для теории возмущений в 4-мерном пространстве. Полученные при $n \neq 4$ результаты аналитически продолжаются по n на случай $n = 4$, при этом получаются уже регуляризованные выражения.

Однако остается открытым вопрос, как соотносятся эти регуляризованные выражения с точными решениями соответствующих уравнений, так как точные решения в задачах квантовой теории поля обычно неизвестны. Поэтому представляет несомненный интерес рассмотреть задачу, которая сводится, при некоторых допущениях, к уравнению с известными точными решениями достаточно простого вида, и сравнить эти решения с результатами, полученными методом размерной регуляризации.

В данной работе рассмотрена именно такая задача, приводящая к уравнению типа радиального уравнения Шредингера с потенциалом, который сводится, при некоторых допущениях, к степенно́му с показателем степени, определяемым размерностью пространства. Рассматривается предел при $n \to 4$ сначала точного регулярного в нуле решения этого уравнения для случая $n \neq 4$, а затем – конечного отрезка ряда теории возмущений для этого же решения. С точностью до бесконечной мультипликативной константы перенормировки, результаты в обоих случаях совпадают с точным регулярным в нуле решением этого же уравнения при $n = 4$, что говорит о допустимости применения метода размерной регуляризации. То же самое справедливо и для уравнения Шредингера, содержащего при $n = 4$ сингулярный потенциал отталкивания логарифмического типа.

2. Рассмотрим, по аналогии с [2], уравнение для перенормированной вершинной функции $\Gamma = Z u(p^2)\gamma_5$ в n – мерном евклидовом p – пространстве:

$$(p^2 + M^2) u(p^2) = Z^{-1} - \frac{g^2}{(2\pi)^n} \int d_n k \, \frac{u(k^2)}{\mu^2 + (p-k)^2} . \qquad /I/$$

Чтобы в случае $n = 4$ устранить возникающие при итерациях расходимости в $u(p^2)$, положим $Z^{-1} = 0$. Получаем уравнение, описывающее связанное состояние фермионов $\bar{\psi}$ и ψ, взаимодействующих с псевдоскалярным полем φ :

$$L_{int} = g : \bar{\psi} \gamma_5 \psi \varphi : \; .$$

Пользуясь преобразованием Ганкеля порядка $(1+\varepsilon)$ ж)

$$u(x) = \int_0^\infty p^{2+\varepsilon} x^{1/2} J_{1+\varepsilon}(px) u(p^2) dp ,$$

ж) Здесь и далее $J_\nu(x)$ – функция Бесселя первого рода, $K_\nu(x)$ и $I_\nu(x)$ – модифицированные функции Бесселя [3].

получаем при $Z^{-1} = 0$ радиальное уравнение для $u(x)$ в евклидовом n – мерном x – пространстве:

$$u'' + \left[-M^2 - \frac{(1+\varepsilon)^2 - 1/4}{x^2} - \frac{g^2}{(2\pi)^{2+\varepsilon}} \left(\frac{\mu}{x}\right)^{1+\varepsilon} K_{1+\varepsilon}(\mu x) \right] u(x) = 0, \qquad /2/$$

где $\varepsilon = n/2 - 2$. Рассмотрим уравнение /2/ при $-1 < \varepsilon \leq 0$ в области малых x, за счет которой при $\varepsilon = 0$ возникают расходимости в членах ряда теории возмущений по g^2 для решения $u(x)$. При малых x заменяем $K_{1+\varepsilon}(\mu x)$ на соответствующую асимптотику и пренебрегаем величиной $-M^2 u$ на фоне других растущих слагаемых.ж) Тогда из /2/ получается уравнение вида

$$u'' + \left[-\frac{(1+\varepsilon)^2 - 1/4}{x^2} - \frac{c^2}{x^{2+2\varepsilon}} \right] u = 0, \qquad /3/$$

которое мы и рассмотрим в данной работе. Из /2/ получается

$$c^2 = g^2 \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{4\pi^{2+\varepsilon}} = c^2(\varepsilon) > 0,$$

но мы рассмотрим также и случай $c^2 < 0$.

