80-367

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2-80-367

В.Г.Маханьков, И.Л.Боголюбский,
Г.Куммер, А.Б.Швачка

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ГАУССОНОВ

Направлено в "Physica scripta"

1980

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время не вызывает сомнения важность неаналитических по константе взаимодействия решений нелинейных уравнений теории поля - солитонов и инстантонов. Солитонные решения возникают в различных качественных моделях барионов [1,2], как релятивистских, так и нерелятивистских. К области физики высоких энергий, в которой изучение именно солитонного сектора может дать основу для разработки будущей теории, относится и исследование нелинейных обобщений квантовой электродинамики /КЭД/ на сверхмалых расстояниях. Наиболее привлекательным из них, на наш взгляд, является обобщение КЭД, предложенное недавно Кадышевским [3], опирающееся на гипотезу о существовании фундаментальной длины и 5-мерный принцип локальной калибровочной инвариантности.

Математическое моделирование взаимодействия соответствующих "частиц" - солитонов в реалистическом 4-мерном пространстве-времени - пока дело будущего /может быть, не очень отдаленного/. К тому же, например, в модели [3] в настоящее время решения известны только в одномерном (x,t)-мире, что связано со сложностью исследования нелинейных спинорных теорий. Поэтому для начала естественно обратиться к скалярным теориям с известными устойчивыми солитонными решениями. В этом смысле весьма полезными являются теории с логарифмической нелинейностью (LN). Уравнение Шредингера с LN(SLN), его солитонные решения в D-мерном пространстве, динамика взаимодействия одномерных и двумерных солитонов были исследованы в работах [4]. Соответствующая релятивистская модель - уравнение Клейна-Гордона с LN (KGLN), как оказалось [5], обладает, помимо солитонных, богатым набором осциллирующих локализованных решений, включающих в себя солитоны как частный случай. В работе [6] путем квантования этих решений /"пульсонов"/ по Бору-Зоммерфельду был найден спектр масс локализованных частицеподобных коллективных возбуждений.

В настоящей работе исследованы динамические свойства квазисолитонов уравнения KGLN как в одномерном (x,t), так и в двумерном (x,y,t) - пространстве $/D=1$ и $D=2$ соответственно/.

В предыдущих работах этой серии [7,8] были изучены с помощью ЭВМ взаимодействия двумерных локализованных полевых сгустков в рамках уравнения KG с различными нелинейностями. Было найдено, что при релятивистских скоростях $(v/c \to 1)$ взаимодействие солитонов при встречных столкновениях квазиупруго. Наиболее интересной является область относительно малых скоростей $(v/c \sim 0{,}1)$ [7,8]; здесь наблюдается эффект слияния двух "частиц" в одну, причем в работах [8] были обнаружены долгоживущие связанные состояния двух неодномерных одноименно заряженных солитонов. Эти состояния являются слабоизлучающими и при $t \to \infty$ могут либо: 1/ распасться на свободные плоские волны, либо 2/ превратиться в солитон, излучив излишек энергии в виде волн, близких к линейным.

Ниже мы покажем, что подобный эффект образования связанного состояния заряженных солитонов не является модельно зависимым. Более того, существование в данной модели, помимо солитонных решений, богатого набора неизлучающих осциллирующих локализованных решений может привести еще и к 3/ формированию одного или нескольких неизлучающих пульсонов.

Численные эксперименты, описанные в данной работе, проводились с помощью алгоритмов, разработанных в работах [7,8]. §1 настоящей работы посвящен динамике взаимодействия одномерных солитонов, §2 - двумерных, причем рассмотрены как лобовые столкновения, так и столкновения с отличным от нуля прицельным параметром, в §3 мы кратко сформулируем основные результаты.

