объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-80-318

Г.С.Погосян, В.М.Тер-Антонян

СВЯЗЬ МЕЖДУ СФЕРИЧЕСКИМИ И ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ КУЛОНОВСКИМИ ВОЛНОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ В НЕПРЕРЫВНОМ СПЕКТРЕ

Направлено в ЖЭТФ

1980

ВВЕДЕНИЕ

Одной из характерных особенностей квантовомеханических задач со скрытой симметрией является разделение переменных в уравнении Шредингера в нескольких системах координат. В результате возникает несколько альтернативных наборов волновых функций. Каждый из этих наборов удобен в том или другом конкретном случае, и поэтому нужно уметь переходить от одного набора к другому.

В случае кулоновского поля * переменные в уравнении Шредингера разделяются в нескольких системах координат [1], в том числе в параболической и сферической. В дальнейшем нас будут интересовать последние две системы. Параболические волновые функции являются собственными функциями гамильтониана и Z-проекций оператора момента и вектора Рунге-Ленца, а сферические описывают состояния с данным значением энергии, орбитального момента и азимутального квантового числа. В этом смысле имеются два набора, и при данных E и m для каждой из волновых функций одного набора второй набор служит базисом, по которому она может быть разложена. Разложение параболических волновых функций по сферическому базису мы будем называть "прямым" преобразованием, разложение сферических волновых функций по параболическому базису - "обратным", а коэффициенты этих преобразований - трансформационными коэффициентами.

Трансформационные коэффициенты, связывающие параболические и сферические кулоновские волновые функции дискретного спектра, были вычислены в работах [2-4].

В работе [5] был рассмотрен ряд вопросов, связанных со скрытой симметрией в кулоновском поле и, в частности, показано, что в случае рассеяния, когда в качестве параболической волновой функции выбирается резерфордовская волновая функция, трансформационные коэффициенты выражаются через коэффициенты Клебша-Гордана для обобщенных "представлений" группы SU(2), отвечающих определенным комплексным значениям орбитального момента**.

---

*В дальнейшем имеется в виду кулоновское поле притяжения. Все результаты записываются в кулоновской системе единиц.

**Задача о вычислении трансформационных коэффициентов, определяющих преобразования между различными наборами волновых функций, рассматривалась и для других квантовых систем, наделенных динамической симметрией [6-9].

В настоящей статье решается задача о разложении произвольной /т.е. не обязательно резерфордовской/ параболической кулоновской волновой функции непрерывного спектра по соответствующему сферическому базису. При такой постановке вопроса приобретает смысл и обратное преобразование. Получены два эквивалентных выражения для трансформационных коэффициентов. Первое из них удобно при конкретных вычислениях, второе отражает динамическую симметрию кулоновского поля в непрерывном спектре. Показано, что трансформационные коэффициенты прямого и обратного преобразований при подходящем выборе фаз волновых функций вещественны и совпадают. Как прямое, так и обратное преобразования при аналитическом продолжении переходят в аналогичные соотношения в дискретном спектре.

§1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРАНСФОРМАЦИОННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

В непрерывном спектре орбитальный момент ℓ пробегает все целочисленные значения, ограниченные снизу неравенством $\ell \geq |m|$. В соответствии с этим прямое преобразование имеет вид

$$\Psi_{k\beta m}(\xi,\eta,\phi) = \sum_{\ell=|m|}^{\infty} W^{\ell m}_{k\beta}\Psi_{k\ell m}(r,\theta,\phi). \qquad /1/$$

Параметр β является собственным значением оператора $\frac{1}{2}A_z$, где A_z – проекция вектора Рунге-Ленца

$$\hat{\vec{A}} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} - \frac{1}{2}([\hat{\vec{p}}\,\hat{\vec{\ell}}] - [\hat{\vec{\ell}}\,\hat{\vec{p}}]),$$

коммутирующая с гамильтонианом и z-проекцией орбитального момента. Параметр β имеет также смысл константы разделения в параболических координатах*. Величина k определяется как $k=\sqrt{2E}$, а волновые функции подчинены условиям нормировки:

$$\int \Psi_{k\beta m}(\xi,\eta,\phi)\Psi^*_{k'\beta' m'}(\xi,\eta,\phi)\,dV = 2\pi\delta(k-k')\delta(\beta-\beta')\delta_{mm'},$$

$$\int \Psi_{k\ell m}(r,\theta,\phi)\Psi^*_{k'\ell' m'}(r,\theta,\phi)\,dV = 2\pi\delta(k-k')\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'},$$

и имеют вид

$$\Psi_{k\beta m}(\xi,\eta,\phi) = C^m_{k\beta}\, f^m_{k\beta}(\xi)\, f^m_{k,-\beta}(\eta)\frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}},$$