При $\varepsilon = 0$ точное решение уравнения /3/, регулярное при $x \to 0$, имеет вид /с точностью до нормировочного множителя/

$$u_{reg}(x) = x^{1/2 + \sqrt{1+c^2}} \qquad \text{при} \quad c^2 \geq -1, \;\; \varepsilon = 0, \qquad /4/$$

ж) Если M^2 не слишком велико, то можно впоследствии учесть $M^2 \neq 0$ как поправку, получая при этом выражение, аналитичное по M^2 в некоторой окрестности точки $M^2 = 0$ /см. [4]/.

$$u_{reg}(x) = x^{1/2}\cos\left[\sqrt{-(1+c^2)}\,\ln x + \alpha\right] \qquad \text{при } \ c^2<-1,\ \ \varepsilon=0, \qquad /5/$$

т.е. регулярное при $x\to 0$ решение единственно при $c^2 \geq -1$ и содержит одну произвольную константу α при $c^2<-1$. Эта ситуация подробно рассмотрена в [5].

При $\varepsilon \neq 0$ рассмотрим /3/ только в случае $\varepsilon<0$, т.к. тогда, в отличие от случая $\varepsilon>0$, стандартная теория возмущений по константе связи c^2 для решений уравнения /3/ свободна от расходимостей. При $-1<\varepsilon<0$ решение уравнения /3/, регулярное при $x\to 0$, имеет вид [5]

$$u_{reg}(x) = x^{1/2} I_\varkappa\left(-\frac{c}{\varepsilon}x^{-\varepsilon}\right) \qquad \text{при } \ c^2>0,\ -1<\varepsilon<0, \qquad /6/$$

$$u_{reg}(x) = x^{1/2} J_\varkappa\left(-\frac{\sqrt{-c^2}}{\varepsilon}x^{-\varepsilon}\right) \qquad \text{при } \ c^2<0,\ -1<\varepsilon<0, \qquad /7/$$

где $\varkappa = -\frac{1}{\varepsilon} - 1 > 0.$

3. Рассмотрим /6/ и /7/ при $\varepsilon\to -0$ и фиксированном, хотя бы и малом $x>0$. Тогда для $I_\varkappa(y)$ и $J_\varkappa(y)$ пригодны асимптотики

$$\underset{\varkappa\gg1,\ y\gg1}{I_\varkappa(y) \simeq} \frac{\exp\left[(\varkappa^2+y^2)^{1/2} - \varkappa\,\mathrm{Arsh}(\varkappa/y)\right]}{(2\pi)^{1/2}(\varkappa^2+y^2)^{1/2}}, \qquad /8/$$

$$\underset{\varkappa\gg1,\ y\gg1}{J_\varkappa(y) \simeq} \frac{\exp\left[(\varkappa^2-y^2)^{1/2} - \varkappa\,\mathrm{Arch}(\varkappa/y)\right]}{(2\pi)^{1/2}(\varkappa^2-y^2)^{1/2}} \qquad \text{при } \ \varkappa>y, \qquad /9/$$

$$\underset{\varkappa\gg1,\ y\gg1}{J_\varkappa(y) \simeq} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\cos\left[-\frac{\pi}{4} + (y^2-\varkappa^2)^{1/2} - \varkappa \arccos\left(\frac{\varkappa}{y}\right)\right]}{(y^2-\varkappa^2)^{1/2}} \qquad \text{при } \ y>\varkappa. \qquad /10/$$

Пользуясь /8/, /9/ и /10/, получим из /6/ и /7/ при $\varepsilon\to -0$

$$\underset{\varepsilon\to-0,\ c^2>0}{u_{reg}(x) =} x^{1/2+\sqrt{1+c^2}}\sqrt{-\varepsilon}\,\frac{\exp\left[-\frac{\sqrt{1+c^2}}{\varepsilon} + \left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\mathrm{Arsh}\left(\frac{1}{c}\right)\right]}{(2\pi)^{1/2}(1+c^2)^{1/4}}, \qquad /11/$$

$$\underset{\varepsilon\to-0,\ -1<c^2<0}{u_{reg}(x) =} x^{1/2+\sqrt{1+c^2}}\sqrt{-\varepsilon}\,\frac{\exp\left[-\frac{\sqrt{1+c^2}}{\varepsilon} + \left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\mathrm{Arch}\left(\frac{1}{\sqrt{-c^2}}\right)\right]}{(2\pi)^{1/2}(1+c^2)^{1/4}}, \qquad /12/$$

