объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-80-365

Х.Намсрай

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ ДВУХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

Направлено в "Journal of Physics A"

1980

В рамках стохастической теории, основанной на гипотезе о стохастичности пространства, нами была изучена динамика частиц [1] и получены некоторые нелинейные уравнения движения стохастических частиц [2]. Нами также был предложен метод релятивизации данной схемы описания процессов в стохастическом пространстве, позволяющий записать уравнения движения частицы в ковариантном виде. Эти уравнения совпадают с уравнениями Лера-Парка [3], Гауэрра-Руджиэро [4] и Вижье [5].

В данной работе мы рассмотрим проблему стохастического поведения двух тождественных и коррелированных релятивистских скалярных частиц, поскольку этот вопрос представляет интерес с физической точки зрения. Наше исследование основано на уравнениях Смолуховского для плотности вероятности $\rho(x_1^\nu, x_2^\mu, s_1, s_2)$ нахождения первой частицы в точке x_1^ν, а второй - в точке x_2^μ в моменты "времени" s_1 и s_2 и их относительных скоростей $v_1^\nu(x_1^\lambda, x_2^\mu, s_1, s_2)$ и $v_2^\mu(x_1^\lambda, x_2^\nu, s_1, s_2)$ соответственно. Здесь s - некоторый инвариантный параметр /собственное время/, интерпретацию которого можно найти в работах [1,6]. Ранее мы предполагали, что производную по s можно понимать как производную по направлению некоторого произвольного вектора v^μ. В частном случае, когда в качестве вектора v^μ выбирается скорость частицы, величина s может быть интерпретирована как собственное время частицы. Более подробно этот вопрос обсуждался в [1].

Предложенная нами ранее релятивистская стохастическая модель основывалась на следующей гипотезе:

1. Физические величины рассматриваются как функции комплексного времени $t + i\tau$ в пределе $\tau \to 0$.

2. Предполагается, что стохастическое движение частицы происходит в евклидовом пространстве $(\vec{x}, \tau)$, а не в пространстве $(\vec{x}, t)$ Минковского.

В рамках теории случайных процессов это означает, что блуждание происходит в евклидовом пространстве $E_4(\vec{x}, \tau)$. Обоснование важности метода сдвига времени $t \to t + i\tau$ в квантовой теории поля и квантовой механике можно найти в работах Алебастрова-Ефимова [7] и Дэвидсона [8] /см. также работу [9]/.

Для прямого обобщения результатов, полученных в одночастичной модели [1], на двухчастичный случай математически более удобным оказалось введение восьмимерного конфигурационного пространства, рассмотренного в работе [10]. В этом пространстве положение двух частиц и их относительные скорости определяются восьмикомпонентными векторами X^i и v^i $(i=1,\dots,8)$ соответственно, где

$$\{X^i\}_{i=1,\dots,8} \equiv \{x_1^\mu, x_2^\nu\}_{\mu,\nu=0,\dots,3}, \{v^i(X^j,s_1,s_2)\}_{i=1,\dots,8} \equiv \{v^\mu, v^\nu\}_{\mu\nu=0,\dots,3}.$$

Здесь x_1^μ и x_2^ν – векторы координат каждой частицы. Метрический тензор g_{ij} в этом пространстве определяется, как и в [10]:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$X^2 = X_i X^i = g_{ij} X^i X^j = (x_1)^2 + (x_2)^2.$$

Если $x_1^\mu(s_1)$ и $x_2^\nu(s_2)$ – траектории каждой частицы, то в восьмимерном пространстве общая их траектория будет $X^j(s_1, s_2)$.

Так же как и в трех-, четырехмерном случаях, мы введем двухчастичный аналог $\Psi(X^j, s_1, s_2, \Delta s_1, \Delta s_2)$ одночастичных вероятностей переходов $\Psi(\vec{x}, t, \Delta t)$ и $\Psi(x^\mu, s, \Delta s)$, использованных в [1,3]. Если две частицы некоррелированы, то величину $\Psi(X^j, s_1, s_2, \Delta s_1, \Delta s_2)$ можно факторизовать:

$$\Psi(X^j, s_1, s_2, \Delta s_1, \Delta s_2) = \Psi_1(x_1^\nu, s_1, \Delta s_1)\, \Psi_2(x_2^\nu, s_2, \Delta s_2).$$

Мы будем выбирать калибровку $\Delta s_1 = \Delta s_2 = \Delta s$. Тогда уравнение типа Смолуховского для $\rho(X^j, s_1, s_2)$ принимает вид

$$\rho(X^i, s_1 \pm \Delta s, s_2 \pm \Delta s) = \int d^8 Y_E\, \rho(X^I \mp Y^I, X^1 + iY_E^1, X^5 + iY_E^5, s_1, s_2) \times$$
$$\times \Psi^\pm(X^I \mp Y^I, X^1 + iY_E^1, X^5 + iY_E^5, s_1, s_2, \Delta s, Y_E^i), \qquad /1/$$

где X^I и Y^I $/I = 2,3,4,6,7,8/$ обозначают пространственную часть векторов X^i и Y^i соответственно.