* При решении уравнения Шредингера в параболических координатах /10/ возникают две константы разделения, β_1 и β_2, связанные соотношением $\beta_1+\beta_2=1$. Параметры β_1 и β_2 выражаются через β следующим образом: $\beta_1=½+\beta$, $\beta_2=½-\beta$.

$$f^m_{k\beta}(x) = \frac{(-ikx)^{|m|/2}}{|m|!}e^{ikx/2}F\left(\frac{|m|+1}{2}-\frac{i}{2k}-\frac{i\beta}{k};|m|+1;-ikx\right), \qquad /1a/$$

$$C^m_{k\beta} = i^{|m|}\sqrt{\frac{k}{\pi}}e^{\pi/2k}\left|\Gamma\left(\frac{|m|+1}{2}-\frac{i}{2k}-\frac{i\beta}{k}\right)\Gamma\left(\frac{|m|+1}{2}-\frac{i}{2k}+\frac{i\beta}{k}\right)\right|,$$

$$\Psi_{k\ell m}(r,\theta,\phi) = N_{k\ell}R_{k\ell}(r)Y_{\ell m}(\theta,\phi), \qquad /1б/$$

$$R_{k\ell}(r) = \frac{(-2ikr)^{\ell}}{(2\ell+1)!}e^{ikr}F(\ell+1-i/k;2\ell+2;-2ikr),$$

$$N_{k\ell} = i^{\ell}\,2k\,e^{\pi/2k}|\Gamma(\ell+1-i/k)|.$$

Нормировочная постоянная $C^m_{k\beta}$ взята из работ /11,12/, а сферическая функция выбрана в виде /13/

$$Y_{\ell m}(\theta,\phi) = (-1)^{\frac{m-|m|}{2}}\frac{e^{im\phi}}{2^{\ell}\ell!}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell+|m|)!}{(\ell-|m|)!}}(\sin\theta)^{-|m|}\frac{d^{\ell-|m|}}{(d\cos\theta)^{\ell-|m|}}(\cos^2\theta-1)^{\ell}.$$

Умножим обе части преобразования /1/ на $Y^*_{\ell m}(\theta,\phi)$ и проинтегрируем по телесному углу. Далее, представим вырожденные гипергеометрические функции, входящие в параболическую волновую функцию, в виде рядов

$$F(\alpha;\beta;z) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_s}{(\beta)_s}\frac{z^s}{s!}, \quad (\alpha)_s = \frac{\Gamma(\alpha+s)}{\Gamma(\alpha)}$$

и перейдем от параболических координат к сферическим. Тогда вместо преобразования /1/ будем иметь

$$W^{\ell m}_{k\beta}F(\ell+1-i/k;2\ell+2;-2ikr) =$$

$$= \frac{(2\ell+1)!}{2^{\ell}(|m|!)^2}\frac{C^m_{k\beta}}{N_{k\ell}}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(v)_s}{(|m|+1)_s}\frac{(u)_t}{(|m|+1)_t}\frac{(-ikr)^{|m|+s+t-\ell}}{s!\,t!}Q^{\ell m}_{st},$$

где

$$Q^{\ell m}_{st} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int(1-\cos\theta)^{t+\frac{|m|}{2}}(1+\cos\theta)^{s+\frac{|m|}{2}}Y^*_{\ell m}(\theta,\phi)e^{im\phi}\,d\Omega,$$

$$v = \frac{|m|+1}{2}-\frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}+\beta\right),$$

$$u = \frac{|m|+1}{2}-\frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}-\beta\right).$$

Последовательное интегрирование по частям убеждает в том, что $Q^{\ell m}_{st}$ отлично от нуля только при условии $s+t+|m|-\ell \geq 0$ и поэтому все члены ряда содержат r в неотрицательной степени, так что в пределе, когда $r\to 0$, получим

$$W^{\ell m}_{k\beta}=\frac{(2\ell+1)!}{2^{\ell}(|m|!)^2}\,\frac{C^{m}_{k\beta}}{N_{k\ell}}\sum_{s=0}^{\ell-|m|}\frac{(v)_s}{(|m|+1)_s}\,\frac{(u)_{\ell-|m|-s}}{(|m|+1)_{\ell-|m|-s}}\,\frac{Q^{\ell m}_{s,\ell-|m|-s}}{s!\,(\ell-|m|-s)!}\,. \qquad /2/$$

Интеграл $Q^{\ell m}_{st}$ при $t=\ell-|m|-s$ переходит в замкнутое выражение

$$Q^{\ell m}_{s,\ell-|m|-s}=(-1)^{\ell-s+\frac{m-|m|}{2}}\,\frac{2^{\ell+1}\ell!}{(2\ell+1)!}\sqrt{\frac{2\ell+1}{2}(\ell+|m|)!\,(\ell-|m|)!}\,.$$