$$\underset{\varepsilon\to-0,\ c^2<-1}{u_{reg}(x) =} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{\sqrt{-\varepsilon}}{\left[-(1+c^2)\right]^{1/4}}\, x^{1/2}\cos\left[\sqrt{-(1+c^2)}\,\ln x + \alpha\right], \qquad /13/$$

$$\alpha = -\frac{\sqrt{-(1+c^2)}}{\varepsilon} + \left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{-c^2}}\right) - \frac{\pi}{4}. \qquad /14/$$

Сравнивая /4/ с /11/ и /12/, а /5/ с /13/, убеждаемся в том, что решение уравнения /3/ при $\varepsilon\to -0$ переходит, с точностью до перенормировочного множителя, в решение уравнения /3/ при $\varepsilon = 0$ как в случае $c^2<0$, так и в случае $c^2>0$. В том числе воспроизводится и произвольная константа α в решении /5/ при $c^2<-1$, т.к. при $\varepsilon\to -0$ и заданном в /5/ значении α_0 всегда можно выбрать монотонно возрастающую неограниченную последовательность $\{\alpha_k\}$ значений фазы /14/, таких, что $\alpha_k = \alpha_0 + 2\pi n_k$, где n_k – целое число.

Таким образом, при любых $c^2 \neq 0$ решение $u_{reg}(x)$ с точностью до бесконечного сомножителя, не зависящего от x, непрерывно по ε слева в точке $\varepsilon = 0$.

Замечание. С точностью до бесконечного сомножителя, не зависящего от x, при $c^2 \neq 0$ решение $u_{reg}(x)$ при $\varepsilon = 0$ непрерывно по ε и справа.

4. Зачастую точные решения уравнений типа /3/ неизвестны, и эти уравнения решаются с помощью теории возмущений по константе связи c^2 исходя из известных решений "свободных" уравнений /где $c^2 = 0$/. В частности, регулярное при $x \to 0$ решение уравнения /3/ можно найти с помощью интегрального уравнения

$$u_{reg}(x) = x^{3/2+\varepsilon} + \frac{1}{2+2\varepsilon}\int_0^x \left(x^{3/2+\varepsilon} y^{-1/2-\varepsilon} - x^{-1/2-\varepsilon} y^{3/2+\varepsilon}\right) \frac{c^2}{y^{2+2\varepsilon}} u_{reg}(y)\, dy. \qquad /I5/$$

Решая /I5/ итерациями, получим для $u_{reg}(x)$ обычный ряд теории возмущений по c^2. Но при $\varepsilon = 0$ члены этого ряда оказываются расходящимися на нижнем пределе интегралами. С другой стороны, при $\varepsilon < 0$ ряд теории возмущений по c^2 для $u_{reg}(x)$ свободен от расходимостей, причем $u_{reg}(x)$ аналитична по c^2 в некоторой окрестности точки $c^2 = 0$ /см. доказательство в [4]/. Поэтому важно показать, что этот свободный от расходимостей ряд переходит при $\varepsilon \to -0$ в разложение по c^2 для точного решения уравнения /3/ при $\varepsilon = 0$. Другими словами, важно показать, что размерная регуляризация применима непосредственно в членах ряда теории возмущений, где эта регуляризация и требуется для устранения расходимостей, возникающих при $\varepsilon = 0$.

При $\varepsilon < 0$ нетрудно по индукции установить вид n-го члена

итерационного ряда, возникающего из /I5/, и получить

$$u_{reg}(x) = x^{3/2+\varepsilon}\,\Gamma(\varkappa+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,\Gamma(\varkappa+n+1)}\left(\frac{c^2 x^{-2\varepsilon}}{4\varepsilon^2}\right)^n = \qquad /I6/$$

$$= \begin{cases} \Gamma(\varkappa+1)\left(\dfrac{-2\varepsilon}{\sqrt{-c^2}}\right)^{\varkappa} x^{1/2}\, J_{\varkappa}\left(\dfrac{\sqrt{-c^2}}{-\varepsilon}x^{-\varepsilon}\right) & \text{при } c^2<0,\ \varepsilon<0, \\ \Gamma(\varkappa+1)\left(-\dfrac{2\varepsilon}{c}\right)^{\varkappa} x^{1/2}\, I_{\varkappa}\left(-\dfrac{c}{\varepsilon}x^{-\varepsilon}\right) & \text{при } c^2>0,\ \varepsilon<0, \end{cases}$$