§1. ДИНАМИКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОДНОМЕРНЫХ ГАУССОНОВ ПРИ ВСТРЕЧНЫХ СТОЛКНОВЕНИЯХ

Рассмотрим уравнение

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} - \phi - \ln(|\phi|^2)\phi = 0 . \qquad /1/$$

Плотность гамильтониана в этой модели есть

$$\mathcal{H} = |\phi_t|^2 + |\phi_x|^2 + U(|\phi|), \qquad /2/$$

где

$$U(\phi) = -\phi^2 \cdot \ln \phi^2 ,$$

а солитонные решения выражаются в собственной системе координат формулой

$$\phi_s(x,t) = \exp(-\frac{\omega^2}{2})\exp(-\frac{x^2}{2})\exp(-i\omega t + i\theta_s). \qquad /3/$$

Область динамической устойчивости этих решений относительно малых возмущений задается неравенством $\omega > \omega_{cr} = 1/\sqrt{2}$, т.е. максимальная амплитуда поля устойчивого солитона /3/ $\phi_{s,max} = \exp(-1/4) \simeq 0{,}7788$. Для получения движущихся со скоростью v_s солитонов достаточно в формуле /3/ выполнить преобразование Лоренца. Эксперименты по столкновению двух встречных солитонов проводились при начальных условиях в виде двух достаточно удаленных друг от друга солитонов, имеющих скорость $v_1 = v$ и $v_2 = -v$ /v изменяется от 0 до 1/.

Первая серия экспериментов была выполнена с солитонами одинакового по величине и знаку заряда, т.е. $\omega_1 = \omega_2$. Опишем кратко характерные типы взаимодействий солитонов. При $\omega \geq 1{,}3$ и $v \geq 0{,}2$ после стадии полного перекрытия солитонов вновь возникают два частицеподобных образования, имеющие форму и скорость, близкие к начальным. Эффекты неупругости /изменение формы и скорости, излучение слабонелинейных волн/ выражены тем слабее, чем ближе скорость v к 1. При $\omega_{cr} < \omega \leq 1{,}3$ /ω_{cr} - граница устойчивости солитонов/ существует область, в которой взаимодействие устойчивых солитонов при столкновениях приводит к возникновению амплитуд поля $|\phi|$, соответствующих спадающей ветви потенциального рельефа. В этой области сразу после взаимного перекрытия солитонов очень быстро возникает особенность поля $|\phi|_{max} \to \infty$ /сингулярный тип неустойчивости/. Существование этого типа взаимодействия характерно для моделей со спадающим при $|\phi| \to \infty$ потенциальным рельефом. При некоторых значениях параметров ω и v сингулярность возникает не сразу после перекрытия солитонов, а после нескольких осцилляций поля в центре тяжести системы.

Наконец, в области $\omega > 1{,}3$ при малых скоростях идентичных солитонов их взаимодействие приводит к образованию связанного состояния /подробнее см. §2/. Картина взаимодействия одинаковых солитонов меняется, если симметрия задачи нарушена вследствие отличия от нуля либо начальной разности фаз солитонов $\Delta\theta_{in} \neq 0$, либо разности их зарядов $\Delta Q = Q_1 - Q_2 \neq 0$. В первом случае при $\Delta\theta_{in} = \pi$ солитоны упруго отталкиваются; во втором при $\omega_1 = -\omega_2$ /т.е. $Q_1 = -Q_2$/ и $\theta_{s1} = -\theta_{s2}$ распределение плотности энергии остается симметричным, а заряда - антисимметричным относительно начала координат при всех t. Поэтому в результате взаимодействия не образуются ни заряженный солитон, ни осциллирующее связанное состояние с центром в точке $x = 0$; во всяком случае при исследованных значениях параметров $\omega = 1{,}4$ и $v = 0{,}02$; $0{,}06$; $0{,}08$; $0{,}15$; $0{,}5$ не было зафиксировано локализации заметной доли энергии в начале координат /ср. с результатами работы [9] /.