Подставляя его в формулу /2/ и учитывая вспомогательные равенства

$$(u)_{\ell-|m|-s}=(-1)^{s}\,\frac{(u)_{\ell-|m|}}{(1+|m|-\ell-u)}\,,$$

$$(|m|+1)_{\ell-|m|-s}=(-1)^{s}\,\frac{\ell!}{|m|!\,(-\ell)_s}\,,$$

$$(\ell-|m|-s)!=(-1)^{s}\,\frac{(\ell-|m|)!}{(-\ell+|m|)_s}\,,$$

а также сравнивая полученный результат с определением

$${}_3F_2\left\{\begin{matrix}\alpha, & \beta, & \gamma\\ \sigma, & \delta & \end{matrix}\;\middle|\; z\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\gamma)_n}{(\sigma)_n(\delta)_n}\,\frac{z^n}{n!}\,,$$

приходим к выводу, что

$$W^{\ell m}_{k\beta}=(-1)^{\ell+\frac{m-|m|}{2}}\,\frac{C^{m}_{k\beta}}{N_{k\ell}}\,\frac{2}{|m|!}\sqrt{\frac{2\ell+1}{2}\,\frac{(\ell+|m|)!}{(\ell-|m|)!}}\;\times$$

$$\times\,(u)_{\ell-|m|}\;{}_3F_2\left\{\begin{matrix}v, & -\ell, & -\ell+|m|\\ |m|+1, & 1+|m|-\ell-u & \end{matrix}\;\middle|\;1\right\}.$$

Между обобщенными гипергеометрическими функциями ${}_3F_2$ при $z=1$ имеет место соотношение [14]

$${}_3F_2\left\{\begin{matrix}s, & s', & -N\\ t', & 1-N-t & \end{matrix}\;\middle|\;1\right\}=\frac{(t+s)_N}{(t)_N}\;{}_3F_2\left\{\begin{matrix}s, & t'-s', & -N\\ t', & t+s & \end{matrix}\;\middle|\;1\right\}, \qquad /3/$$

пользуясь которым получим

$$W^{\ell m}_{k\beta}=(-1)^{\ell+\frac{m-|m|}{2}}\,\frac{C^{m}_{k\beta}}{N_{k\ell}}\,\frac{2}{|m|!}\sqrt{\frac{2\ell+1}{2}\,\frac{(\ell+|m|)!}{(\ell-|m|)!}}\;\times \qquad /4/$$

$$\times\,\frac{\Gamma(\ell+1-i/k)}{\Gamma(|m|+1-i/k)}\;{}_3F_2\left\{\begin{matrix}\frac{|m|+1}{2}-\frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}+\beta\right), & -\ell+|m|, & \ell+|m|+1\\ |m|+1, & |m|+1-i/k & \end{matrix}\;\middle|\;1\right\}.$$

Подчеркнем, что до сих пор мы не пользовались явным видом нормировочных постоянных $C^{m}_{k\beta}$ и $N_{k\ell}$. В этом смысле формула /4/ справедлива при любом способе нормировки волновых функций. В принятой нами нормировке

$$W^{\ell m}_{k\beta}=(-1)^{\frac{m-|m|}{2}}\,\frac{i^{\ell+|m|}}{\sqrt{2\pi k}}\,\frac{e^{i\delta_\ell}}{|m|!}\,\frac{\left|\Gamma\left(\frac{|m|+1}{2}-\frac{i}{2k}-\frac{i\beta}{k}\right)\Gamma\left(\frac{|m|+1}{2}-\frac{i}{2k}+\frac{i\beta}{k}\right)\right|}{\Gamma(|m|+1-i/k)}\;\times \qquad /5/$$

$$\times\sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell+|m|)!}{(\ell-|m|)!}}\;{}_3F_2\left\{\begin{matrix}\frac{|m|+1}{2}-\frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}+\beta\right), & \ell+|m|+1, & -\ell+|m|\\ |m|+1, & |m|+1-i/k & \end{matrix}\;\middle|\;1\right\},$$

где δ_ℓ – кулоновская фаза рассеяния,

$$\delta_\ell=\arg\Gamma(\ell+1-i/k)\,.$$

§2. СВЯЗЬ ТРАНСФОРМАЦИОННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ КЛЕБША-ГОРДАНА

Трансформационные коэффициенты $W^{\ell m}_{k\beta}$ могут быть выражены также через коэффициенты Клебша-Гордана, продолженные по своим индексам в комплексную область. Воспользуемся следующей формулой, связывающей коэффициенты Клебша-Гордана с обобщенной гипергеометрической функцией ${}_3F_2$ от единичного аргумента [13]:

$$C^{c\gamma}_{a\alpha,b\beta}=(-1)^{a-\alpha}\,\delta_{\gamma,\alpha+\beta}\sqrt{\frac{(a+\alpha)!\,(c+\gamma)!\,(2c+1)}{(a-\alpha)!\,(b-\beta)!\,(b+\beta)!\,(c-\gamma)!\,(a+b+c+1)!\,(a+b-c)!\,(a-b+c)!\,(b-a+c)!}}\;\times$$

$$\times\,(a+b-\gamma)!\,(b+c-\alpha)!\;{}_3F_2\left\{\begin{matrix}-a-b-c-1, & -a+\alpha, & -c+\gamma\\ -a-b+\gamma, & -b-c+\alpha & \end{matrix}\;\middle|\;1\right\}.$$

