сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-80-273

В.Ш.Гогохия

ДВУХСТОРОННИЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

1980

§1. ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДА ДВУХСТОРОННИХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ОЦЕНОК

Целью настоящей работы является применение некоторых строгих теорем из теории Штурма-Лиувилля /1/ для получения двухсторонних оценок спектра квазипотенциальной краевой задачи, исследованной в работах /2-5/. Рассматриваемая квазипотенциальная задача Штурма-Лиувилля для связанных состояний двух скалярных частиц /кварков/ одинаковой массы имеет вид

$$\frac{d^2 f_\ell(x)}{dx^2} + \{ - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + \lambda^2 V(x,E)\} f_\ell(x) = 0, \qquad /1/$$

$$V(x,E) = \frac{1}{(1+x^2)^{1/2}(x^2+E^2)}, \qquad 0 \le E^2 \le 1,$$

$$f_\ell(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^{\ell+1}, \qquad f_\ell(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^{-\ell}. \qquad /2/$$

Здесь $x = pm^{-1}$ - безразмерная импульсная переменная. Не останавливаясь на теореме существования для собственных значений и собственных функций /1/, сформулируем применительно к квазипотенциальной краевой задаче /1/-/2/ одну из теорем теории Штурма-Лиувилля /1/, на основе которой и сформулирован метод двухсторонних спектральных оценок.

Теорема. Если положительную функцию $V(x,E)$ увеличить во всей области изменения переменной x и параметра E, то положительные собственные значения уменьшатся, а отрицательные увеличатся.

Таким образом, чтобы применить данную теорему к квазипотенциальной краевой задаче /1/-/2/, необходимо найти такие же функции $V_>(x,E)$ и $V_<(x,E)$, для которых неравенства

$$V_>(x,E) \ge V(x,E) = \frac{1}{(1+x^2)^{1/2}(x^2+E^2)} \ge V_<(x,E) \qquad /3/$$

выполнялись бы во всей области изменения переменной $x \in [0,\infty)$ и параметра $E \in [0,1]$, а уравнения

$$\frac{d^2 f_\ell(x)}{dx^2} + \{ - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + \lambda_<^2 V_<(x,E)\} f_\ell(x) = 0, \qquad /4/$$

$$\frac{d^2 f_\ell(x)}{dx^2} + \{ - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + \lambda_>^2 V_>(x,E)\} f_\ell(x) = 0 \qquad /5/$$

с прежними граничными условиями /2/ решались бы в терминах известных специальных функций /или допускали бы более простое, чем исходное уравнение /1/, аналитическое, асимптотическое или численное решение/. Если решения таким образом полученных краевых задач /4/-/2/ и /5/-/2/ известны, то можно записать, основываясь на изложенной теореме, двухсторонние оценки для собственных значений исходной краевой задачи /1/-/2/:

$$|\lambda^2_<| \geq |\lambda^2| \geq |\lambda^2_>|. \qquad /6/$$

В случае краевой задачи /1/-/2/ знаки модулей в /6/ можно опустить, потому что, как будет следовать из дальнейшего, все собственные значения $\lambda^2_n(E)$ положительны.

В качестве аппроксимирующих функций выбираем

$$V_<(x,E) = \begin{cases} (x+E)^{-2}, & x<1, \qquad /7а/ \\ x^{-3}, & x>1, \qquad /7б/ \end{cases}$$

$$V_>(x,E) = \begin{cases} (x^2+E^2)^{-1}, & x<1, \qquad /8а/ \\ x^{-3}, & x>1. \qquad /8б/ \end{cases}$$

Очевидно, что, во-первых, обе эти функции всюду положительны, как того требуют условия теоремы, а во-вторых, такой выбор аппроксимирующих функций правильно воспроизводит асимптотические, при $x \to 0, \infty$, а также аналитические свойства точной функции $V(x,E)$; точка $x=0$ при $E \neq 0$ является не особой, в то время как при $E=0$ возникает регулярная особенность при $x=0$, что и обусловливает поведение спектра $\lambda^2_n(E)$ при малых E. В связи с функциями /7/-/8/ необходимо отметить, что основная теорема, используемая в работе, имеет место и для кусочно-непрерывных аппроксимирующих функций [1].

§2. МИНОРАНТНОЕ СПЕКТРАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ

Рассмотрим вначале краевую задачу /4/-/2/ для минорантной функции $V_<(x,E)$. В интервале $[0,1]$ краевая задача для $V_<(x,E)$ с учетом /7а/ имеет вид

$$\frac{d^2 f_\ell(x)}{dx^2} + \{-\frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + \frac{\lambda^2_<}{(x+E)^2}\} f_\ell(x) = 0, \qquad /9/$$

причем $f_\ell(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^{\ell+1}$.

Если в уравнении /9/ сделать замену переменных $x=-Ez$, то в полученном уравнении подстановка

$f(z) = z^p (z-1)^q \phi(z)$,

где p и q удовлетворяют следующим соотношениям: $p(p-1)=\ell(\ell+1)$, $q(q-1)=-\lambda^2_<$, приводит к гипергеометрическому уравнению для $\phi(z)$.