что совпадает, с точностью до нормировки, с приведенными выше точными решениями /6/ и /7/ уравнения /3/. Запишем /I6/ в виде

$$u_{reg}(x) = x^{3/2+\varepsilon}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)\ldots[1-\varepsilon(n-1)]}\left(-\frac{c^2}{4\varepsilon}x^{-2\varepsilon}\right)^n\right\}. \qquad /I7/$$

В n-м члене ряда /I7/ при $\varepsilon = 0$ имеется полюс n-го порядка. Построим рецепт устранения при $\varepsilon \to -0$ этих расходимостей в мультипликативную константу перенормировки, рассмотрев для иллюстрации члены ряда, содержащие c^2 и c^4:

$$u_2(x) = x^{3/2+\varepsilon}\left[1 - \frac{c^2}{4\varepsilon}x^{-2\varepsilon} + \left(\frac{c^2}{4\varepsilon}\right)^2 \frac{x^{-4\varepsilon}}{2(1-\varepsilon)}\right]. \qquad /I8/$$

Пусть $x > 0$ фиксировано, ε и c^2 – малые параметры, причем $|c^2/\varepsilon|$ ограничено. Разложим $x^{-2\varepsilon}$ и $x^{-4\varepsilon}$ в ряд по степеням ε и вынесем в правой части /I8/ за скобки в качестве общего множителя сумму слагаемых, не зависящих от x. При этом остающееся в скобках выражение можно выписать лишь с той же точностью, что и /I8/, т.е. сохраняя лишь второй порядок по c^2. Чтобы при этом сохранить все вклады отрицательных и нулевой степени ε, достаточно в разложении $x^{-2\varepsilon}$ и $x^{-4\varepsilon}$ сохранить также не более чем второй порядок по ε. В результате из /I8/ получим

$$u_2(x) \simeq x^{3/2+\varepsilon}\left[1-\frac{c^2}{4\varepsilon}+\left(\frac{c^2}{4\varepsilon}\right)^2\frac{1}{2(1-\varepsilon)}\right]\cdot\left[1-\right. \qquad /I9/$$

$$\left. -\frac{c^2}{4\varepsilon}\left(1+\frac{c^2}{4\varepsilon}\right)\left(-2\varepsilon\ln x+2\varepsilon^2\ln^2 x\right)+\left(\frac{c^2}{4\varepsilon}\right)^2\frac{-4\varepsilon\ln x+8\varepsilon^2\ln^2 x}{2(1-\varepsilon)}\right].$$

Переходя теперь в /I9/ к пределу $\varepsilon\to -0$, получим

$$u_2(x)\underset{\varepsilon\to-0}{\longrightarrow} Z_2(\varepsilon)\cdot x^{3/2}\left[1+\frac{c^2}{2}\ln x+\frac{c^4}{8}\left(\ln^2 x-\ln x\right)\right], \qquad /20/$$

где

$$Z_2(\varepsilon)=1-\frac{c^2}{4\varepsilon}+\left(\frac{c^2}{4\varepsilon}\right)^2\frac{1}{2(1-\varepsilon)}.$$

Выражение /20/, с точностью до перенормировочной константы $Z_2(\varepsilon)$, содержащей все расходимости при $\varepsilon\to 0$ и не зависящей от x, совпадает с соответствующими членами разложения по c^2 точного решения /4/. Таким образом, размерная регуляризация применима и к частичной сумме ряда теории возмущений для регулярного решения уравнения /3/.