Согласно /3/ при

$$N=c-\gamma,\quad t'=-a-b+\gamma,\quad t=b+\gamma-\alpha+1,$$
$$s=-a+\alpha,\quad s'=-a-b-1-c$$

справедливо равенство

$${}_3F_2\left\{\begin{matrix}-a-b-c-1, & -a+\alpha, & -c+\gamma\\ -a-b+\gamma, & -b-c+\alpha & \end{matrix}\;\middle|\;1\right\}=\frac{(b-a+c)!\,(b+\beta)!}{(b-a+\gamma)!\,(b+c-\alpha)!}\;{}_3F_2\left\{\begin{matrix}-a+\alpha, & c+\gamma+1, & -c+\gamma\\ \gamma-a-b, & b-a+\gamma+1 & \end{matrix}\;\middle|\;1\right\}.$$

Отсюда

$$C^{c\gamma}_{a\alpha,b\beta}=(-1)^{a-\alpha}\,\delta_{\gamma,\alpha+\beta}\sqrt{\frac{(2c+1)\,(b-a+c)!\,(a+\alpha)!\,(b+\beta)!\,(c+\gamma)!}{(a-\alpha)!\,(b-\beta)!\,(c-\gamma)!\,(a+b-c)!\,(a-b+c)!\,(a+b+c+1)!}}\;\times$$

$$\times\,\frac{(a+b-\gamma)!}{(b-a+\gamma)!}\;{}_3F_2\left\{\begin{matrix}-a+\alpha, & c+\gamma+1, & -c+\gamma\\ \gamma-a-b, & b-a+\gamma+1 & \end{matrix}\;\middle|\;1\right\}.$$

Подставляя в последнюю формулу

$$c = \ell, \quad a = b = \frac{|m|-v-u}{2}, \quad \alpha = \frac{|m|+v-u}{2},$$
$$\gamma = |m|, \quad \beta = \frac{|m|+u-v}{2}$$

и сравнивая результат с /4/, находим, что

$$W^{\ell m}_{k\beta} = (-1)^{v+\frac{m-|m|}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{C^{m}_{k\beta}}{N_{k\ell}} \sqrt{\frac{\Gamma(1-v)\,\Gamma(1-u)\,\Gamma(\ell+1+i/k)}{\Gamma(|m|+1-v)\,\Gamma(|m|+1-u)\,\Gamma(i/k-\ell)}} \times$$
$$\times C^{\ell,|m|}_{\frac{|m|-u-v}{2},\frac{|m|+v-u}{2};\frac{|m|-u-v}{2},\frac{|m|+u-v}{2}}.$$

Воспользовавшись далее свойством [13]

$$C^{c\gamma}_{a\alpha,b\beta} = (-1)^{a+b-c} C^{c\gamma}_{b\beta,a\alpha},$$

получим

$$W^{\ell m}_{k\beta} = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}-u-\ell} \frac{\sqrt{2}\, C^{m}_{k\beta}}{N_{k\ell}} \sqrt{\frac{\Gamma(1-u)\,\Gamma(1-v)\,\Gamma(\ell+1+i/k)}{\Gamma(|m|+1-v)\,\Gamma(|m|+1-u)\,\Gamma(i/k-\ell)}} \times$$
$$\times C^{\ell,|m|}_{\frac{|m|-u-v}{2},\frac{|m|+u-v}{2};\frac{|m|-u-v}{2},\frac{|m|+v-u}{2}}. \qquad /6/$$

В работе [2] было показано, что в дискретном спектре задача о нахождении прямого преобразования сводится к обычной процедуре сложения двух моментов и потому трансформационные коэффициенты совпадают с соответствующими коэффициентами Клебша-Гордана. Формула /6/ обобщает последний результат на непрерывный спектр, где сами моменты комплексны. Аналогичный формуле /6/ результат для резерфордовского случая был получен в работе [5].

§3. ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Параметр β, вообще говоря, может принимать и комплексные значения. Например, для резерфордовской волновой функции $\beta = 1/2 - ik/2$. Поэтому заведомо неясно, по каким β следует интегрировать в обратном преобразовании*.

Рассмотрим интеграл

$$Q^{\ell\ell'} = \int_{-\infty}^{\infty} W^{\ell m}_{k\beta} W^{\ell' m *}_{k\beta}\, d\beta.$$

* Мы не будем обсуждать здесь проблему нормировки волновых функций при комплексных β. Отметим только, что для резерфордовского случая $\beta - \beta' = (k-k')/2i$ и поэтому в условии нормировки достаточно иметь δ-функцию от разности $k-k'$.

