сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-80-397

А.Н.Квинихидзе, Б.А.Маградзе, В.А.Матвеев,
М.А.Мествиришвили, А.Н.Тавхелидзе

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПРИЧИННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И ИХ АВТОМОДЕЛЬНАЯ АСИМПТОТИКА В ЛЕСТНИЧНОЙ φ^3 -МОДЕЛИ

1980

ВВЕДЕНИЕ

Обнаруженные в экспериментах по глубоконеупругому взаимодействию лептонов с адронами масштабные закономерности привели к необходимости изучения автомодельных асимптотик в квантовой теории поля. Наиболее полно эта проблема исследована в работах [1], где были найдены достаточные и необходимые для существования автомодельной асимптотики условия, предъявляемые к спектральным функциям в представлении Йоста-Лемана-Дайсона /ЙЛД/ для матричных элементов коммутатора токов:

$$\langle p|[j(x),\, j(0)]|p\rangle = \int\limits_0^\infty d\lambda^2 \int\limits_0^\infty d\vec{u}\, D(x,\lambda^2)\, e^{i\vec{u}\cdot\vec{x}}\, \Psi(\vec{u},\lambda^2).$$

Одним из важных результатов этих работ явилось обоснование взаимосвязи автомодельного поведения и характера сингулярностей коммутатора локальных токов на световом конусе. В дальнейшем в работах [2] сделано нетривиальное обобщение данных результатов, устанавливающих взаимно однозначное соответствие между автомодельной асимптотикой формфакторов и сингулярностями коммутатора токов на световом конусе. Кроме того, на основе введенного в этих работах понятия квазиасимптотики обобщенной функции и тауберовых теорем найден наиболее широкий класс автомодельных спектральных функций в представлении ЙЛД. Изучению масштабных свойств инклюзивных процессов в области высоких энергий и больших передач импульса на основе представления ЙЛД посвящены работы [3].

Отметим, что спектральные функции представления ЙЛД, вычисленные в рамках теории возмущения [1,11], относятся к пространству обобщенных функций, введенных в работах [1,2]. В связи с проблемой описания нарушенных масштабных законов представляет интерес изучение свойств спектральных функций вне теории возмущения. Определенные возможности в этом направлении дает метод суммирования тех или иных классов диаграмм теории возмущения с помощью уравнения Бете-Солпитера. В последние годы в ряде моделей были получены точные решения лестничных уравнений для мнимой части амплитуды рассеяния вперед в глубоконеупругой области [4]. Однако уравнение для мнимой части амплитуды рассеяния вперед виртуальной частицы с импульсом q определяет неупругий формфактор $F(q,p)$ лишь в области $q^2 < 0$. Чтобы найти спектральные функции представления ЙЛД, соответствующие этим решениям, необходимо восстановить их поведение в области $q^2 > 0$.

В работах [5] значения формфакторов, найденных в лестничном приближении в ϕ^3- и ϕ^4-моделях, были продолжены в область $q^2>0$ с помощью предложенного ранее метода [6]. С помощью формулы обращения в обеих моделях найдено и изучено асимптотическое поведение весовой функции представления ЙЛД. Показано, что в модели ϕ^4, для которой масштабная инвариантность нарушена, спектральная функция $\Psi(\vec{u},\lambda^2)$ при $\lambda^2 \to \infty$ не факторизуется и ее рост по λ^2 существенно зависит от $\vec{u}$.

В настоящей работе предложен метод вывода интегрального уравнения непосредственно для спектральной плотности причинных распределений в скалярной ϕ^3-модели. Имея в виду, что для рассматриваемого класса диаграмм теории возмущений справедливо представление Дезера-Гильберта-Сударшана /ДГС/ [7,8], мы будем исходить из следующего интегрального представления для одночастичного матричного элемента коммутатора двух скалярных токов:

$$<p|[j(x),j(0)]|p> = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty d\sigma D(x,\sigma)\int_{-1}^{+1} d\alpha\, e^{i\alpha(p\cdot x)}\ H(\alpha,\sigma).$$

Необходимо отметить, однако, что представление ДГС более узкое, чем представление ЙЛД, и использование его накладывает определенные ограничения на поведение соответствующих амплитуд /см., например, [9]/.

В лестничном приближении в случае безмассовой обменной частицы полученное интегральное уравнение решено точно. Найдены в замкнутом виде спектральные функции представлений ДГС и ЙЛД, получено соответствующее им разложение коммутатора токов на световом конусе. Отметим, что точные уравнения для весовых функций представления ЙЛД изучались ранее в работах [10] в конформно инвариантной модели.