5. Из рассмотрения выражений /I8/ - /20/ получаем следующие правила устранения расходимостей из частичной суммы ряда /I7/ при конечных $x>0$ и $\varepsilon\to -0$:

А. Пусть $x>0$ фиксировано, ε и c^2 - малые параметры, причем $|c^2/\varepsilon|$ ограничено. Рассмотрим n-ю частичную сумму ряда /I7/, т.е. n-е приближение теории возмущений по c^2. Разложим в этой сумме каждую величину вида $x^{-2m\varepsilon}$ / m = I, 2, ... , n / в ряд по ε, удерживая все степени ε от нулевой до n-й включительно, чтобы в дальнейших выкладках учесть все вклады отрицательных и нулевой степени ε.

Б. Вынесем за скобки в виде общего сомножителя $Z_n(\varepsilon)$ сумму слагаемых, не зависящих от x. Оставшееся в скобках выражение выпишем с той же точностью по c^2, что и исходная частичная сумма ряда /I7/, т.е. отбросим слагаемые, содержащие высшие степени c^2, начиная с $(c^2)^{n+1}$. Получим аналог выражения /I9/.

В. Переходя в полученном выражении к пределу $\varepsilon\to -0$, приходим к аналогу выражения /20/. Таким образом, n-е приближение теории возмущений по c^2 для решения уравнения /3/ при $\varepsilon\to -0$ представляется в виде произведения бесконечной, не зависящей от x константы перенормировки $Z_n(\varepsilon)$ и конечного, зависящего от x выражения, которое совпадает с соответствующим отрезком разложения точного решения /4/ в ряд по c^2.

В применимости этих правил можно убедиться непосредственно, например, вычисляя третий порядок теории возмущений по c^2.

<u>Замечание.</u> Зависимость c^2 от ε при $\varepsilon\to 0$ проявится лишь в изменении $Z_n(\varepsilon)$ за счет наличия в этом сомножителе отрицательных степеней ε. В конечном сомножителе, содержащем зависимость от x, при $\varepsilon=0$ будет фигурировать только $c_0^2=c^2(\varepsilon=0)$.

Чтобы получить явный вид константы перенормировки $Z_n(\varepsilon)$, достаточно положить x = I в n-й частичной сумме ряда /I7/:

$$Z_n(\varepsilon)=1+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!\,(1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)\ldots[1-\varepsilon(m-1)]}\left(-\frac{c^2}{4\varepsilon}\right)^m.$$

В соответствии с /I6/

$$\lim_{n\to\infty} Z_n(\varepsilon) = Z(\varepsilon) = \begin{cases} \Gamma(\varkappa+1)\left(\frac{-2\varepsilon}{\sqrt{-c^2}}\right)^{\varkappa} J_{\varkappa}\left(\frac{\sqrt{-c^2}}{-\varepsilon}\right) & \text{при } c^2<0,\ \varepsilon<0, \\ \Gamma(\varkappa+1)\left(-\frac{2\varepsilon}{c}\right)^{\varkappa} I_{\varkappa}\left(-\frac{c}{\varepsilon}\right) & \text{при } c^2>0,\ \varepsilon<0. \end{cases}$$

Отсюда легко получить асимптотики $Z(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to-0$.

6. Для сравнения с результатами размерной регуляризации просуммируем ряд /I7/, сохраняя в каждом члене ряда в коэффициенте перед $x^{-2n\varepsilon}$ самую сингулярную при $\varepsilon\to 0$ часть и первую поправку по ε:

$$u_s(x) = x^{3/2+\varepsilon}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{c^2x^{-2\varepsilon}}{4\varepsilon}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{\varepsilon}{n!}\left(-\frac{c^2x^{-2\varepsilon}}{4\varepsilon}\right)^n\right] =$$

$$= x^{3/2+\varepsilon}\left(1+\frac{c^4}{32\varepsilon}x^{-4\varepsilon}\right)\exp\left(-\frac{c^2x^{-2\varepsilon}}{4\varepsilon}\right).$$

Этот результат при $\varepsilon\to 0$ с точностью до c^4 включительно можно представить так:

$$u_s(x) \simeq e^{-\frac{c^2}{4\varepsilon}}\left(1+\frac{c^4}{32\varepsilon}\right)x^{3/2+\frac{c^2}{2}-\frac{c^4}{8}} \simeq \qquad /2I/$$

$$\simeq \left[1-\frac{c^2}{4\varepsilon}+\left(\frac{c^2}{4\varepsilon}\right)^2\frac{1+\varepsilon}{2}\right]\left[1+\frac{c^2}{2}\ln x+\frac{c^4}{8}\left(\ln^2 x-\ln x\right)\right].$$

Это выражение практически совпадает со вторым приближением теории возмущений /20/. Различие в сомножителе перенормировки, не зави-

сящем от $\varkappa$, содержится во втором порядке по ε, т.е. превышает точность вычислений в /2I/.