§2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕОДНОМЕРНЫХ ГАУССОНОВ

Теперь рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} - \phi_{yy} - 2\phi - \ln(|\phi|^2)\phi = 0, \qquad /4/$$

$$\phi(\infty, \infty, t) = 0.$$

Плотность гамильтониана для уравнения /4/ есть

$$\mathcal{H} = |\phi_t|^2 + |\phi_x|^2 + |\phi_y|^2 - |\phi|^2[1 + \ln(|\phi|^2)]. \qquad /5/$$

Легко проверить, что функция

$$\phi_s(x, y, t) = \exp(-\omega^2/2)\exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right)\exp(-i\omega t + i\theta_s) \qquad /6/$$

является решением задачи /4/, а заряд

$$Q = -i\int_{R^2}[\phi_t^*\phi - \phi_t\phi^*]dxdy \qquad /7/$$

и энергия

$$E = \int_{R^2}\mathcal{H}\,dxdy \qquad /8/$$

являются интегралами движения. Используя решение /6/, получим для /5/, /7/ и /8/:

$$\mathcal{H}_s(r, \omega) = (2\omega^2 + 2r^2 - 1)\exp(-\omega^2 - r^2), \qquad /9/$$

$$Q_s(\omega) = 2\pi\omega\exp(-\omega^2), \qquad /10/$$

$$E_s(\omega) = 2\pi\cdot\left(\omega^2 + \frac{1}{2}\right)\exp(-\omega^2). \qquad /11/$$

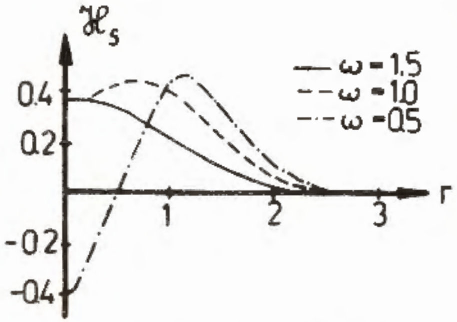


Рис.1. Плотность энергии солитона $\mathcal{H}_s(r, \omega)$ при различных значениях частоты ω.

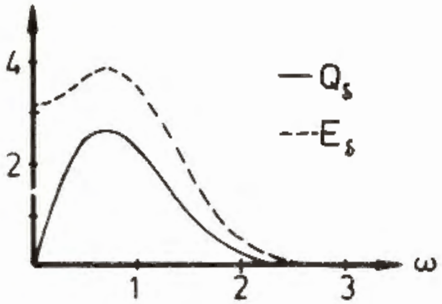


Рис.2. Заряд $Q_s(\omega)$ и энергия солитона $E_s(\omega)$ как функции частоты ω.

Функции $\mathcal{H}_s(r, \omega)$, $Q_s(\omega)$ и $E_s(\omega)$ изображены на рис.1 и 2. Как и в одномерном случае, область устойчивости решений /6/ определяется условием $\omega > \omega_{cr} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и может быть легко найдена с помощью Q-теоремы ($dQ/d\omega < 0$) и формулы /10/. Нами был разработан алгоритм и создан пакет программ на ФОРТРАНе для исследования с помощью ЭВМ взаимодействия двух $(2D + T)$-мерных солитонов при встречных столкновениях. Скорости встречного движения солитонов были выбраны равными $v_1 = -v_2 = v$, где величина v последовательно изменялась в пределах от 0,05 до 0,9. Параметр ω варьировался в пределах от 0,9 до 2,4. Расчеты проводились с помощью симметричной разностной схемы второго порядка точности по x, y и t, соответствующей уравнению /4/. Шаг по времени выбирался равным $\Delta t = 0,1$, шаг по пространственным переменным - $\Delta x = \Delta y = 0,2$. В точках $t = 0,1,2,\dots$ вычислялись плотность энергии $\mathcal{H}(x, y, t)$ и полная энергия E. Для контроля точности расчетов мы использовали величину