Следует подчеркнуть, что исследование автомодельного асимптотического поведения в моделях теории поля на основе интегральных уравнений для причинных распределений имеет ряд преимуществ. Главное из них состоит в том, что такие общие требования квантовой теории поля, как спектральность, локальность и причинность, выражаются здесь в виде определенных граничных условий для весовых функций причинного распределения, удовлетворяющих интегральным или сводящихся к ним дифференциальным уравнениям.

1. ВЫВОД ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим интегральное уравнение типа Бете-Солпитера для амплитуды рассеяния вперед виртуальной частицы с импульсом q:

$$T(q,p) = \Sigma(q,p) - \frac{i}{(2\pi)^4}\int dK\, \frac{\Sigma_1(q,k)\,T(k,p)}{(m^2-k^2-i\epsilon)^2},$$

$$\Sigma(q,p) = \Sigma_1(q,p) + \Sigma_1(p,-p), \qquad /1.1/$$

$$T(q,p) = i\int d^4x\, e^{iq\cdot x} <p|T\, j(x)\,.j(0)|p>,$$

$$j(x) = -i\frac{\delta S}{\delta\phi(x)}S^+, \quad S = T(\exp\int\mathfrak{L}(z)dz). \qquad /1.2/$$

Здесь $\Sigma(q,p)$ обозначает бесконечную сумму двухчастично неприводимых диаграмм Фейнмана. Будем предполагать, что для амплитуды $T(q,p)$ и соответствующего фурье-образа матричного элемента коммутатора токов справедливо представление ДГС [7]:

$$T(q,p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} d\alpha\int_0^\infty d\lambda^2\, \frac{H(\alpha,\lambda^2)}{\lambda^2-(q+\alpha p)^2-i\epsilon}, \qquad /1.3/$$

$$W(q,p) = \int d^4x\, e^{iq\cdot x}<p|[j(x),j(0)]|p> =$$

$$= \int_{-1}^{+1} d\alpha\int_0^\infty d\lambda^2\, H(\alpha,\lambda^2)\,\epsilon(q_0+\alpha p_0)\,\delta[(q+\alpha p)^2-\lambda^2]. \qquad /1.4/$$

В работе [8] показано, что величина $\Sigma(q,p)$ в любом конечном порядке теории возмущения имеет представление ДГС:

$$\Sigma(q,p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} d\alpha\int_0^\infty d\lambda^2\, \frac{H_0(\alpha,\lambda^2)}{\lambda^2-(q+\alpha p)^2-i\epsilon} \qquad /1.5/$$

/см. также приложение/. В силу симметрии амплитуды относительно замены $p\to -p$ спектральные функции H и H_0 удовлетворяют свойству четности:

$$H(-\alpha,\lambda^2) = H(\alpha,\lambda^2),$$
$$H_0(-\alpha,\lambda^2) = H_0(\alpha,\lambda^2). \qquad /1.6/$$

Подставим выражение /1.3/ в интегральный член уравнения /1.1/ и переставим порядок интегрирования с учетом свойства /1.6/:

$$
-\frac{i}{(2\pi)^4}\int\frac{dk\,\Sigma_1(q,k)\,T(k,p)}{(m^2-k^2-i\epsilon)^2}=\frac{1}{4\pi}\int d\alpha' d\lambda'^2 H(\alpha',\lambda'^2)\times
$$

$$
\times\left\{-\frac{i}{(2\pi)^4}\int\frac{dk\,\Sigma_1(q,k)}{(m^2-k^2-i\epsilon)\,(\lambda'^2-(k+\alpha' p)^2-i\epsilon)}-\right.
\qquad /1.7/
$$

$$
\left.-\frac{i}{(2\pi)^4}\int\frac{dk\,\Sigma_1(q,k)}{(m^2-k^2-i\epsilon)^2(\lambda'^2-(k-\alpha' p)^2-i\epsilon)}\right\}.
$$

Выражение в фигурных скобках соответствует сумме "квадратных диаграмм"/рис.1/.В любом конечном порядке теории возмущения