Принимая во внимание явный вид $\Psi^\pm(X^I \mp Y^I, \dots, Y_E^i)$:

$$\Psi^\pm = (4\pi D_\pm \Delta s)^{-4} \exp\left[-\frac{(Y^i - Y_\pm^i)^2}{4D_\pm \Delta s}\right], \qquad /2/$$

$$Y_\pm^i = (\pm i v_\pm^1 \Delta s,\ \pm i v_\pm^5 \Delta s,\ v_\pm^I \Delta s),$$

мы получаем из /1/ следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial\rho}{\partial s_1} + \frac{\partial\rho}{\partial s_2} + \partial_i(\rho v_+^i) - D_+ \Box\rho = 0,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial s_1} + \frac{\partial\rho}{\partial s_2} + \partial_i(\rho v_-^i) + D_- \Box\rho = 0, \qquad /3а/$$

$$\partial_i = \partial/\partial X^i, \quad -\partial_i\partial^i = \Box = \Box_1 + \Box_2.$$

Здесь мы положили $D_- = D_+ = D$, D – коэффициент диффузии, а величина $v_+^i (v_-^i)$ называется скоростью вперед /назад/. Переходя к переменным

$$v^i = \frac{1}{2}(v_+^i + v_-^i), \qquad u^i = \frac{1}{2}(v_+^i - v_-^i)$$

и складывая /вычитая/ уравнения /3а/, получим

$$\frac{\partial\rho}{\partial s_1} + \frac{\partial\rho}{\partial s_2} + \partial_i(\rho v^i) = 0, \qquad /3б/$$

$$u^i = -D\partial^i \ln\rho,$$

где v^i – обычная /регулярная/, u^i – стохастическая скорости двухчастичной системы.

В нашей схеме, как и раньше [1], сохранение массы /плотности вероятности, умноженной на объем/ означает отсутствие утечки массы через любые гиперповерхности, характеризующиеся векторами v_1^μ и v_2^ν, и тем самым мы принимаем физическую гипотезу, что полное число частиц /т.е. пара в реальном пространстве-времени/ сохраняется. Тогда мы можем записать

$$\frac{\partial\rho}{\partial s_1}+\frac{\partial\rho}{\partial s_2}=(\vec{d}\rho\cdot\vec{v}_1)+(\vec{d}\rho\cdot\vec{v}_2)=\frac{\partial\rho}{\partial x_1^o}v_1^o+\frac{\vec{v}_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\frac{\partial\rho}{\partial\vec{x}_1}+$$

$$+\frac{\partial\rho}{\partial x_2^o}v_2^o+\frac{\vec{v}_2}{\sqrt{1-\beta_2^2}}\frac{\partial\rho}{\partial\vec{x}_2}=0\qquad(\beta_i^2=v_i^2/c^2,\ i=1,2),$$

и при этом наше уравнение непрерывности в конфигурационном пространстве принимает вид

$$\partial_i(\rho v^i)=0 \qquad /4/$$

или в терминах переменных u^i и v^i

$$-u^i v_i+D\partial^i v_i=0. \qquad /5/$$

В случае двухчастичной системы, следуя Кершоу [2], мы можем составить уравнения типа /1/ для средних скоростей $v^i_\pm(X^j,s_1,s_2)$ в некотором внешнем поле $F^i_\pm(X^j,s_1,s_2)$:

$$v^i_\pm(X^j,s_1+\epsilon\Delta s,\ s_2+\epsilon\Delta s)=\frac{1}{N_\pm}\int[v^i_\pm(X^I-\epsilon Y^I,X^1+iY^1_E,X^5+iY^5_E,s_1,s_2)+$$

$$+\epsilon\frac{\Delta s}{M}F^i_\pm(X^I-\epsilon Y^I,X^1+iY^1_E,X^5+iY^5_E,s_1,s_2)]\times \qquad /6/$$

$$\times\Psi^\pm(X^I-\epsilon Y^I,X^1+iY^1_E,X^5+iY^5_E,s_1,s_2,\Delta s,Y^i_E)\times$$

$$\times\rho(X^I-\epsilon Y^I,X^1+iY^1_E,X^5+iY^5_E,s_1,s_2)\,d^8Y_E,$$

где

$$N_\pm=\int d^8Y_E\,\Psi^\pm(X^I-\epsilon Y^I,X^1+iY^1_E,\dots,Y^i_E)\,\rho(X^I-\epsilon Y^I,\dots,s_2)$$