7. Если при построении уравнения типа /I/ для вершинной функции рассмотреть более сложный лагранжиан

$$L_{int} = g_1 :\bar\psi\gamma_5\psi\varphi: + \frac{1}{2!}g_2 :\bar\psi\psi\varphi^2: + \ldots$$

или, не меняя исходного лагранжиана, учесть поправки к пропагатору виртуального мезона в диаграммах лестничного приближения, то вместо /3/ при $n = 4$ мы получим уравнение, содержащее более сложный потенциал, например, сингулярный потенциал логарифмического типа:

$$u'' + \left[-\frac{3/4}{x^2} - \frac{c_1^2}{x^2} - \frac{c_2^2}{x^2}\ln(1/x)\right]u = 0, \quad c_2>0. \qquad /22/$$

Регулярное при $x\to 0$ решение этого уравнения имеет вид [6]:

$$u(x) = x^{1/2}\left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1+c_1^2}{c_2^2}\right]^{1/2} K_{1/3}\left\{\frac{2}{3}c_2\left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1+c_1^2}{c_2^2}\right]^{3/2}\right\}. \qquad /23/$$

При малых c_1^2 и c_2^2 и фиксированном $x>0$ оно, с точностью до второго порядка по константам связи, имеет вид:

$$u(x) = x^{3/2}\Big[1+\frac{c_1^2}{2}\ln x+\frac{c_2^2}{4}\left(\ln x-\ln^2 x\right)+$$

$$+\frac{c_1^4}{8}\left(\ln^2 x-\ln x\right)+\frac{c_1^2c_2^2}{8}\left(-2\ln x+2\ln^2 x-\ln^3 x\right)+ \qquad /24/$$

$$+\frac{c_2^4}{96}\left(3\ln^4 x-10\ln^3 x+15\ln^2 x-15\ln x\right)\Big].$$

Этот результат тоже можно получить по теории возмущений методом размерной регуляризации. Уравнение /22/ представим, например, как предел при $\varepsilon \to -0$ уравнения

$$u'' + \left[-\frac{(1+\varepsilon)^2 - 1/4}{x^2} - \frac{c_2^2/2\varepsilon}{x^{2+4\varepsilon}} - \frac{c_1^2 - c_2^2/2\varepsilon}{x^{2+2\varepsilon}} \right] u = 0, \qquad \varepsilon < 0. \qquad /25/$$

Регулярное при $x \to 0$ решение этого уравнения выражается /см. [5]/ через вырожденную гипергеометрическую функцию $\Phi(a,c;x)$

$$u(x) = \left(-\frac{ic_2}{\varepsilon\sqrt{-2\varepsilon}} \right)^{-1-\frac{1}{2\varepsilon}} x^{3/2+\varepsilon} \exp\left(\frac{ic_2}{2\varepsilon\sqrt{-2\varepsilon}} x^{-2\varepsilon} \right) \cdot \qquad /26/$$

$$\cdot\, \Phi\left[-\frac{1}{2\varepsilon} + i\, \frac{c_1^2 - c_2^2/2\varepsilon}{4\varepsilon \frac{c_2}{\sqrt{-2\varepsilon}}},\ -\frac{1}{\varepsilon};\ -\frac{ic_2}{\varepsilon\sqrt{-2\varepsilon}} x^{-2\varepsilon} \right].$$

Считая величины c_1^2 и c_2^2 сколь угодно малыми, но фиксированными, получим, что при $\varepsilon \to -0$ /26/ переходит, с точностью до бесконечного сомножителя, не зависящего от x, в выражение /23/. Если построить регулярное при $x \to 0$ решение уравнения /25/ по теории возмущений, то во втором порядке по константам связи c_1^2 и c_2^2, применяя правила, полученные в разделе 5, получим при $\varepsilon \to -0$ разложение /24/ /снова с точностью до не зависящей от x бесконечной константы перенормировки/. Таким образом, размерная регуляризация применима и в решении уравнения /22/.