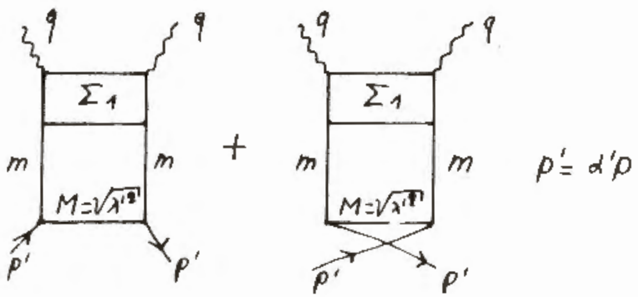


Рис.1

для данной суммы справедливо представление ДГС /см. приложение/. Следовательно, запишем ее в виде представления

$$
\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}d\alpha\int_0^\infty\frac{d\lambda^2 H_1(\alpha,\lambda^2;\alpha',\lambda'^2)}{\lambda^2-(q+\alpha\alpha' p)^2-i\epsilon}. \qquad /1.8/
$$

С помощью /1.8/ выражению /1.7/ после изменения порядка интегрирования можно придать вид представления ДГС:

$$
-\frac{i}{(2\pi)^4}\int\frac{dk\,\Sigma_1(q,k)\,T(k,p)}{(m^2-k^2-i\epsilon)^2}=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-1}^{+1}d\alpha\int\frac{d\lambda^2}{\lambda^2-(q+\alpha p)^2-i\epsilon}\times
$$

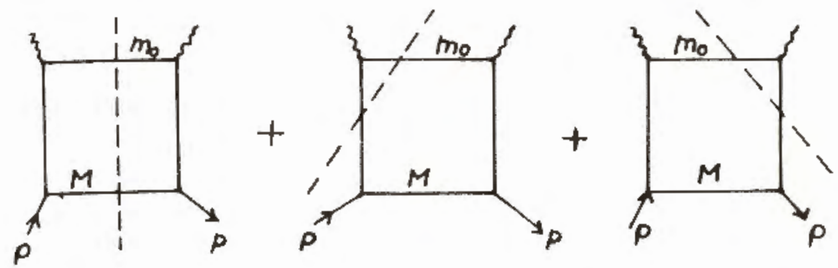
$$
\times\int_{|\alpha|}^{1}\frac{d\alpha'}{\alpha'}\int_0^\infty d\lambda'^2 H_1(\alpha/\alpha',\lambda^2;\alpha',\lambda'^2)\,H(\alpha',\lambda'^2).
$$

Из уравнения /1.1/ и предположения об однозначности представления /1.3/ найдем следующее интегральное уравнение для спектральной функции представления ДГС:

$$
H(\beta,\sigma)=H_0(\beta,\sigma)+\frac{1}{2\pi}\int_\beta^1\frac{d\beta'}{\beta'}\int_0^\infty d\sigma' H_1(\alpha/\alpha',\lambda^2;\alpha',\lambda'^2)H(\alpha',\lambda'^2). \qquad /1.9/
$$

Здесь введены обозначения $\beta=|\alpha|$, $\sigma=\lambda^2$, $\beta'=|\alpha'|$, $\sigma'=\lambda'^2$.

Заметим, что уравнение /1.9/ невозможно получить на основе уравнения лишь для мнимой части амплитуды рассеяния вперед. Действительно, при вычислении мниной части уравнения /1.1/ часть членов, существенных в области положительных q^2, обычно опускается. Уже в четвертом порядке теории возмущения итерационный ряд уравнения для мнимой части не содержит пересеченных фейнмановских графов типа б, указанных на рис.2 /см. приложение /. Они существенны для обеспечения причинности вклада от квадратных диаграмм в коммутатор токов.



а б

Рис.2

2. ЛЕСТНИЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

В лестничном приближении имеем

$$
H_0(\beta,\sigma)=2\pi g^2\delta(1-\beta)\delta(\sigma-m_0^2),
$$

где m_0 -масса обменной частицы. Удобно переопределить искомую функцию:

$$H(\beta,\sigma) = H_0(\beta,\sigma) + \Psi(\beta,\sigma). \qquad /2.1/$$

Лестничное уравнение для величины Ψ согласно /1.9/ запишется в виде

$$\Psi(\beta,\sigma) = \Psi_0(\beta,\sigma) + \frac{1}{2\pi}\int_\beta^1 \frac{d\beta'}{\beta'}\int_0^\infty d\sigma' K(\beta,\sigma;\beta',\sigma')\Psi(\beta',\sigma'). \qquad /2.2/$$