- нормировочные множители; M - некоторая эффективная масса нашей двухчастичной системы;

$$\epsilon=\begin{cases}1 & \text{для } v^i_+,\\ -1 & \text{для } v^i_-.\end{cases}$$

В нашем случае уравнения /6/ приводят к дифференциальным уравнениям:

$$\frac{\partial u^i_\pm}{\partial s_1}+\frac{\partial u^i_\pm}{\partial s_2}+u^j_\pm\partial_j u^i_\pm=F^i_\pm/M\pm D(\frac{2}{D}u^j\partial_j u^i_\pm+\Box u^i_\pm). \qquad /7/$$

Складывая уравнения /7/, получаем

$$D_c v^i-D_s u^i=\frac{1}{2M}(F^i_++F^i_-)=F^i/M, \qquad /8/$$

$$D_c=\frac{\partial}{\partial s_1}+\frac{\partial}{\partial s_2}+v^i\partial_i,$$

$$D_s=u^i\partial_i+D\Box.$$

Уравнение /8/ вместе с уравнением непрерывности /4/ представляют собой ковариантный аналог одночастичного случая [1] для двухчастичной системы. Отметим, что левая часть уравнения /8/ точно совпадает с выражением для "ускорения", полученным Куфаро Петрони и Вижье [10] на основе некоторых предположений в рамках математического подхода Нельсона [2] и Гуэрра-Руджиэро [4].

Связанная пара нелинейных дифференциальных уравнений /5/ и /8/ может быть линеаризована, если мы положим

$$v^i=\frac{1}{m}\partial^i\phi, \qquad /9/$$

как и в предыдущих работах [1,2,10], где $\phi(X^j,s_1,s_2)$ - фазовая функция, определяемая равенством

$$\phi(X^j,s_1,s_2)=\frac{mc^2}{2}(s_1+s_2)+S(X^j). \qquad /10/$$

Используя выражения /3б/, /9/ и /10/, на основе уравнений /4/ и /8/ мы получаем уравнение типа Гамильтона-Якоби [10]

$$(\partial_i\partial^i-\partial_i S\partial^i S/\hbar-2m^2c^2/\hbar^2)R=0 \qquad /11/$$

для двухчастичной системы в случае, когда отсутствует внешняя сила, $F^i=0$. Здесь мы положили

$$R=\rho^{1/2},\qquad D=\frac{\hbar}{2m}.$$

Из уравнения /11/ вытекает уравнение непрерывности следующего вида:

$$2\partial_i R\partial^i S+R\partial_i\partial^i S=0.$$

Наконец, мы имеем формальное уравнение для величины $\psi = R\exp(iS/h)$:

$$(\Box - 2m^2c^2/\hbar^2)\psi = 0. \qquad /12/$$

В нерелятивистском пределе уравнение /12/ приводит к обычному двухчастичному уравнению Шредингера для $\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) = R(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)\exp(iS/\hbar)$, которое распадается на два уравнения:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{\nabla}_1 \left(P \frac{\vec{\nabla}_1 S}{m}\right) + \vec{\nabla}_2 \left(P \frac{\vec{\nabla}_2 S}{m}\right) = 0,$$

где

$$P = R^2 = \psi^* \psi,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla}_1 S)^2}{m} + \frac{(\vec{\nabla}_2 S)^2}{m} + Q = 0.$$

Здесь

$$Q = -\frac{h^2}{2m}(\nabla_1^2 R/R + \nabla_2^2 R/R)$$

- некоторый потенциал, и его обычно называют нелокальным квантовым потенциалом двух тел /см., например, [10]/.

В заключение отметим, что физические следствия полученных выше результатов были обсуждены в [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Намсрай Х. Found. of Phys., 1980, 10, p.353; ОИЯИ, E2-12949, Дубна, 1979 (Found. of Phys., to be published).
2. Nelson E. Phys.Rev., 1966, 150, p.1079; Dynamical Theories of Brownian Motion. Princeton, N.J., 1967; Kershaw D. Phys.Rev., 1964, B136, p.1850; De la Pena L., Cetto A.M. Found. of Phys., 1975, 5, p.355.
3. Lehr W., Park J. Journ. Math. Phys., 1977, 18, p.1235.
4. Guerra F., Ruggiero P. Lett. Nuovo Cim., 1978, 23, p.529.
5. Vigier J.P. Lett. Nuovo Cim., 1979, 24, p.265.
6. Miura T. Progr. of Theor. Phys., 1979, 61, p.1521.
7. Alebastrov V.A., Efimov G.V. Comm. Math. Phys., 1974, 38, p.11.
8. Davidson M. Journ. Math. Phys., 1978, 19, p.1975.
9. Намсрай Х. ОИЯИ, E2-12950, Дубна, 1979. (Int. Journ. of Theor. Phys., to be published).
10. Cufaro Petroni N., Vigier J.P. Lett. Nuovo Cim., 1979, 26, p.149.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 мая 1980 года.