Подставим в него вместо $W^{\ell m}_{k\beta}$ выражение /5/ и перейдем от обобщенной гипергеометрической функции $_3F_2$ к конечной сумме, через которую она выражается. Тогда, заменяя также β на $z = \frac{i\beta}{k}$, получим

$$Q^{\ell\ell'} = \frac{1}{2\pi k} \frac{1}{(|m|!)^2} \sqrt{\frac{(2\ell+1)(2\ell'+1)(\ell+|m|)!(\ell'+|m|)!}{(\ell-|m|)!(\ell'-|m|)!}} \frac{i^{\ell}(-i)^{\ell'} e^{i(\delta_\ell-\delta_{\ell'})}}{\Gamma(|m|+1-i/k)\Gamma(|m|+1+i/k)} \times$$
$$\times \sum_{s=0}^{\ell'-|m|} \sum_{t=0}^{\ell-|m|} \frac{1}{s!} \frac{1}{t!} \frac{(\ell'+|m|+1)_s\,(-\ell'+|m|)_s}{(|m|+1)_s\,(|m|+1+i/k)_s} \frac{(\ell+|m|+1)_t\,(-\ell+|m|)_t}{(|m|+1)_t\,(|m|+1-i/k)_t} B_{st},$$

где

$$B_{st} = (-ik) \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma\left(\frac{|m|+1}{2} + \frac{i}{2k} + s + z\right) \Gamma\left(\frac{|m|+1}{2} - \frac{i}{2k} + t - z\right) \times$$
$$\times \Gamma\left(\frac{|m|+1}{2} + \frac{i}{2k} - z\right) \Gamma\left(\frac{|m|+1}{2} - \frac{i}{2k} + z\right) dz.$$

Согласно лемме Барнса [15]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s)\,ds = \frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta)},$$

если полюсы выражения $\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s)$ лежат справа от пути интегрирования, а полюсы выражения $\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)$ – слева, причем ни один из полюсов первой совокупности не совпадает ни с одним полюсом второй совокупности. В нашем случае требования этой леммы соблюдаются, и поэтому

$$Q^{\ell\ell'} = \frac{i^{\ell}(-i)^{\ell'} e^{i(\delta_\ell-\delta_{\ell'})}}{(2|m|+1)!} \sqrt{\frac{(2\ell+1)(2\ell'+1)(\ell+|m|)!(\ell'+|m|)!}{(\ell'-|m|)!(\ell-|m|)!}} \times$$
$$\times \sum_{s=0}^{\ell'-|m|} \frac{1}{s!} \frac{(\ell'+|m|+1)_s(-\ell'+|m|)_s}{(2|m|+2)_s} \sum_{t=0}^{\ell-|m|} \frac{1}{t!} \frac{(\ell+|m|+1)_t(-\ell+|m|)_t(|m|+1+s)_t}{(|m|+1)_t\,(2|m|+2+s)_t}.$$

Воспользуемся теперь теоремой Заальшютца [16]

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \frac{(a)_p (b)_p (-n)_p}{(c)_p (1+a+b-c-n)_p} = \frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n (c-a-b)_n}.$$

Подставляя сюда

$$a = \ell + |m| + 1, \quad n = \ell - |m|,$$
$$b = |m| + 1 + s, \quad c = 2|m| + 2 + s,$$

получим

$$\sum_{t=0}^{\ell-|m|} \frac{1}{t!} \frac{(\ell+|m|+1)_t(-\ell+|m|)_t(|m|+1+s)_t}{(|m|+1)_t\,(2|m|+2+s)_t} = \frac{(-\ell+|m|+1+s)_{\ell-|m|}(|m|+1)_{\ell-|m|}}{(2|m|+2+s)_{\ell-|m|}(-\ell)_{\ell-|m|}}.$$

В результате $Q^{\ell\ell'}$ приобретает вид

$$Q^{\ell\ell'} = \frac{(-1)^{|m|}(-i)^{\ell+\ell'} e^{i(\delta_\ell-\delta_{\ell'})}}{(\ell+|m|+1)!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)(2\ell'+1)(\ell+|m|)!(\ell'+|m|)!}{(\ell-|m|)!(\ell'-|m|)!}}\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{\ell'-|m|}\frac{(\ell'+|m|+1)_s(-\ell'+|m|)_s}{(\ell+|m|+2)_s\,\Gamma(s+|m|+1-\ell)}.$$

Так как $s_{max}=\ell'-|m|$, то при $\ell'<\ell$ для всех s справедливо неравенство $s+|m|+1-\ell\leq 0$ и поэтому $Q^{\ell\ell'}=0$. Этот результат остается верным и при $\ell'>\ell$, так как первоначальное выражение для $Q^{\ell\ell'}$ симметрично относительно замены $\ell\to\ell'$. При $\ell=\ell'$ в сумме по s нужно учитывать лишь последний член с $s=\ell'-|m|$. Легко убедиться, что $Q^{\ell\ell'}=1$. Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{k\beta}^{\ell m} W_{k\beta}^{\ell' m *}\, d\beta = \delta_{\ell\ell'}. \qquad /7/$$

Заметим еще, что формула /3/ позволяет убедиться в вещественности коэффициентов $W_{k\beta}^{\ell m}$, так что в /7/ можно и не писать комплексного сопряжения.

Тогда для обратного преобразования имеем:

$$\Psi_{k\ell m}(r,\theta,\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{k\beta}^{\ell m}\Psi_{k\beta m}(\xi,\eta,\phi)\, d\beta, \qquad /8/$$

где интегрирование ведется по вещественной оси.

§4. ПЕРЕХОД К ДИСКРЕТНОМУ СПЕКТРУ

Покажем, что формулы /1/ и /8/ переходят в известные результаты дискретного спектра [2]. Подставим /1а/, /1б/ и /4/ в преобразование /1/ и перейдем к пределу

$$k\to i|k| = i\sqrt{2|E|} = \frac{i}{n},$$

$$\frac{|m|+1}{2}-\frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}+\beta\right)\to -n_1,\quad \frac{|m|+1}{2}-\frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\to -n_2,$$

где n_1 и n_2 – целые неотрицательные числа и $n=n_1+n_2+|m|+1$. Тогда, учитывая равенство

$$\frac{\Gamma(\ell+1-n)}{\Gamma(|m|+1-n)} = (-1)^{\ell-|m|}\frac{\Gamma(n-|m|)}{\Gamma(n-\ell)}$$

и переходя к нормированным волновым функциям дискретного спектра

$$\tilde\Psi_{n_1 n_2 |m|}(\xi,\eta,\phi) = \frac{\sqrt{2}}{n^2}\sqrt{\frac{(n_1+|m|)!(n_2+|m|)!}{n_1!n_2!}}\frac{(\xi/n)^{|m|/2}}{|m|!}\frac{(\eta/n)^{|m|/2}}{|m|!}\times \qquad /9/$$

$$\times e^{-(\xi+\eta)/2n}\frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}}F(-n_1;|m|+1;\xi/n)\,F(-n_2;|m|+1;\eta/n),$$

$$\tilde\Psi_{n\ell m}(r,\theta,\phi) = \frac{2}{n^2}\sqrt{\frac{(n+\ell)!}{(n-\ell-1)!}}\frac{(2r/n)^\ell}{(2\ell+1)!}e^{-r/n}\times \qquad /10/$$

$$\times F(-n+\ell+1;\,2\ell+2;\,2r/n)\,Y_{\ell m}(\theta,\phi),$$

получим

$$\tilde\Psi_{n_1 n_2 m}(\xi,\eta,\phi) = \sum_{\ell=|m|}^{n-1}\tilde W_{n_1 n_2}^{\ell m}\tilde\Psi_{n\ell m}(r,\theta,\phi), \qquad /11/$$

где

$$\tilde W_{n_1 n_2}^{\ell m} = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}}\frac{(n-|m|-1)!}{|m|!}\left\{\frac{(2\ell+1)(\ell+|m|)(n_1+|m|)!(n_2+|m|)!}{(n+\ell)!n_1!n_2!(\ell-|m|)!(n-\ell-1)!}\right\}^{1/2}\times \qquad /12/$$

$$\times\, {}_3F_2\left\{\begin{matrix}-\ell+|m|,\ \ell+|m|+1,\ -n\\ |m|+1,\ |m|+1-n\end{matrix}\,\Big|\,1\right\}.$$

Коэффициенты $W_{n_1 n_2}^{\ell m}$ с точностью до множителя $(-1)^{\frac{m+|m|}{2}}$ совпадают с теми, которые приведены в работе [3]. Эта разница обусловлена тем, что сферические функции, используемые в работе [3], отличаются от наших фазовым множителем.

Аналогичным образом легко показать, что в пределе дискретного спектра преобразование /6/ принимает вид /11/ с коэффициентом

$$\tilde W_{n_1 n_2}^{\ell m} = (-1)^{n_2-\ell+\frac{m-|m|}{2}} C^{\ell,|m|}_{\frac{n-1}{2},\frac{|m|+n_1-n_2}{2};\frac{n-1}{2},\frac{|m|+n_2-n_1}{2}}.$$

Рассмотрим теперь обратное преобразование /8/. Переходя от переменной интегрирования β к

$$z = -\frac{|m|+1}{2}+\frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}+\beta\right),$$