8. Рассмотрев уравнение /3/ при $n \neq 4$ и уравнение /25/, мы убедились в том, что их точные регулярные при $x \to 0$ решения непрерывно /с точностью до нормировки/ переходят при $\varepsilon \to 0$ в

точные регулярные в нуле решения уравнения /3/ при $n = 4$ и уравнения /22/. При $\varepsilon < 0$ ряд теории возмущений по константам связи для этих решений свободен от расходимостей. Частичная сумма этого ряда переходит при $\varepsilon \to -0$, с точностью до бесконечной константы перенормировки, в соответствующий отрезок разложения по константам связи для точного регулярного в нуле решения уравнения /3/ при $n = 4$ или уравнения /22/. Тем самым показана применимость размерной регуляризации как для построения точного решения уравнения /3/ или /22/, так и, что особенно важно, для построения решения по теории возмущений.

Автор глубоко признателен А.Т.Филиппову за постоянное внимание к данной работе.

Литература

1. Leibbrandt G. Rev. Mod. Phys., 1975, 47, p.849.
2. Филиппов А.Т. ЭЧАЯ, 1979, 10, с.501.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, том 2, "Наука", М., 1974.
4. Де Альфаро В., Редже Т. Потенциальное рассеяние, "Мир", М., 1966.
5. Frank W.M., Land D.J., Spector R.M. Rev.Mod.Phys., 1971,43,p.36.
6. Arbuzov B.A., Filippov A.T., Khrustalev O.A. Phys.Letters, 1964, 8, p.205.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 июня 1980 года.

Нет ли пробелов в Вашей библиотеке?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги,
если они не были заказаны ранее.

Д1,2-8405	Труды IV Международного симпозиума по физике высоких энергий и элементарных частиц. Варна, 1974.	2 р. 05 к.
Р1,2-8529	Труды Международной школы-семинара молодых ученых. Актуальные проблемы физики элементарных частиц. Сочи, 1974.	2 р. 60 к.
Д6-8846	XIV совещание по ядерной спектроскопии и теории ядра. Дубна, 1975.	1 р. 90 к.
Д13-9164	Международное совещание по методике проволочных камер. Дубна, 1975.	4 р. 20 к.
Д1,2-9224	IV Международный семинар по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1975.	3 р. 60 к.
Д-9920	Труды Международной конференции по избранным вопросам структуры ядра. Дубна, 1976.	3 р. 50 к.
Д9-10500	Труды II Симпозиума по коллективным методам ускорения. Дубна, 1976.	2 р. 50 к.
Д2-10533	Труды X Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Баку, 1976.	3 р. 50 к.
Д13-11182	Труды IX Международного симпозиума по ядерной электронике. Варна, 1977.	5 р. 00 к.
Д17-11490	Труды Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1977.	6 р. 00 к.
Д6-11574	Сборник аннотаций XV совещания по ядерной спектроскопии и теории ядра. Дубна, 1978.	2 р. 50 к.
Д3-11787	Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978.	3 р. 00 к.
Д13-11807	Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.	6 р. 00 к.
	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна 1978. /2 тома/	7 р. 40 к.
Д1,2-12036	Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна 1978.	5 р. 00 к.
Р18-12147	Труды III совещания по использованию ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач.	2 р. 20 к.
Д1,2-12450	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.	3 р. 00 к.
Р2-12462	Труды V Международного совещания по нелокальным теориям поля. Алушта, 1979.	2 р. 25 к.
Д-12831	Труды Международного симпозиума по фундаментальным проблемам теоретической и математической физики. Дубна, 1979.	4 р. 00 к.
Д-12965	Труды Международной школы молодых ученых по проблемам ускорителей заряженных частиц. Минск, 1979.	3 р. 00 к.
Д11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1979.	3 р. 50 к.
Д4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:

101000 Москва, Главпочтамт, п/я 70,

издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники