объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-80-322

Р.А.Асанов, Г.Н.Афанасьев

О ГРАВИТАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ДВУХ ТЕЛ В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Направлено в "Annalen der Physik"

1980

1. Первые попытки построения лоренц-ковариантной теории гравитации восходят к А.Пуанкаре [1] и Г.Минковскому [2]. Предложенные Пуанкаре уравнения релятивистской задачи двух тел имеют следующий вид:

$$\frac{d^2 x_{1i}}{d\tau_1^2} = x_i\frac{f_1}{B^3} + \frac{f_2}{c}\frac{dx_{1i}}{d\tau_1} - \frac{1}{c}\frac{dx_{2i}}{d\tau_2}\left(f_2 + \frac{A\cdot f_1}{B^3}\right)\frac{1}{C},$$

$$c\frac{d^2 t_1}{d\tau_1^2} = r\frac{f_1}{B^3} + f_2\frac{dt_1}{d\tau_1} - \frac{dt_2}{d\tau_2}\left(f_2 + \frac{A f_1}{B^3}\right)\frac{1}{C} \quad . \qquad /1/$$

При этом $\left(\frac{dt_1}{d\tau_1}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx_{1i}}{d\tau_1}\right)^2 = 1$. Поясним обозначения: t_k, x_{ki} – i - тая декартова координата и время k -той частицы, τ_k - собственное время k -той частицы, $i = 1,2,3$, $k = 1,2$,

$$c\,d\tau_k = \sqrt{c^2 dt_k^2 - dx_{ki}^2}, \quad x_i = x_{1i} - x_{2i}, \quad r^2 = \Sigma\, x_i^2, \quad t_1 = t_2 + r/c,$$

c - скорость света. A, B, C - следующие лоренц-инвариантные комбинации, составленные из относительных координат и скоростей частиц:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\left(r - \frac{\vec r\,\vec v_1}{c}\right), \quad B = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}}\left(r - \frac{\vec r\,\vec v_2}{c}\right), \qquad /2/$$

$$C = \frac{1 - \vec v_1 \vec v_2/c^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}\,\sqrt{1-\beta_2^2}}, \quad \beta_1 = \frac{v_1}{c}, \quad \beta_2 = \frac{v_2}{c}.$$

Все величины, относящиеся к частице 1, берутся в момент времени $t_1 = t$, а к частице 2 - в момент $t_2 = t - \frac{r}{c}$. f_1 и f_2, входящие в /1/, - произвольные функции инвариантов группы Пуанкаре A, B, C. Эти функции имеют следующее асимптотическое поведение при $c \to \infty$: $f_2 \sim O(1/c)$, $f_2 \sim \mathrm{const} + O(1/c^2)$. Выражение /1/ сконструировано таким образом, чтобы получить /с точностью до членов порядка $1/c^2$ / ньютоновы уравнения, описывающие движение двух частиц, взаимодействующих по закону всемирного тяготения. Выражение /1/ несколько отличается от выражения, данного Пуанкаре, который ради простоты положил $f_2 = 0$. Еще более специальные случаи рассмотрены Г.Минковским [2] и В.С.Брежневым в работе [3]. В этих работах, следуя электродинамической аналогии, силы определялись через потенциалы Льенара-Вихерта. В этом случае $f_2 = 0$, $f_1 = \mathrm{const}$. Из дальнейшего изложения следует, что рассмотрение неурезанного выражения /1/ оказывается существенным при сравнении с экспериментом. Выражение /1/ может быть обобщено на случай произвольной зависимости сил от расстояния.

2. Прежде чем обсудить приближенные методы решения уравнения /1/, а также известные точные частные решения, рассмотрим потенциальный предел /масса второй частицы $M_2 \to \infty$/. В этом случае частица 2 движется прямолинейно и равномерно. Переходя с помощью преобразования Лоренца в систему координат, где частица 2 покоится, получаем вместо /1/

$$\frac{d^2x_i}{d\tau_1^2} = x_i\frac{f_1}{r^3} + \frac{1}{c}f_2\cdot\frac{v_{1i}}{\sqrt{1-\beta_1^2}}, \quad \frac{d^2t_1}{d\tau_1^2} = \frac{1}{c^2}\frac{f_1}{r^3}(\vec{x}\vec{v}_1) + \frac{f_2}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\frac{v_1^2}{c^3}. \qquad /3/$$

Перейдем в /3/ от собственного времени τ_1 к координатному t_1:

$$\frac{d^2x_i}{dt_1^2} = (1-\beta_1^2)\cdot\left[x_i\cdot\frac{f_1}{r^3} + \frac{1}{c}\frac{dx_i}{dt_1}\left(f_2\cdot\sqrt{1-\beta_1^2} - \frac{f_1}{r^3}\frac{\vec{r}\vec{v}_1}{c}\right)\right]. \qquad /4/$$

Сравним /4/ с точными уравнениями движения пробного тела в ОТО /в метрике Шварцшильда $ds^2 = c^2\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2 - d\vec{x}^2 - \mu(\vec{x}\cdot d\vec{x})^2$/:

$$\frac{d^2x_i}{dt_1^2} = \frac{dx_i}{dt_1}\cdot\mu(\vec{x}\vec{v}_1) - x_i\left[\frac{1}{2r}\cdot\frac{d\mu}{dr}(\vec{x}\vec{v}_1)^2 + \mu v_1^2 + \frac{mc^2}{r^3}\right]\cdot\left(1-\frac{2m}{r}\right). \qquad /5/$$

Здесь

$$\mu = \frac{2m}{r^3}\,\frac{1}{1-2m/r}, \quad m = \frac{GM_2}{c^2},$$

G- ньютонова гравитационная константа. Уравнения движения пробного тела в лоренц-инвариантной теории и в ОТО совпадают при следующем единственном выборе функций f:

$$f_1 = -\frac{1-2m/r}{1-\beta_1^2}\left[\frac{r^2}{2}\,\frac{d\mu}{dr}(\vec{r}\vec{v}_1)^2 + \mu\cdot v_1^2\cdot r^3 + mc^2\right], \qquad /6/$$

$$f_2\sqrt{1-\beta_1^2} = \frac{f_1}{r^3}\,\frac{(\vec{r}\vec{v}_1)}{c} + \frac{\mu(\vec{r}\vec{v}_1)}{1-\beta_1^2}\cdot c.$$

Поставим следующий вопрос: возможно ли восстановить из урезанных одночастичных функций /6/ полные двухчастичные функции $f_1(A,B,C)$, $f_2(A,B,C)$, входящие в систему уравнений /1/? Вот один из возможных рецептов. В выражениях /6/ вместо $r, \sqrt{1-\beta_1^2}$ и $(\vec{r}\vec{v}_1)$ следует подставить величины A, B, C по следующему правилу:

$$\frac{\vec{r}\vec{v}_1}{c} \to B - \frac{A}{C}, \quad r \to B, \quad \sqrt{1-\beta_1^2} \to \frac{1}{C}, \quad 1-\frac{2m}{r} \to 1 - \frac{2G(M_1+M_2)}{c^2B}.$$

где величины A, B, C зависят от координат и скоростей двух частиц и определены соотношениями /2/. Тогда лоренц-ковариантные двухчастичные уравнения /1/ с определенными таким образом функциями $f_1(A,B,C)$ и $f_2(A,B,C)$ имеют в качестве одночастичного предела уравнения движения пробного тела в ОТО.

3. Совпадение /4/ с уравнениями движения пробного тела в ОТО можно получить также в рамках так называемого полностью ковариантного формализма [4]. В этом подходе предполагается, что в данной лоренцевской системе взаимодействуют только те части траекторий частиц, которые соответствуют равным временам. В этом формализме уравнения движения имеют вид

$$w_{1\nu} = (x_\nu - y_1\cdot v_{1\nu})\cdot f + (v_{2\nu} - y_4\cdot v_{1\nu})\cdot g,$$

$$w_{2\nu} = -(x_\nu - y_2\cdot v_{2\nu})\cdot F + (v_{1\nu} - y_4\cdot v_{2\nu})\cdot G \qquad (\nu = 1,\dots,4).$$

Здесь $x_\mu = x_{1\mu}(t) - x_{2\mu}(t)$; $v_{i\mu}$, $w_{i\mu}$ - 4-скорость и ускорение i -той частицы; $y_1 = (xv_1)$, $y_2 = (xv_2)$, $y_3 = (xx)$, $y_4 = (v_1 v_2)$; f, g, F, G - функции инвариантов y_i. Условие лоренц-ковариантности приведенных уравнений движения накладывает ограничения на функции f, g, F, G. Именно, оказывается [4], что эти функции должны удовлетворять системе четырех нелинейных дифференциальных уравнений. В потенциальном пределе одна из частиц /скажем, вторая/ движется с постоянной скоростью. Тогда $G = F = 0$, и упомянутая система уравнений сводится к следующей линейной системе: $D\cdot f = 0$, $D\cdot g + f = 0$, где D - дифференциальный оператор: $D = y_4\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2} + 2y_2\frac{\partial}{\partial y_3}$. Эти уравнения легко решить. Вот ответ: f может быть произвольной функцией двух следующих комбинаций инвариантов: $y_2^2 - y_3$ и $y_1 - y_4\cdot y_2$; функция g равна

$$g = -f(y_2^2 - y_3,\ y_1 - y_4 - y_2)\cdot\frac{y_1}{y_4} + g_1,$$

где g_1 - опять-таки произвольная функция все тех же инвариантных комбинаций. Наличие двух произвольных функций позволяет, как и ранее, легко воспроизвести уравнение, совпадающее с движением пробной частицы в ОТО.

4. Итак, совпадают тройки уравнений, в которых инвариантный шварцшильдовский интервал в ОТО и лоренц-инвариантный интервал СТО выражены через координатное время t. Между тем традиционное описание трех классических опытов в рамках ОТО основано на использовании как пространственных, так и временной компонент уравнения движения. Докажем, что система уравнений /5/ доста-

точна для описания упомянутых выше опытов. Прежде всего вычислим интегралы углового момента. Из /4/ или /5/ следует

$$x_j \frac{d^2 x_i}{dt^2} - x_i \frac{d^2 x_j}{dt^2} = \left(x_j \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dx_j}{dt}\right)\cdot\mu\cdot(x\cdot\dot{x}), \qquad /7/$$

то есть

$$\frac{x_i \dot{x}_j - x_j \dot{x}_i}{1 - 2m/r} = L_{ij} = \text{const}.$$

Точка над координатами означает дифференцирование по координатному времени. Интеграл энергии равен

$$\frac{(\dot{x}\dot{x})}{(1-2m/r)^2} + \frac{2m}{r^3}\,\frac{(x\cdot\dot{x})^2}{(1-2m/r)^3} - \frac{2mc^2}{r(1-2m/r)} = \epsilon. \qquad /8/$$

Из /7/ следует, что движение происходит в плоскости. Перепишем /7/, /8/ в более простой форме /в плоскости XY/:

$$\frac{r^2\dot{\phi}}{1-2m/r} = L, \quad \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2}{(1-2m/r)^2} + \frac{2m}{r}\,\frac{\dot{r}^2}{(1-2m/r)^3} - \frac{2mc^2}{r(1-2m/r)} = \epsilon. \qquad /9/$$

Исключив из /9/ временную переменную t, получаем уравнение орбиты пробной частицы:

$$u_\phi^2 + (1-2mu)\,u^2 = \frac{2mu}{L^2}(c^2-\epsilon) + \frac{\epsilon}{L^2} \qquad \left(u = \frac{1}{r}\right). \qquad /10/$$

Дифференцируем /10/ по ϕ:

$$u_{\phi\phi} + u = 3mu^2 + \frac{m}{L^2}(c^2-\epsilon). \qquad /11/$$

Уравнение /11/ совпадает с уравнением движения пробной частицы в ОТО. Поэтому смещение перигелия планет оказывается одним и тем же. Далее, так как для фотона величина ϵ /энергия на единицу массы/ равна c^2, то /11/ принимает вид $u_{\phi\phi} + u = 3mu^2$, что совпадает с уравнением распространения луча света в ОТО. Таким образом, величина отклонения света та же, что и в ОТО. Столь же элементарно доказывается совпадение времен задержки радиолокационных сигналов в ОТО /четвертый эффект ОТО/ и данной лоренц-ковариантной теории. Для этого достаточно заметить, что уравнения /9/ одинаковы как в ОТО, так и в данной теории. Перейдем к красному смещению. Идентифицируя полусумму первых двух членов как кинетическую энергию /что следует из нерелятивистского предела/ и приравнивая ее к величине энергии фотона $h\nu$, получаем правильную величину красного смещения $\nu \sim GM/r$. Некоторая осторожность, однако, необходима. Уравнения /9/ образуют полную систему. Поэтому невозможно для фотона дополнить /9/ уравнением

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = c^2, \qquad /12/$$

так как уравнения /12/ и /9/ оказываются несовместными. Соотношение /12/ означает, что свет не взаимодействует с тяготением. Тот факт, что отсутствие такого взаимодействия ведет к многочисленным парадоксам и несовместимо с законом сохранения энергии, был отмечен А.Эйнштейном еще в 1911 году [5]. Поэтому для распространения света мы не накладываем условия /12/. Вместо этого мы рассматриваем движение фотонов и пробных тел с единой точки зрения и определяем фотон как такие пробные частицы, скорость которых равна c на бесконечности /или в отсутствие тяготения/. Тогда из соотношения /8/ следует, что энергетическая константа ϵ для фотонов равна c^2. Сказанное выше относится только к уравнению /9/, которое было получено из более общего уравнения /4/ с помощью весьма специфического выбора функций f_1 и f_2 /имевшего целью в точности воспроизвести уравнения движения ОТО/.

Элементарные вычисления показывают, что упрощенный электродинамический вариант двухчастичных сил, предложенный в [2,3], дает в потенциальном пределе неправильное значение смещения перигелия Меркурия /равное одной шестой наблюдаемого на опыте/.

5. Мы хотим указать на связь данного подхода с работами Дж.Биркгофа и сотрудников [6], в которых рассматривались три решающих опыта ОТО в рамках плоского пространства-времени. Уравнения, полученные в этих работах, являются частными случаями уравнения /3/ при следующем выборе f_1, f_2:

$$f_1 = -mc^2 - \frac{2mv^2}{1-\beta^2} \approx -mc^2 - 2mv^2, \quad f_2 = \frac{m(\vec{r}\vec{v})c}{r^3\sqrt{1-\beta^2}} \approx \frac{m(\vec{r}\vec{v})c}{r^3}. \qquad /13/$$

Авторы [6] утверждают, что при таком выборе функций f_1, f_2 в первом порядке по $1/c^2$ правильно воспроизводятся смещения перигелия Меркурия, красное смещение и отклонение луча света в гравитационном поле. Сравним функции f_1, f_2, отвечающие данному рассмотрению /6/ и модели Биркгофа /13/. Пренебрегая членами порядка более высокого, чем $1/c^2$, получаем

$$f_1 = -mc^2\left(1 - \frac{2m}{r} + 3\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{3m}{r^2}(\vec{r}\vec{v})^2, \quad f_2 = \frac{mc}{r^3}(\vec{r}\vec{v}), \qquad /6'/$$

$$f_1^B = -mc^2 - 2mv^2, \quad f_2^B = f_2. \qquad /13'/$$

Столь существенное отличие f_1 и f_1^B вынуждает нас проанализировать ситуацию более детально. Без ограничения общности можно считать, что движение происходит в плоскости XY. Уравнения Биркгофа имеют вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{mc^2}{r^3}x - \frac{2mx}{r^3}\cdot v^2 + \frac{m(\vec{r}\vec{v})}{r^3}\cdot\dot{x},$$

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{mc^2}{r^3}y - \frac{2my}{r^3}v^2 + \frac{m(rv)}{r^3}\cdot\dot{y} \quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{d\tau},\ \dot{y} = \frac{dy}{d\tau},\ v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2\right). \qquad /3'/$$

Из /3'/ находим интегралы энергий и углового момента:

$$\frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{e^{-m/r}} = \lambda, \qquad \frac{v^2 + c^2}{e^{2m/r}} = c^2 + \epsilon. \qquad /9'/$$

Исключая собственное время τ, получаем уравнение орбиты:

$$u_\phi^2 + u^2 = e^{2mu}[(c^2+\epsilon)e^{2mu} - c^2] \qquad \left(u = \frac{1}{r}\right). \qquad /10'/$$

Пренебрегаем в /10'/ членами более высокого порядка, чем $1/c^2$:

$$u_\phi^2 + u^2\left[1 - \frac{2m^2}{3\lambda^2}(3c^2+4\epsilon)\right] = \frac{1}{\lambda^2}[\epsilon + 2mu(c^2+2\epsilon)].$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$r = \frac{r_0}{1 + p\cos(\omega\phi)}, \qquad /14/$$

где

$$r_0 = \frac{\lambda^2\omega^2}{m(c^2+2\epsilon)}, \quad \omega^2 = 1 - \frac{2m^2}{\lambda^2}(3c^2+4\epsilon), \quad p = \left[1 + \frac{\epsilon\lambda^2\omega^2}{m^2(c^2+2\epsilon)^2}\right]^{1/2}.$$

Для движения планет $\epsilon < 0$, $|\epsilon| \ll c^2$, и поэтому

$$r_0 \approx \frac{\lambda^2}{mc^2}, \quad p \approx 1 - \frac{|\epsilon|\lambda^2}{2G^2M^2}, \quad \omega \approx 1 - \frac{3m^2c^2}{\lambda^2}.$$

В этом случае траектория пробной частицы близка к эллиптической. Смещение перигелия планеты за один оборот составляет $\Delta = \frac{6\pi m^2c^2}{\lambda^2}$, что в точности совпадает с результатом, предсказываемым ОТО. Эффект красного смещения, являясь следствием закона сохранения энергии, легко выводится из интеграла энергии /9'/. Результат, как легко было предвидеть, совпадает с результатом ОТО.

Переходим к отклонению луча света. В /9'/ удобно перейти от собственного времени τ к координатному t. После несложных преобразований получаем

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - e^{-2m/r}\cdot\frac{1}{1+\epsilon/c^2}. \qquad /15/$$

Попытаемся подобрать ϵ в /14/ таким образом, чтобы получить правильное экспериментальное значение $\delta_{эксп.}$ для угла отклонения светового луча вблизи солнечного диска. Этому условию удовлетворяет следующее значение ϵ:

$$\epsilon = \frac{c^2}{2}\,\frac{1}{\delta_{эксп}\cdot r_{мин}/4m - 1}. \qquad /16/$$

Здесь $r_{мин}$ – наименьшее удаление светового луча от центра притяжения. Различные эксперименты дают для величины $\frac{\delta_{эксп}\cdot r_{мин}}{4m}$ общерелятивистское значение 1 с точностью от 2 до 15% [7]. Отсюда получаем следующие оценки для ϵ: $\epsilon > 3c^2$ /15%/; $\epsilon > 25c^2$ /2%/, причем $\epsilon = \infty$, если угол отклонения света в точности совпадает с общерелятивистским значением.

Вычислим теперь время запаздывания отраженного радиолокационного сигнала. Ради простоты рассмотрим случай, когда радиосигнал распространяется в радиальном направлении. Тогда из /15/ находим для времени задержки сигнала

$$\Delta t^B = \frac{2\Delta r}{c}\left(\sqrt{1+\frac{c^2}{\epsilon}} - 1\right) + \frac{2mc}{\epsilon}\sqrt{1+\frac{c^2}{\epsilon}}\,\ln\frac{r_2}{r_1}. \qquad /17/$$

ОТО /а, следовательно, и данная лоренц-ковариантная теория/ предсказывает следующее время задержки:

$$\Delta t = \frac{4m}{c}\ln\frac{r_2-2m}{r_1-2m} \approx \frac{4m}{c}\ln\frac{r_2}{r_1}, \qquad /18/$$

которое экспериментально подтверждается с большой точностью. До сих пор движение света ничем не отличалось от движения пробных тел. Определим теперь свет как такие пробные частицы, скорость которых равна c в отсутствие тяготения $(m=0)$ или на бесконечном удалении $(r = \infty)$. Тогда из /15/ следует, что $\epsilon = \infty$. При таком значении ϵ временная задержка радиолокационных сигналов равна нулю. Таким образом, давая правильные результаты для трех известных опытов ОТО, теория Биркгофа не может объяснить задержку радиолокационных сигналов. Существует, по-видимому, единственный опыт [7] /осуществление которого намечено на 1980 г./, для которого показания ОТО и данной лоренц-ковариантной теории разнятся. Это – прецессия гироскопа в гравитационном поле Земли. Угол прецессии гироскопа, установленного, например, на искусственном спутнике Земли, составляет /на один орбитальный оборот/ $\frac{3\pi GM}{Rc^2}$ в ОТО [7] и $\frac{\pi GM}{Rc^2}$ в данном варианте лоренц-ковариантной теории.

Отметим далее, что попытки промоделировать уравнения движения ОТО на основе введения специально подобранных сил в СТО ранее предпринимались неоднократно. Упомянем, например, серию интересных работ [8], в которых было показано, что точное моделирование возможно только в том случае, если сила в СТО представляет собой полином четвертой степени от скоростей:

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = \Omega^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} - \frac{dx^\alpha}{d\tau}\,\Omega_{\beta\gamma\delta}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau}\frac{dx^\delta}{d\tau}\,. \qquad /15'/$$

В рассматриваемом случае Ω представляют собой разности коэффициентов связности плоского и кривого пространств. Докажем, что /15'/ эквивалентно /15/. Будем использовать декартовы координаты. Тогда коэффициенты связности для плоского пространства равны нулю, а соотношение /15'/ есть уравнение движения в метрике Шварцшильда, которое совпадает с уравнением /5/, если за параметр принять координатное время t. Это означает, что тройная сумма в правой части /15'/ трансформировалась в первый член правой части /5/.

6. Система уравнений /1/, определяющая движение частицы 1, должна быть дополнена системой уравнений для движения частицы 2. Выбор в /1/ знака разности $t_1 - t_2 (= r/c)$ отвечает запаздывающему воздействию частицы 2 на частицу 1. Выбор $t_1 - t_2 = -\frac{r}{c}$ отвечает опережающему воздействию частицы 2 на частицу 1 /т.е. действие частицы 2 достигает частицы 1 раньше, чем оно покидает частицу 2/. Вместо /1/ можно было бы взять полусумму запаздывающего и опережающего взаимодействий. При этом для аналога электродинамического случая, упомянутого в конце п.2, можно найти релятивистски-инвариантный лагранжиан [9] и, следовательно, получить в явном виде величины энергии, импульса, углового момента. При этом найдены частные точные решения релятивистской двухчастичной задачи [10]. При этом частицы вращаются по двум концентрическим окружностям с постоянной угловой скоростью. Точные решения, отвечающие движению по концентрическим окружностям, существуют и для случая короткодействующих двухчастичных взаимодействий [11]. Подобные же точные решения удается получить и тогда, когда взаимодействие частицы 1 с частицей 2 является запаздывающим, а взаимодействие частицы 2 с частицей 1 является опережающим /при этом частицы 1 и 2 лежат на одном и том же световом конусе/. В этом случае, кроме упомянутого движения по концентрическим окружностям, можно

отыскать точное решение, отвечающее прямолинейному движению [12]. Если же запаздывающими являются как взаимодействие частицы 1 с 2, так и 2 с 1, точные решения неизвестны. В этом случае для медленных движений в /1/ можно выполнить разложение по степеням $1/c^2$. При этом /1/ сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений без запаздывания. С точностью до членов $1/c^2$ включительно имеем

$$\frac{d^2x_{1i}}{dt^2} = -\frac{GM_2}{r^3}\left[1 + \frac{1}{c^2}\phi_1 - \frac{v_1^2}{c^2} - \frac{3}{2}\frac{GM_1}{rc^2} - \frac{3}{2}\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{v}_2}{rc}\right)^2\right]x_i + \frac{1}{c^2}(v_{1i} - v_{2i})\left[\phi_2 + \frac{GM_2}{r^3}(\vec{r}\vec{v}_1)\right], \qquad /19/$$

где мы положили

$$f_1 = -GM_2\left(1 + \frac{1}{c2}\phi_1\right), \quad f_2 = \frac{1}{c}\phi_2\,.$$

Все значения координат, скорости, ускорения взяты в /19/ в один и тот же момент времени t. Движение частицы 2 подчиняется точно такому же уравнению /с заменой индексов $1 \leftrightarrow 2$/. Система обыкновенных дифференциальных уравнений /19/ может быть решена стандартными методами, если известны начальные положения и скорости частиц. Используя процедуру, описанную в конце п.2, находим ϕ_1 и ϕ_2. С точностью до членов порядка $1/c^2$ имеем

$$\phi_1 = 3\cdot v^2 - \frac{2\cdot G(M_1 + M_2)}{r} - 3\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{r}\right)^2, \quad \phi_2 = \frac{GM_2}{r^3}(\vec{r}\cdot\vec{v}) \quad (\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2)\,.$$