получим

$$\bar\Psi_{k\ell m}(r,\theta,\phi) = \frac{E_{k\ell m}}{\Gamma(|m|+1-\frac{i}{k})}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{|m|+1}{2}-\frac{i}{k}\infty}^{-\frac{|m|+1}{2}+\frac{i}{k}\infty}{}_3F_2\left\{\begin{matrix}-\ell+|m|,\ \ell+|m|+1,\ -z\\ |m|+1,\ |m|+1-i/k\end{matrix}\,\Big|\,1\right\}\times$$

$$\times\bar\Psi_{kzm}(\xi,\eta,\phi)\,L_{km}(z)\,d\beta, \qquad /13/$$

где

$$E_{k\ell m} = \frac{(-1)^{\frac{m+|m|}{2}}}{\Gamma(\ell+1+i/k)}\frac{1}{|m|!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell+|m|)!}{2(\ell-|m|)}},$$

$$L_{km}(z) = \Gamma(-z)\,\Gamma(|m|+1+z)\,\Gamma\left(|m|+1-\frac{i}{k}+z\right)\Gamma\left(\frac{i}{k}-z\right),$$

$$\bar{\Psi}_{k\ell m}(r,\theta,\phi)=\frac{(-2ikr)^{\ell}}{(2\ell+1)!}\,e^{ikr}\;F(\ell+1-i/k;2\ell+2;-2ikr)\,Y_{\ell m}(\theta,\phi),$$

$$\bar{\Psi}_{kzm}(\xi,\eta,\phi)=\frac{(-ik\xi)^{\frac{|m|}{2}}}{|m|!}\;\frac{(-ik\eta)^{\frac{|m|}{2}}}{|m|!}\;e^{ik\frac{\xi+\eta}{2}}\;\frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}}\;\times$$

$$\times F(-z;|m|+1;-ik\xi)\,F(|m|+1-\frac{i}{k}+z;|m|+1;-ik\eta).$$

Особенности подынтегрального выражения в /13/ по переменной z совпадают с особенностями функции $L_{km}(z)$ и изображены вместе с контуром интегрирования на рис.1. При изменении параметра k меняется положение полюсов, находящихся в верхней полуплоскости, и форма контура /последнее имеет место, если параметр k приобретает мнимую часть/.

Устремим теперь $k\to i|k|$. При этом верхние полюсы лягут на вещественную ось, сдвинувшись вправо относительно соответствующих нижних полюсов на одно и то же расстояние $1/|k|$. При малых $1/|k|$ положение полюсов типа ⊗ изображено на рис.2. Если $1/|k|>(|m|+1)/2$, то ближайший слева к контуру полюс типа ⊗ при стремлении к вещественной оси будет иметь тенденцию пересечь контур, и чтобы избежать возникающей при этом фиктивной расходимости интеграла, необходимо сам контур деформировать. На рис.3 изображена ситуация, соответствующая случаю, когда $1/|k|>|m|+1$.

В дискретном спектре $1/|k|=n\geq|m|+1$, так что $n-|m|-1$ полюсов типа ⊗ при стремлении к вещественной оси будут приближаться к полюсам, расположенным в точках $z=1,2,\ldots n-|m|-1$, и, зажав контур, лишают нас возможности его деформировать*. Сам интеграл при этом становится расходящимся. Эта расходимость компенсируется соответствующей расходимостью в гамма-функции, стоящей перед интегралом в выражении /13/. Действительно, положим $k=i/n+\epsilon$, вычислим интеграл, замкнув контур на бесконечности, а затем устремим ϵ к нулю. Вычеты в точках $z=|m|+1,|m|+2,\ldots$, равны нулю, так как в пределе $\epsilon\to 0$ этим точкам соответствуют полюсы второго порядка. На отрезке $n-|m|\leq z\leq|m|$ находятся простые полюсы, вычеты в которых конечны и также не дают вклада в выражение /13/: при $\epsilon\to 0$ предынтегральная гамма-функция стремится к бесконечности. Остаются простые полюсы, расположен-

* Происходит так называемый "пинч" контура. Метод идентификации особенностей функций, заданных в виде интегралов, по известным сингулярностям подынтегрального выражения в свое время широко использовался при исследовании аналитических свойств фейнмановских интегралов и изложен в монографии [17].

Рис.1. Полюсы и контур интегрирования функции $L_{km}(z)$ при $k>0$.