Носитель функции $\Psi(\beta,\sigma)$ сосредоточен на множестве

$$\beta,\sigma \in (0<\beta\le 1, \quad \sigma \ge (m_0+\sqrt{\beta m_0^2+(1-\beta)(m^2-\beta p^2)}\ )^2),$$

$$\Psi_0(\beta,\sigma) = g^4 H_1(\beta,\sigma;\beta'=1,\ \sigma'=m_0^2) =$$

$$= \frac{g^4(1-\beta)}{8\pi\ell^2}\ \frac{\partial}{\partial\sigma}\left\{\theta(\sigma-(m_0+\ell)^2)\cdot \frac{\sigma-\ell^2-m_0^2}{\sqrt{(\sigma+\ell^2-m_0^2)^2-4\sigma\ell^2}}\right\},$$

$$\ell^2 = \beta m_0^2 + (1-\beta)(m^2-\beta p^2),$$

$$K(\beta,\sigma;\beta',\sigma') = g^2 H_1(\beta/\beta',\sigma;\ \beta',\sigma') =$$

$$= \frac{g^2(\beta'-\beta)}{8\pi\beta' L^2}\ \frac{\partial}{\partial\sigma}\left\{\theta(\sigma-(m_0+L)^2)\ \frac{\sigma-L^2-m_0^2}{\sqrt{(\sigma+L^2-m_0^2)^2-4\sigma L^2}}\right\},$$

$$L^2 = \frac{\beta\sigma'+(\beta'-\beta)(m^2-\beta'\beta p^2)}{\beta'}. \qquad /2.3/$$

Величина $H_1(\beta,\sigma;\beta',\sigma')$ в лестничном приближении в случае $m^2>p^2$ вычислена в приложении. Интегральное уравнение /2.2/ - уравнение Вольтерра, поэтому ряд Неймана для величины $\Psi(\beta,\sigma)$ дает решение. При фиксированном значении переменной σ решение уравнения содержит конечное число членов $n(\sigma)$:

$$n \le \frac{1}{\ln 4}\ln\left[\frac{(\sqrt{\sigma}-m_0)^2-(1-\beta)(m^2-\beta p^2)}{m_0^2\beta}\right], \qquad \beta>0.$$

В случае, когда обменная масса $m_0 = 0$, уравнение /2.2/ значительно упрощается и принимает вид

$$\Psi(\beta,\sigma) = \frac{g^4\theta(1-\beta)}{8\pi(m^2-\beta p^2)}\delta(\sigma-(1-\beta)(m^2-\beta p^2)) + \qquad /2.4/$$
$$+\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{\theta(1-\beta)}{\beta\sigma}\int_\beta^1\frac{d\beta'}{\beta'}(\beta'-\beta)\int_0^\infty d\sigma'\delta(\sigma'-\frac{\sigma\beta'-(\beta'-\beta)(m^2-\beta'\beta p^2)}{\beta})\Psi(\beta',\sigma').$$

Легко увидеть, что решение уравнения /2.4/ имеет автомодельный характер:

$$\Psi(\beta,\sigma) = \theta(1-\beta)\delta(\sigma-(1-\beta)(m^2-\beta p^2))\frac{f(\beta)}{m^2-\beta p^2}, \qquad /2.5/$$

где функция $f(\beta)$ удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра второго рода:

$$f(\beta) = \frac{g^4}{8\pi} + \frac{g^2}{(4\pi)^2}\ \frac{1}{1-\beta}\int_\beta^1\frac{d\beta'}{\beta'^2}\ \frac{(\beta'-\beta)}{(m^2-\beta' p^2)}f(\beta'). \qquad /2.6/$$

Уравнение /2.6/ эквивалентно следующей граничной задаче:

$$(1-\beta)f''(\beta) - 2f'(\beta) - \frac{g^2}{(4\pi)^2}\ \frac{f(\beta)}{\beta^2(m^2-\beta p^2)} = 0, \qquad /2.7/$$

$$f(\beta=1) = \frac{g^4}{8\pi}, \qquad f'(\beta=1) = -\frac{g^6}{4(4\pi)^3}\ \frac{1}{(m^2-p^2)}. \qquad /2.8/$$

После замены переменной уравнение /2.7/ переходит в гипергеометрическое уравнение:

$$x(1-x)\phi''(x) + 2(1-x)\phi'(x) + \gamma\phi(x) = 0,$$

где $\gamma = \frac{g^2}{(4\pi)^2 m^2}$, $x = -\frac{m^2}{m^2 - p^2}\frac{1-\beta}{\beta}$.

Решение уравнения /2.7/, удовлетворяющее условиям /2.8/, имеет следующий вид:

$$f(\beta) = \frac{g^4}{8\pi} F\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \gamma},\ \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \gamma},\ 2;\ -\frac{m^2}{m^2 - p^2}\cdot\frac{1-\beta}{\beta}\right),$$

где $F(a, b, c;\ z)$ - гипергеометрическая функция.

Окончательно для спектральной функции $\Psi(\beta, \sigma)$ с учетом /2.5/ находим выражение в простом и замкнутом виде:

$$\Psi(\beta,\sigma) = \frac{g^4 \theta(1-\beta)}{8\pi (m^2 - \beta p^2)} \delta(\sigma - (1-\beta)(m^2 - \beta p^2)) \times$$

$$\times F\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \gamma},\ \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \gamma},\ 2;\ -\frac{m^2(1-\beta)}{(m^2 - p^2)\beta}\right). \qquad /2.9/$$

Согласно /2.9/ спектральная функция $\Psi(\beta, \sigma)$ обладает квазиасимптотикой [2] порядка /-1/ на бесконечности. В случае представления ДГС результаты работ [1,2], связывающие поведение формфактора /1.4/ в автомодельной области с квазипределом спектральной функции представления, несколько меняются. Имеем

$$W(\nu, \xi) \sim \left(\frac{\nu}{2}\right)^a \int_{-1}^{+1} d\beta\, H_a(\beta) f_{a+1}(\beta - \xi), \qquad \nu = q\cdot p \to \infty,\ -q^2 \to \infty,\ \xi = -\frac{q^2}{2\nu} = \mathrm{const}.,$$

$$H_a(\beta) = q \lim H^a(\beta, \lambda^2),$$

$$H^a(\beta, \lambda^2) = f_{-a} * H(\beta, \lambda^2), \qquad f_a(x) = \frac{\theta(x)\, x^{\sigma - 1}}{\Gamma(\sigma)}.$$

В случае /2.9/ получим [4]

$$W(\nu, \xi) \sim \frac{1}{2\nu} \tilde{\Phi}(\xi), \qquad \tilde{\Phi}(\xi) = \int_0^\infty d\sigma\, \Psi(\xi, \sigma),$$

$$\tilde{\Phi}(\xi) = \frac{g^4}{8\pi} \frac{1}{m^2 - \xi p^2} F\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \gamma},\ \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \gamma},\ 2, -\frac{m^2}{m^2 - p^2}\ \frac{1-\xi}{\xi}\right).$$

Решение /2.9/ с учетом /2.1/ приводит к следующим интегральным представлениям для величин /1.3/, /1.4/:

$$T(q,p) = T_0(q,p) + \frac{1}{2\pi}\int_0^1 d\beta \frac{1}{m^2 - \beta p^2} F\left(A, 1-A, 2;\ -\frac{m^2}{m^2 - p^2}\cdot\frac{1-\beta}{\beta}\right) \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{(1-\beta)m^2 - \beta p^2 - q^2 - 2(q\cdot p)\beta - i\epsilon} + \frac{1}{(1-\beta)m^2 - \beta p^2 - q^2 + 2(q\cdot p)\beta - i\epsilon} \right\},$$

$$W(q,p) = W_0(q,p) +$$

$$+ \frac{g^4}{8\pi}\left(\epsilon(q_0 + p_0)\theta((q+p)^2)\theta(m^2 - q^2) - \epsilon(q_0)\theta(q^2 - m^2)\theta(-(q+p)^2)\right) \times$$

$$\times \frac{1}{(m^2 - p^2)(m^2 - q^2)} F\left(1+A, 2-A, 2;\ -\frac{m^2}{(m^2 - p^2)}\cdot\frac{(q+p)^2}{(m^2 - q^2)}\right) + \qquad /2.10/$$

$$+ \frac{g^4}{8\pi}\left(\epsilon(q_0 - p_0)\theta((q-p)^2)\theta(m^2 - q^2) - \epsilon(q_0)\theta(q^2 - m^2)\theta(-(q-p)^2)\right) \times$$

$$\times \frac{1}{(m^2 - p^2)(m^2 - q^2)} F\left(1+A, 2-A, 2;\ -\frac{m^2 \cdot (q-p)^2}{(m^2 - p^2)(m^2 - q^2)}\right).$$

Здесь T_0 и W_0 -борновские приближения для матричных элементов /1.3/, /1.4/; $A = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \gamma}$. При получении /2.10/ мы использовали формулы преобразования для гипергеометрических функций. В области $(q+p)^2 > 0, \nu > 0$ фурье-образ матричного элемента коммутатора токов совпадает с мнимой частью амплитуды рассеяния вперед, и мы приходим к результату работы [5]:

$$F(q,p) = F_0(q,p) + \frac{g^4}{8\pi}\left(\frac{\theta((q+p)^2)\theta(m^2 - q^2)}{(m^2 - p^2)(m^2 - q^2)} F\left(1+A, 2-A, 2;\ -\frac{m^2 \quad (q+p)^2}{(m^2 - p^2)(m^2 - q^2)}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\theta(-(q-p)^2)\theta(q^2 - m^2)}{(m^2 - p^2)(q^2 - m^2)} F\left(1+A, 2-A, 2;\ -\frac{m^2}{(m^2 - p^2)}\cdot\frac{(q-p)^2}{(m^2 - q^2)}\right)\right).$$

Отметим, что свойства этого выражения в различных кинематических областях были изучены в работах [4,5]. С помощью /2.9/ найдем также матричный элемент коммутатора токов:

$$\tilde{W}(x,p) = \langle p|[j(x), j(0)]|p\rangle = \frac{2g^2}{i} D(x,0)\cos(p\cdot x) +$$

$$+ \frac{g^4}{8\pi^2(m^2-p^2)i}\int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha}\cos(\alpha p\cdot x)\, F(1+A, 2-A, 2; -\frac{m^2}{m^2-p^2}\,\frac{1-\alpha}{\alpha}) \times$$
$$\times D(x, \sqrt{(1-\alpha)(m^2-\alpha p^2)})\,. \qquad /2.11/$$

Здесь $D(x,\sqrt{(1-\alpha)(m^2-\alpha p^2)})$ -перестановочная функция свободных полей с массой $\sqrt{(1-\alpha)(m^2-\alpha p^2)}$. Подставим в /2.11/ известное разложение в ряд величины $D(x,\sqrt{(1-\alpha)(m^2-\alpha p^2)})$ и изменим порядок интегрирования и суммирования, что справедливо в силу равномерной сходимости ряда с учетом конечной области интеграции по переменной α. В результате получим

$$W(x,p) = (\frac{2g^2}{i}\cos(p\cdot x) + \frac{g^4}{8\pi^2(m^2-p^2)i}\int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha}\cos(\alpha p\cdot x) \times$$
$$\times F(1+A, 2-A, 2; -\frac{m^2}{(m^2-p^2)}\,\frac{1-\alpha}{\alpha}))\, D(x,0) - \qquad /2.12/$$
$$- \frac{g^4}{8\pi^2(m^2-p^2)i}\,;\,\frac{\epsilon(x_0)\,\theta(x^2)}{8\pi}\sum_{k=0}^{\infty} C_k(p\cdot x)\,(\sqrt{x^2})^k\,,$$

где

$$C_k(p\cdot x) = \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1)\,2^k}\int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha}\cos(\alpha p\cdot x) \times \qquad /2.13/$$
$$\times F(1+A, 2-A, 2; -\frac{m^2}{(m^2-p^2)}\,\frac{1-\alpha}{\alpha})\,(\sqrt{(1-\alpha)(m^2-\alpha p^2)})^{2+k}\,.$$

Первое слагаемое в выражении /2.12/ определяет ведущую асимптотику коммутатора токов в окрестности светового конуса $x^2 \simeq 0$. Очевидно, что ряд /2.12/ определяет целую функцию по переменной $z = \sqrt{x^2}$. Условие сходимости интегралов /2.11/, /2.13/ приводит к ограничению $g^2 < 32\pi^2 m^2$.

Вычислим теперь спектральную функцию представления ЙЛД Φ для матричного элемента коммутатора токов /2.11/. Подставляя /2.11/ в формулу обращения, находим

$$\Phi(\rho,\lambda^2) = \frac{2i}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\lambda^2}\{\theta(\lambda^2)\int_0^{\infty} dx^2 J_0(\sqrt{x^2\lambda^2})\int_0^{\infty} dr\, r\sin(r\rho)\,\epsilon(x_0)\,\tilde{W}(x,p) =$$

$$= \Phi_0(\rho,\lambda^2,\alpha=1) + c\int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha} F(1+A, 2-A, 2; -\frac{m^2}{m^2-p^2}\cdot\frac{1-\alpha}{\alpha})\cdot\Phi_0(\rho,\lambda^2,\alpha),$$

$$c = \frac{g^2}{16\pi^2(m^2-p^2)}\,. \qquad /2.14/$$

Здесь $\Phi_0(\rho,\lambda^2,\alpha)$ - спектральная функция представления Йоста-Лемана, соответствующая борновскому приближению матричного элемента коммутатора

$$\frac{2g^2}{i}\cos(\alpha p\cdot x)\, D(x, \sqrt{(1-\alpha)(m^2-\alpha p^2)})\,.$$

Вследствие ограниченной области интеграции по переменной α и отсутствия особенностей у подынтегральной функции асимптотические свойства интеграла /2.14/ при большом $\lambda^2 \to \infty$ определяются поведением функции $\Phi_0(\rho,\lambda^2,\alpha)$. Следовательно, при $\lambda^2 \to \infty$ $\Phi(\rho,\lambda^2)$ обладает квазиасимптотикой порядка -1 [5], т.е.

$$k\,\Phi(\rho,\lambda^2\cdot k) \to \delta(\lambda^2)\,4g^2\sqrt{p^2}\,\delta'(p^2-\rho^2) + \frac{g^4\delta(\lambda^2)}{16\pi^2(m^2-p^2)}\,\frac{G(\rho')}{(p^2)^{3/2}}\,,$$
$$k \to \infty$$

$$G(\rho') = c\int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha} F(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}, \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}; 2; -\frac{m^2}{m^2-p^2}\,\frac{1-\alpha}{\alpha})\,\delta'(\alpha-\rho'),$$

$$\rho' = \rho/\sqrt{p^2}\,.$$

Авторы благодарят Н.Н.Боголюбова и А.А.Логунова за обсуждение и интерес к работе, а также Б.А.Арбузова, А.В.Киселева, Н.В.Красникова, В.Е.Рочева, А.А.Хелашвили, К.Г.Четыркина, М.А.Элиашвили, Л.А.Слепченко за плодотворные дискуссии.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим вклад "квадратных диаграмм" в матричный элемент произведения токов. Имеем

$$\langle p | j_1(x)\, j_2(0) | p \rangle = -D^-_{m_0}(x) \int dx' dy' D^c_{m_1}(x-x') \bar{D}^c_{m_2}(-y') D^-_M(x'-y') \times$$

$$\times \left(e^{ip(x'-y')} + e^{-ip(x'-y')}\right) -$$

$$-D^-_{m_0}(x) \int dx' dy' \tilde{D}^c_{m_2}(-y') \tilde{D}^c_M(x'-y') D^-_{m_1}(x-x') \left(e^{ip(x'-y')} + e^{-ip(x'-y')}\right) -$$

$$-D^-_{m_0}(x) \int dx' dy' D^c_{m_1}(x-x') D^c_M(x'-y') D^-_{m_2}(y') \left(e^{ip(x'-y')} + e^{-ip(x'-y')}\right) . \qquad /П.1/$$

Здесь сингулярные функции определены согласно /12/. Формуле /П.1/ соответствует сумма вкладов от рассечений квадратных диаграмм /рис.2/, m_0, M, m_1, m_2 - массы в пропагаторах, $p^2 > 0$ есть масса внешних концов.

В случае $m_1 = m_2 = m$ рассечения диаграммы б /рис.2/ не определены корректно, они содержат сингулярности типа $\delta(x)/x$, сокращения которых приводят к неверному результату. Поэтому в этом случае сумма б /рис.2/ определяется предельным переходом $m_1 \to m_2 = m$. Исходя из формулы /П.1/ матричный элемент коммутатора токов можно привести к явно "причинному виду". Легко проследить, что рассечения диаграммы а или б по отдельности не дают причинный вклад в коммутатор. Лишь в случае безмассового обмена часть а определяет причинный вклад.

Рассмотрим теперь амплитуду в приближении квадратных диаграмм:

$$T(q,p) = T_1(q,p) + T_1(q,-p) =$$

$$= -\frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{dk}{(m^2-k^2-i\epsilon)^2 (m_0^2-(q-k)^2-i\epsilon)(M^2-(p+k)^2-i\epsilon)} + /\text{кросс-член}/.$$

С учетом формулы Фейнмана имеем

$$T_1(q,p) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \int_0^1 d\alpha_3 \int_0^1 d\alpha_4\, \delta(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4-1) \times$$

$$\times \frac{1}{[(\alpha_1+\alpha_2)m^2+\alpha_3 m_0^2+\alpha_4 M^2-\alpha_3(1-\alpha_3)q^2-\alpha_4(1-\alpha_4)p^2-2\alpha_3\alpha_4(q\cdot p)]^2} =$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^1 d\alpha_3 \int_0^1 \frac{d\alpha_4 (1-\alpha_3-\alpha_4)\,\theta(1-\alpha_3-\alpha_4)}{[\alpha_3(1-\alpha_3)]^2 \left[\frac{m^2+\alpha_3(m_0^2-m^2)+\alpha_4(M^2-m^2)-\alpha_4(1-\alpha_4)p^2}{\alpha_3(1-\alpha_3)} - q^2 - 2\frac{\alpha_4}{1-\alpha_3}(q\cdot p)\right]^2} =$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^1 d\alpha (1-\alpha) \int_0^\infty d\sigma \frac{1}{\{\sigma-(q+\alpha p)^2-i\epsilon\}^2} \theta(\sigma-(m_0+\ell)^2) \cdot \frac{\sigma-\ell^2-m_0^2}{\ell^2\sqrt{(\sigma+\ell^2-m_0^2)^2-4\sigma\ell^2}} .$$

