



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

4519/2-80

22/9-80

P2-80-419

Н.С. Шавохина

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА
ДЛЯ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ
В ТРЕХМЕРНОМ МИРЕ МИНКОВСКОГО

Направлено в журнал "Известия высших учебных заведений. Физика"

1980

Шавохина Н.С.

P2-80-419

Краевая задача для минимальной поверхности в трехмерном мире Минковского

Получена система двух релятивистских уравнений, описывающих плоское движение двух одинаковых тел с линейным потенциалом взаимодействия. К этой системе приводит краевая задача для минимальной поверхности в мире Минковского. Рассмотрен нерелятивистский предел.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1980

В работах /1-4/ поставлена краевая задача для минимальной поверхности в мире Минковского, эквивалентная релятивистской задаче двух тел с линейным потенциалом взаимодействия. В данной работе рассматривается случай двух одинаковых тел, когда можно считать, что собственная ось времени /3/ лежит на минимальной поверхности. При этом условии поверхность задается уравнением

$$\vec{r} = \frac{c}{2} [\vec{B}(t - \frac{\eta}{c}) - \vec{B}(t + \frac{\eta}{c})] = \vec{r}_0(\eta, t), \quad /1/$$

где c - скорость света, t - время, параметр η меняется в пределах

$$-\xi(t) \leq \eta \leq \xi(t), \quad /2/$$

а функция $\vec{B}(t)$ удовлетворяет условию

$$|\dot{\vec{B}}(t)| = 1. \quad /3/$$

Предполагается, что первая квадратичная форма поверхности /1/ регулярна.

Граничные линии $\eta = -\xi(t)$ и $\eta = \xi(t)$ поверхности /1/ представляют собой мировые траектории первого и второго тел, массы покоя которых одинаковы и равны m . Пусть

$$\vec{r}(t) = \frac{c}{2} [\vec{B}(v(t)) - \vec{B}(u(t))], \quad /4/$$

где

$$v(t) = t - \frac{\xi(t)}{c}, \quad u(t) = t + \frac{\xi(t)}{c}. \quad /5/$$

Тогда импульс $\vec{p}(t)$ второго тела равен

$$\vec{p}(t) = p^0(t) \dot{\vec{r}}(t), \quad /6/$$

где

$$p^0(t) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \dot{\vec{r}}^2}}, \quad /7/$$

а импульс первого тела равен $-\vec{p}(t)$.

В силу нечетности функции $\vec{r}_0(\eta, t)$ относительно первого аргумента в рассматриваемом случае имеем не два, а только одно краевое условие, а именно:

$$\vec{p}(t) = \frac{G}{2} [\vec{B}(v(t)) + \vec{B}(u(t))], \quad /8/$$

где G - постоянная взаимодействия.

Задача состоит в том, чтобы найти функции $\xi(t)$ и $\vec{B}(t)$ и тем самым описать движение тел.

Достаточно, однако, найти функции $\xi(t)$ и $\frac{\partial}{\partial t} \vec{r}_0(\eta, t)$. Действительно, тогда мы будем знать функции $\vec{p}(t)$ и $\frac{\partial}{\partial t} \vec{r}_0(\eta, t)$, а следовательно, и

$$\vec{B}(t) = \frac{\vec{p}(t)}{G} + \frac{1}{c^2} \int_0^{\xi(t)} \frac{\partial \vec{r}_0(\eta, t)}{\partial t} d\eta. \quad /9/$$

Последняя формула следует из краевого условия /8/ и очевидного равенства

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{r}_0(\eta, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{2} [\vec{B}(t - \frac{\eta}{c}) + \vec{B}(t + \frac{\eta}{c})]. \quad /10/$$

Далее будем считать, что мир Минковского трехмерен, т.е. будем рассматривать движение тел в некоторой плоскости, например, $z = 0$. В этом случае удобно воспользоваться векторными функциями /5/:

$$\vec{e}(a) = \{\cos a, \sin a\} \quad \text{и} \quad \vec{g}(a) = \{-\sin a, \cos a\}.$$

В силу условия /3/ полагаем

$$\vec{B}(t) = -\vec{e}(a(t)). \quad /11/$$

Обозначая

$$\Delta(t) = \frac{a(u(t)) - a(v(t))}{2} = \frac{1}{2} \dot{B}(u(t)) \dot{B}(v(t)), \quad /12/$$

$$\phi(t) = \frac{a(u(t)) + a(v(t))}{2}$$

и дифференцируя /4/ и /8/, получаем

$$\dot{\vec{r}}(t) = c [\dot{\vec{g}}(\phi) \sin \Delta + \frac{\dot{\xi}}{c} \vec{e}(\phi) \cos \Delta], \quad /13/$$

$$\dot{\vec{p}}(t) = -G [\dot{\vec{e}}(\phi) \cos \Delta + \frac{\dot{\xi}}{c} \dot{\vec{g}}(\phi) \sin \Delta]. \quad /14/$$

В силу регулярности первой квадратичной формы поверхности /1/ имеем

$$-\frac{\pi}{2} < \Delta(t) < \frac{\pi}{2}. \quad /15/$$

Согласно /7/ и /13/

$$p^0 = \frac{m}{\sqrt{\dot{u}\dot{v} \cos \Delta}}. \quad /16/$$

Подставляя это выражение в закон сохранения энергии /3/

$$p^0(t) + \frac{G\xi(t)}{c^2} = \mathcal{E}, \quad /17/$$

получаем связь между функциями ξ и Δ .

Из /6/ и /17/ следует, что

$$p^0 \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{p}} + \frac{G\dot{\xi}}{c^2} \dot{\vec{r}}.$$

На основании /13/ и /14/ отсюда находим

$$p^0 \ddot{\vec{r}} = -G \cos \Delta \dot{u} \dot{v} \vec{e}(\phi). \quad /18/$$

Сравнивая этот результат с производной от /13/, находим

$$\dot{\Delta} + \frac{\dot{\xi}}{c} \dot{\phi} = 0, \quad /19/$$

$$c \dot{\phi} \operatorname{tg} \Delta = \frac{\dot{\xi}}{\dot{u}\dot{v}} + \frac{G}{p^0}. \quad /20/$$

Нетрудно проверить, что /20/ следует из /16/, /17/ и /19/. Согласно /14/ и /20/ имеем

$$\dot{a}(u) \dot{u}^2 = \dot{a}(v) \dot{v}^2. \quad /21/$$

Предполагая, что $\dot{\alpha}(t)$ нигде в нуль не обращается, запишем $\alpha(t)$ в виде

$$\alpha(t) = \alpha_0 \pm \int_0^t \dot{F}^2(\lambda) d\lambda. \quad /22/$$

Так как $\dot{u}\dot{v} > 0$ и $\dot{F} \neq 0$, из /21/ и /22/ следует, что

$$\dot{F}(u) \dot{u} = \dot{F}(v) \dot{v}, \quad /23/$$

а значит

$$\frac{c}{2} [F(u) - F(v)] = \mu, \quad /24/$$

где $\mu = \text{const}$.

Итак, задача свелась к следующей системе уравнений для функций $\xi(t)$ и $F(t)$:

$$\frac{m}{\sqrt{\dot{u}(t)\dot{v}(t)\cos\Delta(t)}} + \frac{G\xi(t)}{c^2} = \mathcal{E}, \quad /25/$$

$$-\frac{c}{2} [F(u(t)) - F(v(t))] = \mu, \quad /26/$$

где

$$\Delta(t) = \pm \int_{v(t)}^{u(t)} \dot{F}^2(\lambda) d\lambda. \quad /27/$$

В нерелятивистском пределе при $c \rightarrow \infty$ получаем

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\dot{u}\dot{v}\cos\Delta}} - 1 \right] c^2 \rightarrow \frac{\dot{\xi}}{2} + \frac{\dot{F}\xi}{2} = \frac{1}{2} |\dot{r}|, \quad /28/$$

$$\frac{c}{2} [F(u) - F(v)] \rightarrow \dot{F}(t) \xi(t),$$

$$(\mathcal{E} - m) c^2 \rightarrow E, \quad \xi \rightarrow |\vec{r}|.$$

Таким образом, при $c \rightarrow \infty$ формулы /25/, /26/ и /27/ приводят к закону сохранения энергии:

$$\frac{m}{2} \left[\dot{\xi}^2 + \frac{\mu^2}{\xi^2} \right] + G\xi = E$$

и закону сохранения площадей:

$$\dot{F}^2 \xi^2 = \mu^2,$$

хорошо известным из классической механики одной точки в центральном поле постоянных по модулю сил.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черников Н.А., Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-10375, Дубна, 1977.
2. Черников Н.А., Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-11295, Дубна, 1978.
3. Черников Н.А., Шавохина Н.С., ОИЯИ, Р2-12813, Дубна, 1979.
4. Черников Н.А., Шавохина Н.С. ТМФ, 1980, т.42, №1.
5. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. Физматгиз, М., 1958.

**ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ
ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ**

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники

Нет ли пробелов в Вашей библиотеке?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

D1,2-8405	Труды IV Международного симпозиума по физике высоких энергий и элементарных частиц. Варна, 1974.	2 р. 05 к.
P1,2-8529	Труды Международной школы-семинара молодых ученых. Актуальные проблемы физики элементарных частиц. Сочи, 1974.	2 р. 60 к.
D6-8846	XIV совещание по ядерной спектроскопии и теории ядра. Дубна, 1975.	1 р. 90 к.
D13-9164	Международное совещание по методике проволочных камер. Дубна, 1975.	4 р. 20 к.
D1,2-9224	IV Международный семинар по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1975.	3 р. 60 к.
D-9920	Труды Международной конференции по избранным вопросам структуры ядра. Дубна, 1976.	3 р. 50 к.
D9-10500	Труды II Симпозиума по коллективным методам ускорения. Дубна, 1976.	2 р. 50 к.
D2-10533	Труды X Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Баку, 1976.	3 р. 50 к.
D13-11182	Труды IX Международного симпозиума по ядерной электронике. Варна, 1977.	5 р. 00 к.
D17-11490	Труды Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1977.	6 р. 00 к.
D6-11574	Сборник аннотаций XV совещания по ядерной спектроскопии и теории ядра. Дубна, 1978.	2 р. 50 к.
D3-11787	Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978.	3 р. 00 к.
D13-11807	Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.	6 р. 00 к.
	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна 1978. /2 тома/	7 р. 40 к.
D1,2-12036	Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна 1978.	5 р. 00 к.
P18-12147	Труды III совещания по использованию ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач.	2 р. 20 к.

Д1,2-12450	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.	3 р. 00 к.
P2-12462	Труды V Международного совещания по нелокальным теориям поля. Алушта, 1979.	2 р. 25 к.
Д-12831	Труды Международного симпозиума по фундаментальным проблемам теоретической и математической физики. Дубна, 1979.	4 р. 00 к.
Д-12965	Труды Международной школы молодых ученых по проблемам ускорителей заряженных частиц. Минск, 1979.	3 р. 00 к.
Д11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1979.	3 р. 50 к.
Д4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:

101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79,

издательский отдел Объединенного института ядерных исследований