$$\epsilon_t = \frac{E_0 - E(t)}{E_0},$$

характеризующую сохранение полной энергии системы / E_0 - энергия при $t = 0$ /. Во всех расчетах максимальная величина $|\epsilon_t| < 0,1\%$. С целью устранения влияния границ области расчета на движение солитонов в уравнение /4/ вводилась искусственная вязкость путем добавления члена $\alpha\phi_t$. Отметим, что этот член включался в рассмотрение лишь в области, прилегающей к границе и имеющей ширину ~5% от размера области $[x, y]$. Оптимальное значение коэффициента α было найдено экспериментально ($\alpha = 1,5$). Численные эксперименты по изучению динамики Q-солитонов проводились на ЭВМ ЕЭСМ-6.

Как и следовало ожидать, при $v \to 1$ исследованные нами объекты ведут себя почти как "истинные" солитоны, взаимодействуя квазиупруго и приобретая лишь сдвиг в относительном положении. Однако при средних и низких скоростях ситуация меняется. В зависимости от частоты ω и скорости солитонов v можно выделить 4 качественно различных типа их взаимодействия:

I. Квазиупругое и слабоупругое взаимодействия /рис.3а,4,5/.
II. Связанное состояние /рис.3б,6,7/.
III. Образование неустойчивого /сингулярная мода/ связанного состояния /рис.3в/.
IV. Образование сингулярности поля в центре тяжести системы в момент перекрытия солитонов /рис.3г/.

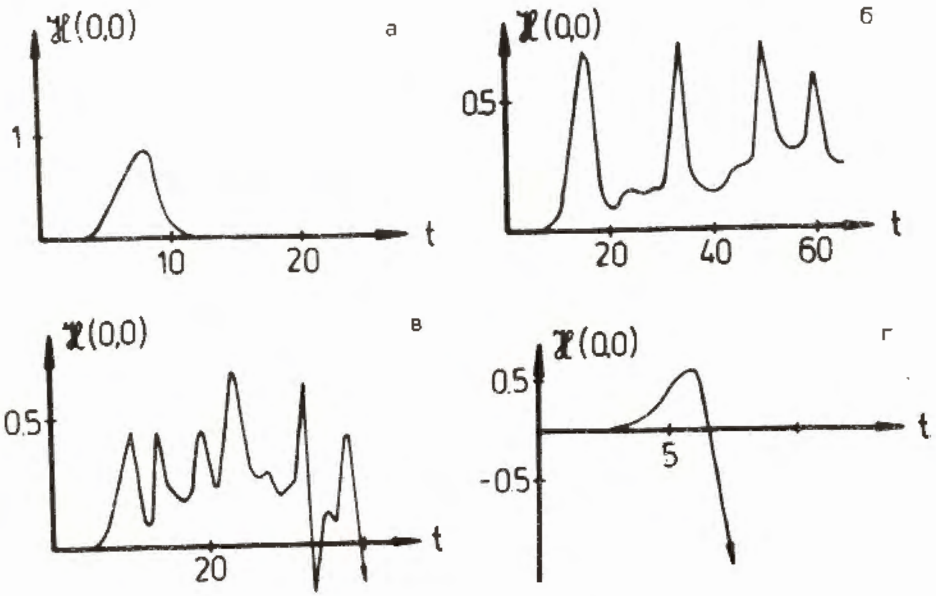


Рис.3. Зависимость от времени плотности энергии $\mathcal{H}(x, y, t)$ системы двух солитонов в начале координат $(x = 0, y = 0)$: а/ квазиупругое и слабонеупругое взаимодействия; б/ связанное состояние; в/ неустойчивое связанное состояние, распадающееся по сингулярной моде; г/ образование сингулярности поля в момент перекрытия солитонов.

Области существования всех указанных выше типов взаимодействий, обнаруженные нами в численных экспериментах, представлены на рис.8 в плоскости (v, ω). Для иллюстрации этих типов взаимодействий на рис.3 изображена зависимость плотности энергии $\mathcal{H}(0,0,t)$ в начале координат от времени.

В отдельном эксперименте было исследовано взаимодействие гауссонов с различными начальными фазами $\theta_1 \neq \theta_2$. Наиболее рельефно влияние разности фаз $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$ проявляется в случае, когда в начальный момент полевая функция антисимметрична относительно прямой $x = 0$ $(\phi(x,y,0) = -\phi(-x,y,0))$, т.е. при $\Delta\theta = \pi$. Поскольку уравнение /4/ сохраняет симметрию, полевая функция ϕ остается антисимметричной и в последующие моменты времени t. В результате при $\Delta\theta \neq 0$ в области III /рис.8/ взаимодействие гауссонов носит характер упругого отталкивания, в отличие от образования неустойчивого связанного состояния при $\Delta\theta = 0$ /рис.9/. Изменения картины взаимодействия можно ожи-

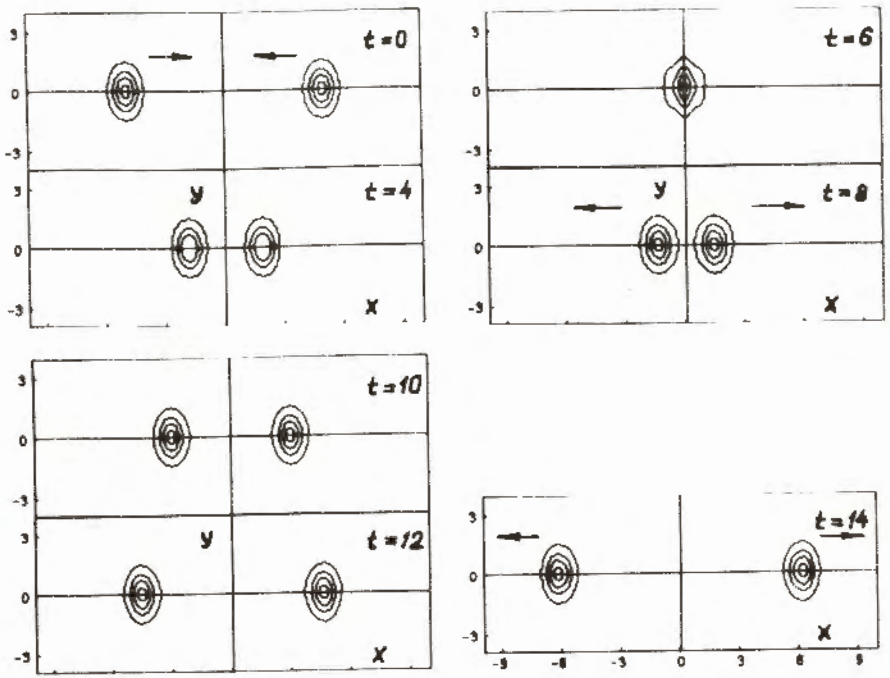


Рис.4. Упругое взаимодействие гауссонов при $v = 0{,}8$, $\omega = 2$. Картины линий уровня соответствуют плоским сечениям, приведенным на рис.5: $H = \mathcal{H}/\mathcal{H}_{max}$, где $\mathcal{H}_{max} = 0{,}79 = \mathcal{H}(t = 6)$. Скорость v измеряется в единицах c, плотность энергии $\mathcal{H}(x, y, t)$ – в безразмерных единицах.