Подставляя ϕ_1 и ϕ_2 в /19/, убеждаемся, что уравнения движения /14/ отличаются от уравнений движения, которые следуют из приближенного лагранжиана Эйнштейна-Инфельда-Гофмана. Тем не менее потенциальный предел этих уравнений $(M_2 \to \infty)$ один и тот же. Это частично связано с неоднозначностью восстановления двухчастичных функций из одночастичных.

Если движение не является медленным, но одна из масс существенно превышает другую, для решения системы /1/ можно воспользоваться методом, предложенным в [13]. Именно, в первом приближении считаем движение большой массы M_2 прямолинейным. При заданном движении M_2, пользуясь /1/, вычисляем движение M_1. Подставляя в уравнения движения для M_2 найденное движение M_1, снова получаем движение M_2, но с поправками порядка M_1/M_2. Этот процесс продолжается до получения необходимой точности. В обоих приближенных случаях задание начальных положений и скоростей полностью определяет дальнейшую динамику двухчастичной системы. Но для точной системы уравнений /1/ /плюс уравнения для движения второй частицы/ из-за конечной скорости распространения взаимодействия задания положений и скоростей в какой-то момент времени недостаточно: необходимо задать начальные координаты и скорости на конечных участках траекторий частиц или задать в данный момент не только координаты и скорости, но также все высшие производные по времени от координат [14]. Поэтому упомянутые приближенные решения составляют весьма малую часть множества точных решений. Одним из путей преодоления этих осложнений является введение подходящего эвристического принципа [15], который позволил бы ограничить упомянутое множество решений. Конечно, остается открытым вопрос о соотношении этих принципов с экспериментальными данными.

В работе [16] была получена общая форма приближенно-инвариантного /с точностью до $1/c^2$ / релятивистского лагранжиана. Сравнивая уравнения движения /19/ с уравнениями движения, вытекающими из лагранжиана [16], легко восстановить лагранжиан, соответствующий уравнениям /19/. Это, в свою очередь, определяет приближенные интегралы движения, соответствующие импульсу, энергии и угловому моменту.

7. Обратимся еще раз к трем одночастичным уравнениям /4/. При выборе функций f_1, f_2 с помощью формул /6/ получается правильное описание трех решающих опытов ОТО. Поскольку уравнения /4/ отнесены к системе покоя частицы 2, всякая информация о движении этой частицы отсутствует. Поэтому в уравнениях /4/ отсутствует информация о движении системы двух частиц как целого, а следовательно, и о свойствах симметрии этого движения. "Разморозить" эту степень свободы можно по-разному. Можно потребовать, например, чтобы полученные двухчастичные уравнения были лоренц-ковариантными. Как мы указывали ранее, в этом случае для определения f_1, f_2, входящих в /1/, можно воспользоваться рецептом, указанным в конце п.2. С другой стороны, можно потребовать, чтобы уравнения /4/ были потенциальным пределом галилеевско-ковариантных двухчастичных уравнений. Последние выглядят следующим образом:

$$\frac{d^2 x_{1i}}{dt^2} = F_1 \cdot x_i + F_2 \cdot v_i , \qquad /20/$$

$$(x_i = x_{1i} - x_{2i}, \quad v_i = v_{1i} - v_{2i}) .$$

Здесь F_1, F_2 - функции трех инвариантов группы Галилея: $r^2 = \Sigma x_i^2$, $v^2 = \Sigma v_i^2$, $\vec{r}\vec{v} = \Sigma x_i v_i$. Если мы хотим, чтобы в потенциальном пределе уравнения /20/ совпадали с уравнениями движения пробной частицы в ОТО /5/, то мы должны следующим образом выбрать функции F_1, F_2:

$$F_1 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)\left[\frac{1}{2r}\frac{d\mu}{dr} \cdot (\vec{r}\vec{v})^2 + \mu \cdot v^2 + \frac{mc^2}{r^3}\right], \quad F_2 = \mu(\vec{r} \cdot \vec{v}) , \qquad /21/$$

$$\mu = \frac{2m}{r^3}\,\frac{1}{1 - 2GM/rc^2} , \quad m = \frac{GM_2}{c^2}, \quad M = M_1 + M_2 .$$