/П.2/

Здесь введены новые переменные:

$$\alpha = \alpha_4/(1-\alpha_3),$$

$$\sigma = \frac{m^2+\alpha_3(m_0^2-m^2)+\alpha_4(M^2-m^2)-\alpha_4(1-\alpha_4)p^2}{\alpha_3(1-\alpha_3)} + \left(\frac{\alpha_4}{1-\alpha_3}\right)^2 p^2 ,$$

а также введено обозначение $\ell^2 = \alpha M^2 + (1-\alpha)(m^2-\alpha p^2)$. После интегрирования по частям выражение /П.2/ принимает вид представления ДГС со спектральной функцией

$$\Psi(\alpha,\sigma) = \frac{(1-\alpha)}{8\pi\ell^2} \frac{\partial}{\partial\sigma} \left\{ \theta(\sigma-(m_0+\ell)^2) \frac{\sigma-\ell^2-m_0^2}{\sqrt{(\sigma+\ell^2-m_0^2)^2-4\sigma\ell^2}} \right\}, \qquad /П.3/$$

$$\ell^2 = \alpha M^2 + (1-\alpha)(m^2-\alpha p^2) .$$

Выражение /П.3/ можно представить также в виде

$$\Psi(\alpha,\sigma) = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial m^2} \left\{ \theta(\sigma-(m_0+\ell)^2) \frac{\sigma+m_0^2-\ell^2}{\sigma\sqrt{(\sigma+m_0^2-\ell^2)^2-4m_0^2\sigma}} \right\}. \qquad /П.4/$$

Величины /П.3/ и /П.4/ следует понимать в смысле обобщенных функций /13/. В случае безмассового обмена, когда $m_0 = 0$, найдем

$$\Psi(\alpha,\sigma) = \frac{(1-\alpha)}{8\pi\ell^2} \delta(\sigma - [\alpha M^2 + (1-\alpha)(m^2-\alpha p^2)]).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н., Владимиров В.С., Тавхелидзе А.Н. ТМФ,1972, 12, с.3; 1972, 12, с.305.
2. Завьялов Б.И. ТМФ, 1973, 17, с.178; 1974,19, с.163; 1977, 33,с.310;
   Владимиров В.С., Завьялов Б.И. ТМФ, 1979,40,с.155.
3. Логунов А.А., Мествиришвили М.А., Петров В.А. Препринты ИФВЭ 74-66, Серпухов,1974; 76-157, Серпухов,1976;
   Общие принципы квантовой теории поля и их следствия /под редакцией Мещерякова В.А./. "Наука", М., 1977.
4. Арбузов Б.А., Рочев В.Е. ЯФ,1975, 21,с.883;
   Арбузов Б.А., Дьяконов В.Ю., Рочев В.Е. ЯФ,1976,23,с.904;
   Клименко К.Г., Рочев В.Е. ТМФ,1977,32, с.348; 1977,30, с.191.
5. Киселев А.В., Мествиришвили М.А., Рочев В.Е. ТМФ,1979,39, с.35; Препринт ИФВЭ 79-13, Серпухов, 1979.
6. Гешкенбейн Б.В., Комеч А.И. ЯФ,1973, 18, с.914.
7. Deser S., Gilbert W., Sudarshan E.C.G. Phys.Rev.,1960,117, p.266.
8. Nakanishi N. Phys.Rev.,1971,D4,p.2571.
9. Бартель Р., Робашик Д. ТМФ,1979, 39, с.180.
10. Вицорек Э. и др. ТМФ, 1975, 22, с.3;
    Маградзе Б.А., Матвеев В.А. ОИЯИ, Р2-9435, Дубна, 1976; ОИЯИ, Р2-10352, Дубна, 1976; ТМФ,1977, 31, с.308.
11. Усюкина Н.И. ТМФ, 1973, 17, с.359.
12. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. "Наука", М., 1976.
13. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. "Наука", М., 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 июня 1980 года.