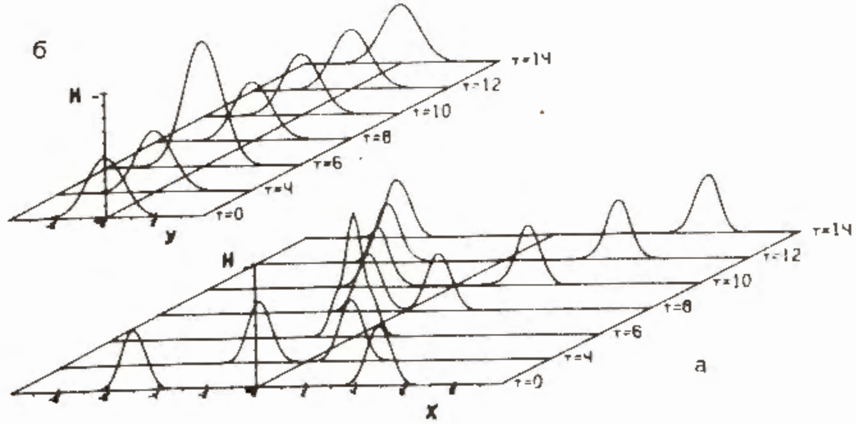


Рис.5. Упругое взаимодействие гауссонов при $v = 0{,}8$, $\omega = 2$. а/ сечение плоскостью $(\mathcal{H}, x)$; б/ сечение плоскостью $(\mathcal{H}, y)$.

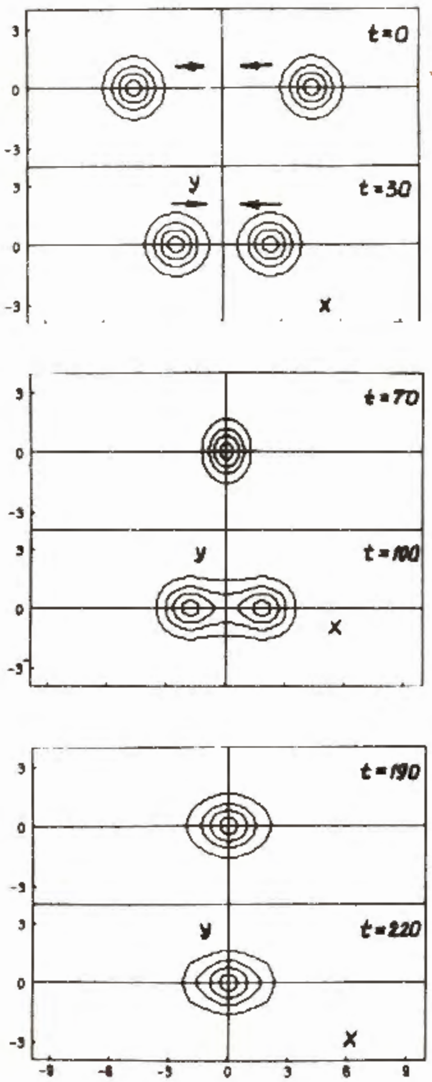


Рис.6. Образование связанного состояния двух гауссонов при $v=0{,}07$, $\omega=2$. Картины линий уровня соответствуют плоским сечениям, приведенным на рис.7. $H=\mathcal{H}/\mathcal{H}_{max}$, где $\mathcal{H}_{max}=0{,}33=\mathcal{H}(t=49)$.

дать также и при отличающихся зарядах сталкивающихся гауссонов $Q_1 \neq Q_2$, в частности, при $Q_1=-Q_2$, что было обнаружено в эксперименте с одномерными солитонами.

Кроме того, нами было исследовано, как влияет на взаимодействие гауссонов отличный от нуля угловой момент системы или, что то же самое, ненулевой прицельный параметр p. Расчеты показали, что существует резонансная область значений $p \in \Delta p_{res}$.