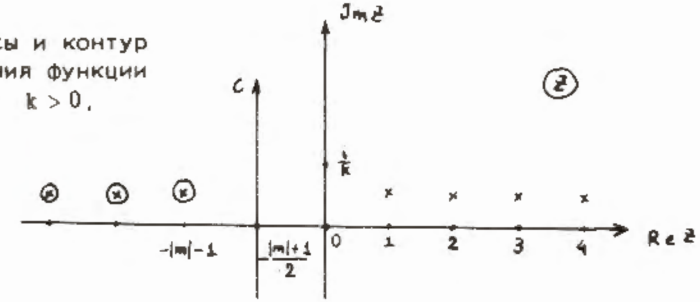
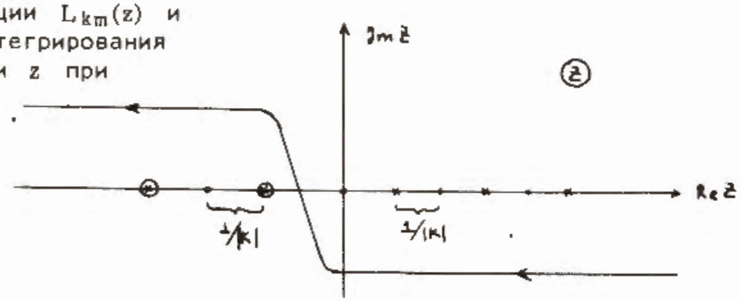


Рис.2. Расположение полюсов функции $L_{km}(z)$ и контура интегрирования в плоскости z при $\frac{1}{|k|}<\frac{|m|+1}{2}$.



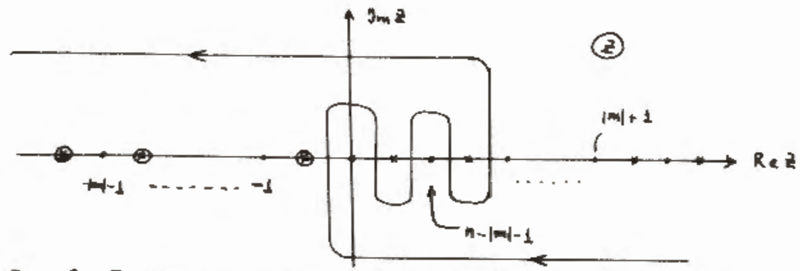


Рис.3. Положение полюсов функции $L_{km}(z)$ и контура интегрирования при $\frac{1}{|k|}\geq|m|+1$.

ные на отрезке $0\leq z\leq n-|m|-1$. Учитывая, что $\operatorname{Res}_{z\to -n}\Gamma(z)=\frac{(-1)^n}{n!}$, пользуясь равенством

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\Gamma(-N+i\epsilon)}{\Gamma(|m|+1-n-i\epsilon)}=(-1)^{n-|m|-1-N}\frac{\Gamma(n-|m|)}{\Gamma(N+1)}$$

и переходя к нормированным на единицу волновым функциям дискретного спектра /10/ и /11/, получим

$$\tilde{\Psi}_{n\ell m}(r,\theta,\phi)=\sum_{n_1=0}^{n-|m|-1}\tilde{W}^{\ell m}_{n_1 n_2}\,\tilde{\Psi}_{n_1 n_2 m}(\xi,\eta,\phi).$$

Здесь трансформационные коэффициенты $\tilde{W}^{\ell m}_{n_1 n_2}$ определяются формулой /12/. Мы приходим к выводу, что как прямое, так и обратное преобразования при аналитическом продолжении из области положительных энергий в область $E<0$ переходят в аналогичные преобразования, имеющие место в дискретном спектре.

В заключение нам приятно выразить глубокую благодарность В.А.Мещерякову и А.Н.Сисакяну за предоставленную возможность работы над статьей в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Мы также искренне признательны С.И.Виницкому, И.В.Комарову, А.В.Матвеенко, Л.И.Пономареву и Г.Т.Торосяну за многочисленные полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Eisenhart J.P. Phys.Rev., 1948, 74, p.87.
2. Park D. Zs.f.Phys., 1960, 159, p.155.
3. Tarter C.B. J.Math.Phys., 1970, 11, p.3192.
4. Арутюнян М.Г., Погосян Г.С., Тер-Антонян В.М. Изв. АН АрмССР, 1978, 13, № 2.
5. Переломов А.М., Попов В.С. ЖЭТФ, 1968, 54, с.1799.
6. Погосян Г.С., Тер-Антонян В.М., Торосян Г.Т. Препринт ПЛРФ-77-04, Ереван, 1977.
7. Погосян Г.С., Тер-Антонян В.М. Изв. АН АрмССР, 1978,13,№ 3.
8. Погосян Г.С., Тер-Антонян В.М. ОИЯИ, Р2-11962, Дубна, 1978.
9. Погосян Г.С., Тер-Антонян В.М. ТМФ, 1979, т.40, №1, с.140.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика,М., 1974.
11. Wentzel G. Zs.f.Phys., 1929, 58, p.348.
12. Fischer J. Ann. Phys., 1931, 8, p.821.
13. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. "Наука", Л., 1975.
14. Bailey W.N. Generalized Hypergeometric Series. Cambridge Tracts No.32, Cambridge, 1935.
15. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. "Наука", М., 1962, т.2.
16. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. "Наука", М., 1963, т.2.
17. Eden R.J. et al. Analytic S-Matrix, 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 апреля 1980 года.