Окончательно решение уравнения /9/, удовлетворяющее граничному условию в нуле, выглядит следующим образом:

$$f_\ell(x) = x^{\ell+1}(x+E)^q F(a,b;2\ell+2;-\frac{x}{E}), \qquad /10/$$

$$q=\frac{1}{2}+i\nu_0, \quad a=(\ell+1)+i(\nu_0+\nu),$$

$$b=(\ell+1)+i(\nu_0-\nu), \quad \nu_0=\sqrt{\lambda^2_< - 1/4}, \qquad /11/$$

$$\nu = \sqrt{\lambda^2_< - (\ell+1/2)^2}, \quad b=a(\nu\to-\nu).$$

Используя далее известные формулы для аналитического продолжения гипергеометрических функций [6,7], получим исходя из /10/ решение, пригодное в окрестности точки сшивания $x=1$ $(0 \leq E^2 \leq 1)$:

$$f_\ell(x) = (x+E)^q \left(\frac{x}{E}\right)^{\ell+1-a} B(\nu) F(a, a-(2\ell+1); 1+2i\nu; -\frac{E}{x}) + (\nu\to-\nu), \qquad /12/$$

где

$$B(\nu) = \Gamma(2\ell+2)\Gamma(-2i\nu)/\Gamma(\ell+1+i(\nu_0-\nu))\Gamma(\ell+1-i(\nu_0+\nu)),$$

а значения остальных параметров даны соотношениями /11/.

В интервале $[1,\infty]$ краевая задача для $V_<(x,E)$ /7б/ совпадает с краевой задачей для $V_>(x,E)$ /8б/ и имеет вид

$$\frac{d^2 f_\ell(x)}{dx^2} + \{-\frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + \frac{\lambda^2_<}{x^3}\} f_\ell(x) = 0, \qquad /13/$$

$$f_\ell(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^{-\ell}.$$

Решение краевой задачи /13/ выражается через цилиндрическую функцию:

$$f_\ell(x) = x^{1/2} J_{2\ell+1}\left(\frac{2\lambda_<}{\sqrt{x}}\right). \qquad /14/$$

Приравнивая теперь логарифмические производные решений /12/ и /14/ в точке сшивания $x=1$, получим окончательно следующее минорантное спектральное условие:

$$\frac{1}{2} - \lambda_< \frac{J'_{2\ell+1}(2\lambda_<)}{J_{2\ell+1}(2\lambda_<)} = \frac{q}{1+E} + \frac{1}{2} - q +$$

$$+\{-i\nu[B(\nu)E^{a-\ell-1}F(a,a-(2\ell+1);1+2i\nu;-E)-(\nu\to-\nu)]+$$

$$+E[E^{a-\ell-1}B(\nu)\frac{a(a-2\ell-1)}{1+2i\nu}F(1+a,a-2\ell;2+2i\nu;-E)+(\nu\to-\nu)]\}\times$$

$$\times\{B(\nu)E^{a-\ell-1}F(a,a-(2\ell+1);1+2i\nu;-E)+(\nu\to-\nu)\}^{-1}. \qquad /15/$$

В пределе $E\to 0$ и малых $\nu=\sqrt{\lambda_<^2-(\ell+1/2)^2}$ с точностью до членов порядка E из /15/ получим

$$E_{n,<} = \exp\{-\frac{n\pi}{\sqrt{\lambda_<^2-(\ell+1/2)^2}}+K_<\}, \quad n=1,2,\ldots, \qquad /16/$$

где $K_< = \nu^{-1}\arg B(\nu)$ и не зависит от $\lambda_<^2$.

§3. МАЖОРАНТНОЕ СПЕКТРАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ

Мажорантная краевая задача /5/-/2/ в интервале $[0,1]$ с учетом /8а/ имеет вид

$$\frac{d^2f_\ell(x)}{dx^2} + \{-\frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + \frac{\lambda_>^2}{x^2+E^2}\}f_\ell(x) = 0,$$
$$f_\ell(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^{\ell+1}. \qquad /17/$$

Решение краевой задачи /17/ выражается через гипергеометрическую функцию:

$$f_\ell(x) = (-\frac{x^2}{E^2})^{\frac{1+\ell}{2}} F(a,a^*;\ \ell+\frac{3}{2};\ -\frac{x^2}{E^2}), \qquad /18/$$

где

$$a = \frac{1}{2}(\ell+\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}i\sqrt{\lambda_>^2-(\ell+1/2)^2}.$$

Совершая далее по известным формулам аналитическое продолжение гипергеометрического ряда /18/, получим решение, пригодное в окрестности точки сшивания $x=1$:

$$f_\ell(x) = \{(-\frac{x^2}{E^2})^{\frac{\ell+1}{2}-a} B(a)F(a,-a^*;2a+\frac{1}{2}-\ell;-\frac{E^2}{x^2})+ \qquad /19/$$
$$+(a\to a^*)\},$$

где $B(a)=\Gamma(\ell+3/2)\Gamma(\ell+1/2-2a)/\Gamma(a^*)\Gamma(1+a^*)$.