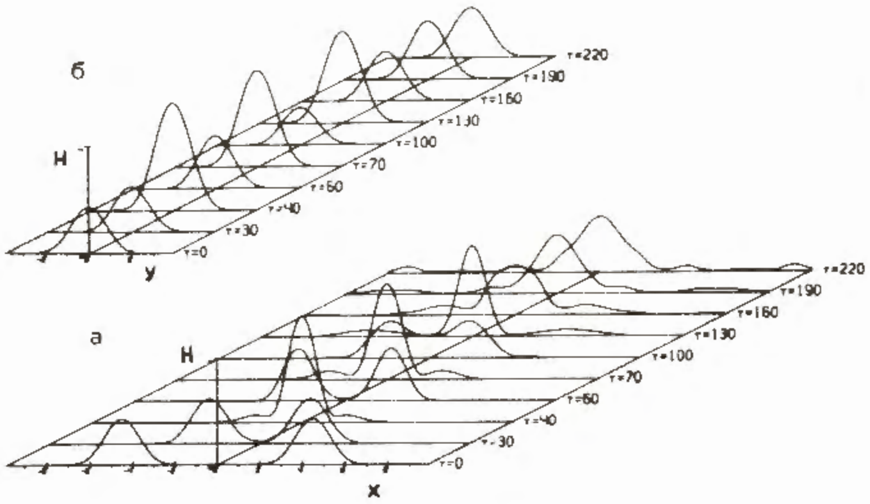


Рис.7. Образование связанного состояния двух гауссонов при $v=0{,}07$, $\omega=2$.

Рис.8. Области существования четырех типов взаимодействий гауссонов в плоскости (v, ω): I – квазиупругое и слабонеупругое взаимодействия; II – образование связанного состояния; III – образование неустойчивого связанного состояния; IV – образование сингулярности поля в центре тяжести системы в момент перекрытия солитонов.

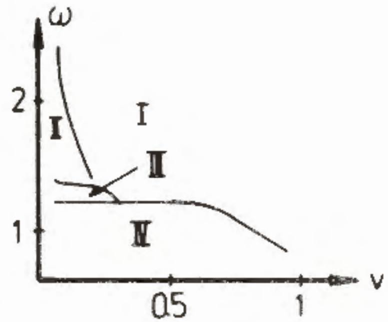
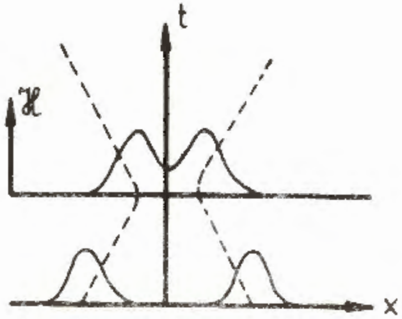


Рис.9. Упругое отталкивание гауссонов в случае отличной от нуля разности фаз $(\Delta\theta=\theta_1-\theta_2=\pi)$ при $v=0{,}15$; $\omega=1{,}3$.



в которой неупругость взаимодействия увеличивается, а область образования связанных состояний II расширяется за счет уменьшения области I. Приблизительный вид этой резонансной области показан на рис.10 /эта картина весьма напоминает полученную в работе /10/ для совершенно непохожей нерелятивистской модели $\phi^4 - \alpha\phi^6$ /.

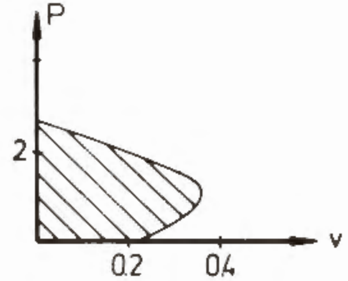


Рис.10. Область существования связанных состояний гауссонов в плоскости (p, v) при отличном от нуля прицельном параметре p (ср.с областью II на рис.8).

§3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Настоящая работа является продолжением серии работ, выполненных в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ и посвященных исследованию динамических свойств неодномерных солитонов в различных моделях теории поля /7,8/. Здесь мы отметим те их свойства, которые, как следует из сравнения с результатами предыдущих работ /7,8/, можно считать модельно независимыми.

1. В наиболее простом, полностью симметричном случае лобового столкновения двух одинаковых квазисолитонов в области изменения параметров (ω, v) можно выделить четыре подобласти с характерными типами взаимодействий. Первые два типа /упругое взаимодействие I /рис.4,5/ и взаимодействие, ведущее к образованию связанного состояния II /рис.6,7// имеют место вдали от порога устойчивости отдельного квазисолитона. Последние два типа взаимодействий проявляются в переходной области вблизи порога неустойчивости. Их можно интерпретировать как проявление неустойчивости образовавшегося связанного состояния /III/ и как непосредственную неустойчивость провзаимодействовавших квазисолитонов /IV/*.

