объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-80-342

В.В.Нестеренко

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ УРАВНЕНИЯ $\varphi_{,11}\ \varphi_{,22} = e^{\varphi} - e^{-2\varphi}$

Направлено в "Letters in Mathematical Physics"

1980

В ряде работ [1-5] отмечалась связь между нелинейными уравнениями, интегрируемыми методом обратной задачи рассеяния, и внутренней геометрией поверхностей евклидова или псевдоевклидова пространства. Так, например, если линейный элемент на евклидовой сфере $\vec{r}^{\,2}=1$, $\vec{r}=\vec{r}(u^1,u^2)$ взят в виде

$$ds^2 = \sin^2\frac{\theta}{2}(du^1)^2 + \cos^2\frac{\theta}{2}(du^2)^2\,, \qquad /1/$$

то функция $\theta(u^1,u^2)$ должна удовлетворять уравнению синус-Гордона [6]:

$$\theta_{,11} - \theta_{,22} = \sin\theta. \qquad /2/$$

Ортонормированный подвижный базис на сфере

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{r}_{,1}}{\sin\frac{\theta}{2}}\,,\ \vec{e}_2 = \frac{\vec{r}_{,2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\,,\ \vec{e}_3=\vec{r}\,,\ \vec{r}_{,i} = \frac{\partial\vec{r}(u^1,u^2)}{\partial u^i},\ i=1,2 \qquad /3/$$

подчиняется уравнениям

$$\frac{\partial\vec{e}_a}{\partial u^j} = \omega^j_{ab}\,\vec{e}_b\,,\quad j=1,2;\ \ a,b=1,2,3\,, \qquad /4/$$

где

$$\omega^1_{ab} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\theta_{,2}}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \frac{\theta_{,2}}{2} & 0 & 0 \\ \sin\frac{\theta}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix}\,,\quad \omega^2_{ab} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\theta_{,1}}{2} & 0 \\ \frac{\theta_{,1}}{2} & 0 & -\cos\frac{\theta}{2} \\ 0 & \cos\frac{\theta}{2} & 0 \end{vmatrix}. \qquad /5/$$

Используя спинорное представление группы вращений $O(3)$ и переходя к новым переменным

$$u^1+u^2 \to \lambda(u^1+u^2),\quad u^1-u^2 \to \lambda^{-1}(u^1-u^2)\,,\quad \lambda=\mathrm{const}, \qquad /6/$$

мы можем построить на основе /4/ новые спинорные уравнения [7,8]:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u^j} = i\sum_{k=1}^{3} \Omega^j_k(\theta;\lambda)\sigma_k\psi, \quad j = 1,2, \qquad /7/$$

где $\psi = \psi(u^1,u^2)$- двухкомпонентная спинорная функция,

$$\Omega^1_k = \left\{\lambda_- \cos\frac{\theta}{2},\ \lambda_+ \sin\frac{\theta}{2},\ -2\theta_{,2}\right\},$$

$$\Omega^2_k = \left\{-\lambda_+ \cos\frac{\theta}{2}, -\lambda_- \sin\frac{\theta}{2},\ -2\theta_{,1}\right\}, \qquad \lambda_\pm = (\lambda \pm \frac{1}{\lambda})/4,$$

σ_k - матрицы Паули. Условия совместности уравнений /7/ дают уравнение синус-Гордона /2/, а величину λ можно рассматривать как спектральный параметр [9].

Рассмотрим аффинную сферу в трехмерном унимодулярном аффинном пространстве [10-13]. Введем основные дифференциальные формы этой поверхности: первую квадратичную

$$\Phi = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}du^i du^j \qquad /8/$$

и вторую кубическую форму

$$\Psi = \sum_{i,j,k=1}^{2} T_{ijk}du^i du^j du^k. \qquad /9/$$

Тензоры g_{ij} и T_{ijk} симметричны по своим индексам и связаны соотношением аполярности:

$$g^{ij}T_{ijk} = 0. \qquad /10/$$

На аффинной поверхности $\vec{r}(u^1,u^2)$ подвижный трехгранник образован двумя касательными векторами $\vec{r}_{,1}(u^1,u^2)$ и $\vec{r}_{,2}(u^1,u^2)$ и аффинной нормалью $\vec{N}(u^1,u^2)$. Изменение этого трехгранника при его движении по поверхности описывается уравнениями Гаусса:

$$\nabla_j \vec{r}_{,i} = T^s_{ij}\vec{r}_{,s} + g_{ij}\vec{N} \qquad /11/$$

и Вейнгартена:

$$\vec{N}_{,i} = A^s_i \vec{r}_{,s}. \qquad /12/$$

Поднятие и опускание индексов производится с помощью тензора g_{ij}; ∇_j означает ковариантное дифференцирование по отношению к тензору g_{ij}; величины A_{ij} определяются формулой

$$A_{ij} = \nabla_s T^s_{ij} - H g_{ij}, \qquad /13/$$

где $2H = -A^s_s$.

Согласно теореме Родона [12] дифференциальные формы /8/ и /9/, связанные соотношением аполярности /10/, определяют поверхность с точностью до унимодулярных аффинных преобразований, если выполнены условия совместности уравнений /11/ и /12/.

Аффинная сфера задается условиями [13]

$$H = \text{const}, \quad K = \det\|A^j_i\| = H^2. \qquad /14/$$

Выберем на сфере изометрическую систему координат, в которой

$$g_{11} = -g_{22} = e^{\phi}, \quad g_{12} = 0. \qquad /15/$$

Из условий аполярности /10/ следует, что все компоненты тензора T_{ijk} выражаются через две величины, которые мы обозначим через A и B:

$$T_{111} = T_{221} = A, \quad T_{222} = T_{112} = B. \qquad /16/$$

Для наших целей нам будет достаточно считать A и B константами:

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = 0, \quad H = -\frac{1}{2}.$$

В рассматриваемом случае уравнения /10/ и /11/ принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial u^j}\begin{pmatrix}\vec{r}_{,1}\\ \vec{r}_{,2}\\ \vec{N}\end{pmatrix} = \Omega^j\begin{pmatrix}\vec{r}_{,1}\\ \vec{r}_{,2}\\ \vec{N}\end{pmatrix}, \qquad /17/$$

где

$$\Omega^1 = \begin{Vmatrix} \frac{\phi_{,1}}{2} + \lambda_+ e^{-\phi} & \frac{\phi_{,2}}{2} + \lambda_- e^{-\phi} & e^{\phi} \\ \frac{\phi_{,2}}{2} - \lambda_- e^{-\phi} & \frac{\phi_{,1}}{2} - \lambda_- e^{-\phi} & 0 \\ \lambda_+ e^{-2\phi} & -\lambda_- e^{-2\phi} & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\Omega^2 = \begin{Vmatrix} \frac{\phi_{,2}}{2} - \lambda_- e^{-\phi} & \frac{\phi_{,1}}{2} - \lambda_+ e^{-\phi} & 0 \\ \frac{\phi_{,1}}{2} + \lambda_+ e^{-\phi} & \frac{\phi_{,2}}{2} + \lambda_- e^{-\phi} & -e^{\phi} \\ -\lambda_- e^{-2\phi} & \lambda_+ e^{-2\phi} & 0 \end{Vmatrix}, \qquad /18/$$

$$\lambda_\pm = \frac{1}{4}(\lambda \pm \frac{1}{\lambda}).$$

В уравнениях /17/ уже совершена замена /6/, в результате чего в матрицы Ω^j в /18/ вошел спектральный параметр λ. Условие совместности для /17/

$$\Omega^1_{,2} - \Omega^2_{,1} = [\Omega^2, \Omega^1], \qquad /19/$$

как нетрудно проверить, дает

$$\phi_{,11} - \phi_{,22} = e^{\phi} - e^{-2\phi}. \qquad /20/$$

В работе [14] для этого уравнения было построено представление Лакса в матрицах 3x3 методом, отличным от предложенного здесь. Для соответствующей двумерной полевой теории была найдена точная S-матрица [15]. Уравнение /20/ рассматривалось также в работах [16,17].

Понизить размерность матричных уравнений /17/ аналогично тому, как это было сделано выше для уравнения синус-Гордона /переход от /4/ к /7//, нельзя, так как группа унимодулярных аффинных преобразований в трехмерном аффинном пространстве не имеет матричных представлений меньшей размерности, чем три.

В заключение отметим следующее: в геометрии аффинной сферы имеет место общее уравнение:

$$\Box \ln J = 6(H + J), \qquad /21/$$

где $\Box$ - ковариантный оператор Лапласа-Бельтрами для тензора g_{ij}: $J = \frac{1}{2} T^{ijk} T_{ijk}$ - инвариант Пика. Нетрудно проверить, что в изометрической системе координат /15/ уравнение /21/ сводится к /20/. Если же взять другую систему координат на аффинной сфере, то из /21/ получим новое уравнение, отличное от /20/. И для этого уравнения изложенным выше методом можно будет построить представление Лакса в матрицах 3x3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sasaki R. Phys.Lett., 1979, 71A, p.390; 73A, p.77; Nucl.Phys., 1979, B154, p.343.
2. Lund F., Regge T. Phys.Rev., 1976, D14, p.1524.
3. Lund F. Phys.Rev., 1977, D15, p.1540.
4. Barbashov B.M., Nesterenko V.V., Chervjakov A.M. Lett. Math.Phys., 1979, 3, p.359; J.Phys., 1980, A13, p.301.
5. Chinea F.J. Phys.Lett., 1979, 72A, p.281.
6. Eisenhart L.P. An Introduction to Differential Geometry with Use of the Tensor Calculus. Princeton University Press, Princeton, 1940.

7. Pohlmeyer K. Comm.Math.Phys., 1976, 46, p.209.
8. Neveu A., Papanicolaou N. Comm.Math.Phys., 1976, 58, p.31.
9. Faddeev L.D., Korepin V.E. Phys.Rep., 1978, 42C, No.1,p.3.
10. Blaschke W., Reidemeister K. Vorlesungen über Differentialgeometrie. Band II. Affine Differentialgeometrie. Berlin, 1923.
11. Salkowski E. Affine Differentialgeometrie. Berlin und Leipzig, 1934.
12. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. ИИЛ, М., 1960.
13. Широков П.А., Широков А.П. Аффинная дифференциальная геометрия. Физматгиз, М., 1959.
14. Михайлов А.В. Письма в ЖЭТФ, 1979, 30, с.443.
15. Arinshtein A.E., Fateyev V.A., Zamolodchikov A.B. Phys. Lett., 1979, 87B, p.389.
16. Жибер А.В., Шабат А.Б. ДАН СССР, 1979, 247, с.1103.
17. Dodd R.K., Bullough R.K. Proc.R.Soc. Lond., 1977, A352, p.481.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 мая 1980 года.