Как уже отмечалось в предыдущем параграфе, краевая задача для мажорантного спектра в интервале $[1,\infty)$ совпадает с краевой задачей для минорантного спектра в этом же интервале. Поэтому, приравнивая логарифмические производные решений /19/ и /14/ в точке $x=1$, получим окончательно следующее мажорантное спектральное условие:

$$\frac{1}{2} - \lambda_> \frac{J'_{2\ell+1}(2\lambda_>)}{J_{2\ell+1}(2\lambda_>)} =$$

$$=[E^{2a-(\ell+1/2)}B(a)F(a,-a^*;2a+\frac{1}{2}-\ell;-E^2)+(a\to a^*)]^{-1}\times \qquad /20/$$

$$\times\{E^{2a-(\ell+1/2)}B(a)[(\ell+1)F(a,-a^*;2a+\frac{1}{2}-\ell;-E^2)-$$

$$-2aF(1+a,-a^*;2a+1/2-\ell;-E^2)+(a\to a^*)\}.$$

В пределе $E\to 0$ с точностью до членов порядка E и малых $\sqrt{\lambda_>^2-(\ell+1/2)^2}$ из /20/ получаем

$$E_{n,>} = \exp\{-\frac{n\pi}{\sqrt{\lambda_>^2-(\ell+1/2)^2}}+K_>\}, \quad n=1,2\ldots, \qquad /21/$$

где

$$K_> = (\sqrt{\lambda_>^2-(\ell+1/2)^2})^{-1}\arg B(a)$$

и не зависит от $\lambda_>^2$.

§4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение обсудим полученные результаты. Построенные выше двухсторонние оценки спектра квазипотенциальной краевой задачи /1/-/2/ на основе теории Штурма-Лиувилля позволяют сделать выводы о том, что: 1/ существует точка сгущения уровней $E_n(\lambda)$ при $E\to 0$ /формулы /16/ и /21//; 2/ зависимость $E_n(\lambda)$ неаналитическая, причем неаналитичность экспоненциального типа; 3/ в области $0\le\lambda^2\le(\ell+1/2)^2$ дискретный спектр отсутствует.

Поскольку эти результаты имеют место как для минорантного, так и для мажорантного спектров в пределе $E\to 0$, то вследствие основной теоремы, использованной в данной работе, они должны быть справедливыми и для точного спектра квазипотенциальной краевой задачи /1/-/2/ в этом же пределе. Записывая теперь соотношение /6/ в эквивалентном /через $E_{n,>}$ и $E_{n,<}$ / виде:

$$E_{n,<} \geq E_n \geq E_{n,>} ,$$

где $E_{n,<}$ и $E_{n,>}$ даны в формулах /16/ и /21/ соответственно, получим, что точный спектр исходной краевой задачи /1/-/2/ в пределе $E \to 0$ имеет вид

$$E_n = \exp\{- \frac{n\pi}{\sqrt{\lambda^2 - (\ell+1/2)^2}} + K\}, \quad n = 1, 2 \ldots, \qquad /22/$$

причем $K_< < K > K_>$. В связи с /22/ особо подчеркнем, что исходная краевая задача /1/-/2/ не может быть точно решена в терминах известных специальных функций даже при малых E, и только техника двухсторонних спектральных оценок позволила получить явную функциональную зависимость энергетических уровней от n и ℓ /22/.

Эффективность метода двухсторонних спектральных оценок позволяет надеяться, что он может быть с успехом использован для проверки точности многих асимптотических методов и как основа для последующего применения численных методов. Существующее множество хорошо исследованных специальных функций /6,7/ позволяет также надеяться, что с помощью метода двухсторонних оценок можно во многих случаях получить ценную спектральную информацию для многих линейных дифференциальных краевых задач, часто возникающих в теоретической физике.

Автору приятно выразить свою благодарность А.Н.Тавхелидзе и А.Т.Филиппову за интерес к работе и плодотворные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. ИЛ, М., 1962.
2. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cimento, 1963, 29, p.380.
3. Гогохия В.Ш., Мавло Д.П., Филиппов А.Т. ТМФ, 1976, 27, с.323.
4. Gogohia V.Sh., Mavlo D.P., Filippov A.N. Proc. of Int. Conf. on High Energy Phys., Tbilisi, 1976. JINR, D1,2-10400, Dubna, 1977.
5. Гогохия В.Ш., Мавло Д.П., Филиппов А.Т. ОИЯИ, P2-9894, Дубна, 1976.
6. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.1. "Наука", М., 1965.
7. Luke Y.L. The Special Function and their Approximations, v.1,2. Academic Press, New York, London, 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 апреля 1980 года.