*В работе /8/ третий тип взаимодействия мы назвали распадом через резонанс. В данном случае имеет место образование сингулярности поля через резонанс.

В последних двух случаях вид неустойчивости зависит от модели: это может быть распад, как это имеет место в модели с насыщающейся нелинейностью $U(\phi) \propto \ln(1 + |\phi|^2)$ /8/, или образование сингулярности поля, как, например, в рамках "гауссонной" модели, где $U(\phi) \propto |\phi|^2 \cdot \ln(|\phi|^2)$. Относительный размер областей I, II, III и IV /но не их расположение/ зависит от типа модели /см. рис.11, из которого также видно принципиальное различие между упомянутыми моделями/.

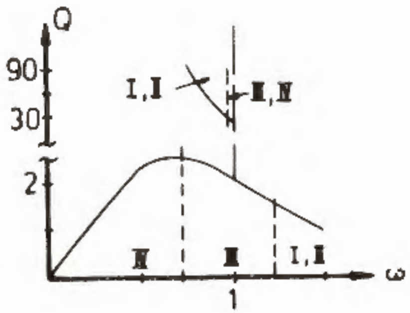


Рис.11. Расположение областей существования 4 типов взаимодействий в плоскости (Q, ω) для исследованной модели и модели с насыщающейся нелинейностью /8/ /верхняя часть рисунка/.

2. Усложнение условий столкновения солитонов /нарушение начальной симметрии/ путем введения разностей фаз $\Delta\theta$ и изозарядов ΔQ, а также ненулевого прицельного параметра p значительно усложняет картину взаимодействия, сдвигая и размывая границы областей или даже в корне изменяя вид взаимодействия /вспомним случай $\Delta\theta = \pi$, когда упругое отталкивание сменяет неустойчивость/. Последнее замечание следует иметь в виду при анализе и интерпретации результатов численных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Friedberg R., Lee T.D., Sirlin A. Phys.Rev., 1976, D13, p.2739; Nucl. Phys., 1976, B115, p.32; Friedberg R., Lee T.D. Phys.Rev., 1977, D15, p.1694; Preprint CO-2271-89, Columbia Univ., N.Y., 1977.
2. Witten E. Preprint HUTP-79/A007, Cambridge, 1979.
3. Kadyshevsky V.G. FERMILAB-Pub-78/70-THY, Batavia, 1978.
4. Bialynicki-Birula I., Mycielski J. Bull.Acad.Polon.Sci., ser. math., 1975, 23, p.461; Ann.Phys., 1976, 100, p.62; Oficjalski J., Bialynicki-Birula I. Acta Phys. Pol., 1978, B9, p.759.
5. Marques G.C., Ventura I. IFUSP Preprint P-83, 1976.

6. Боголюбский И.Л. ЖЭТФ, 1979, 76, с.422.
7. Bogolubsky I.L., Makhankov V.G., Shvachka A.B. Phys.Lett., 1977, A63, p.225.
8. Makhankov V.G., Kummer G., Shvachka A.B. Phys.Lett., 1979, A70, p.171; Phys.scripta,1979,20,p.454; Makhankov V.G., Shvachka A.B. JINR, P2-13041, Dubna, 1980; Physica D (to be published); Makhankov V,G., Kummer G., Shvachka A,B. JINR, P2-13042, Dubna, 1980; Physica D (to be published).
9. Simonov Yu., Tjon J. Phys.Lett., 1979, 85B, p.380.
10. Devi S., Strayer M., Irvine J. J.Phys.G: Nucl.Phys., 1979, 5, p.281.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 мая 1980 года.