При таком выборе F_1, F_2 воспроизводятся результаты решающих опытов ОТО. Попытки модификации законов ньютоновой механики известны давно /Гаусс, Риман, Вебер/. В рамках такого подхода возможность приближенного описания упомянутых опытов ОТО изучалась Тредером [17]. В отличие от этих работ уравнения /20/ с определенными в /21/ функциями F_1, F_2 в потенциальном пределе в точности воспроизводят уравнения движения ОТО. Несостоятельность этих попыток построения галилеевской ковариантной теории /включая и нашу/ состоит в том, что, правильно описывая большинство эффектов ОТО, они не могут описать эффектов СТО /сокращение промежутков длины и времени и т.д./.

8. Данный подход в значительной степени является феноменологическим. В самом деле, неизвестные функции фиксируются либо при сравнении с экспериментом, либо с уравнениями движения ОТО. Весьма отчетливо недостатки данного подхода выявляются при сравнении с общей теорией относительности Эйнштейна, где распределение материи определяет гравитационное поле и движение в нем. К сожалению, в ОТО нет до сих пор сколь-нибудь удовлетворительного решения задачи двух тел. С другой стороны, в рамках СТО существуют интересные возможности решения этой задачи.

Авторы весьма благодарны проф. Н.А.Черникову и Н.С.Шавохиной за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Poincare H. Rend.Circ.Mat. Palermo, 1906, 21, p.129; перевод в сб.: Принцип относительности. Атомиздат, М., 1973, с.118.
2. Minkowski H. Gött.Nachr., 1907, p.472.
3. Брежнев В.С. В кн.: Труды Всесоюзного НИИ оптико-физических измерений, теор. и мат.физика, серия А, вып. 1. ВНИИОФИ, М., 1972, с.139.
4. Kerner E.H. The Theory of Action at Distance in Relativistic Particle Dynamics, N.Y., 1972; Droz-Vincent Ph. Ann.Inst. H.Poincare, 1977, 27, p.407; Martin J., Sanz J.L. J.Math.Phys., 1977, 19, p.1887; Wray J.C. Phys.Rev., 1969, D1, p.2212.

5. Эйнштейн А. Собрание научных трудов, т.1. "Наука", М., 1965, с.165.
6. Birkhoff G.D. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1943, 29, p.231; Barajas A. Proc.Nat. Acad. Sci. USA, 1944, 30, p.54; Barajas A. et al. Phys.Rev., 1944, 66, p.138.
7. Гинзбург В.Л. УФН, 1979, 128, с.435; Руденко В.Н. УФН, 1978, 126, с.361.
8. Петров А.З. В сб.: Гравитация и теория относительности. Изд-во Казанского университета, 1968, №4-5, с.7-21, 22-43; там же, 1969, №6, с.7-21; 1970, №7, с.3-18; Шавохина Н.С. там же, 1970, №7, с.135-138.
9. Wheeler J.A., Feynman R.P. Rev.Mod.Phys., 1945, 17, p.157; ibid, 1949, 21, p.425.
10. Schild A. Phys.Rev., 1963, 131, p.2762.
11. Andersen C.M., Bayer H.C. Ann. of Phys., 1970, 60, p.67.
12. Bruhns B. Phys.Rev., 1973, D8, p.2370.
13. Synge J.L. Proc. Roy.Soc., 1940, A117, p.118.
14. Anderson J.L.Principles of Relativity Physics.AP,N.Y.,1967.
15. Черников Н.А., Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-10375, Дубна, 1977; ОИЯИ, Р2-11295, Дубна, 1978; ОИЯИ, Р2-12813, Дубна, 1979.
16. Woodcock H.W., Havas P. Phys.Rev., 1972, D6, p.3422.
17. Тредер Г.Ю. Теория гравитации и принцип эквивалентности. Атомиздат, М., 1973; Тредер Г.Ю. Относительность инерции. Атомиздат, М., 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 апреля 1980 года.