объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-80-270

В.Ш.Гогохия

СВЕДЕНИЕ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ЗАДАЧАМ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ И МЕТОД ЭТАЛОННОГО УРАВНЕНИЯ

Направлено в ТМФ

1980

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие интересные задачи квантовой теории поля и физики элементарных частиц сводятся к интегральным уравнениям в импульсном пространстве /например, квазипотенциальные уравнения Логунова-Тавхелидзе, Дайсона-Швингера и многие др./, однако извлечение конкретной физической информации из этих уравнений обычно осложняется серьезными математическими трудностями, поскольку стандартные методы математической физики оказываются малоэффективными. Поэтому в данной работе на примере интегральных квазипотенциальных уравнений [1,2] разработан предложенный ранее [3–6] общий метод сведения интегральных уравнений в импульсном пространстве к дифференциальным краевым задачам. С другой стороны, для решения таким способом полученных дифференциальных краевых задач в импульсном пространстве сформулирован метод эталонного уравнения [6–8], позволяющий находить решения исходных краевых задач в виде асимптотических рядов по обратным степеням большого параметра /например, константы связи/.

Для других задач метод эталонного уравнения применялся в работе [9], где с его помощью были получены равномерные асимптотические приближения к функции $J_\nu(a\nu)$ при больших значениях ν. В книге [10] метод эталонного уравнения применялся для вычисления асимптотик сфероидальных и кулоновских сфероидальных функций.

Работа построена следующим образом: в разделе 2 квазипотенциальное уравнение для парциальных амплитуд рассеянных двух скалярных частиц одинаковой массы сводится к задачам Штурма-Лиувилля в импульсном пространстве; в разделе 3 сформулирован метод эталонного уравнения, который далее в разделах 4,5 применяется к задачам Штурма-Лиувилля, сформулированным выше. Заключительный раздел посвящен обсуждению полученных результатов.

2. КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Квазипотенциальное уравнение для парциальных амплитуд рассеяния двух скалярных частиц одинаковой массы m имеет вид [5,6]

$$f_\ell(p,p')=V_\ell(p,p')+\int_0^\infty \frac{dq(k^2+m^2)^{\frac{\nu-1}{2}}}{(q^2+m^2)^{\nu/2}}\frac{V_\ell(p,q)\,f_\ell(q,p')}{k^2-q^2}, \qquad /2.1/$$

$$V_\ell(p,p')=\sqrt{pp'}\int_0^\infty dr\,V(r)\,J_{\ell+1/2}(pr)\,J_{\ell+1/2}(p'r). \qquad /2.2/$$

Здесь p,p' - соответственно начальный и конечный импульсы в системе центра масс, энергетическая поверхность определяется условием $p^2=p'^2=k^2$, а энергия в системе центра масс равна $W=2\sqrt{k^2+m^2}$. Значение $\nu=1$ соответствует квазипотенциальному уравнению в форме Логунова-Тавхелидзе [1,6] . Значение $\nu=2$ соответствует модифицированному квазипотенциальному уравнению [5].

Легко показать, что уравнение /2.1/ в случае, когда квазипотенциал в координатном пространстве равен $V(r)=-gr^{-1}$, эквивалентно следующей краевой задаче Штурма-Лиувилля [6]:

$$\frac{d^2f_\ell(p,p')}{dp^2}-\left\{\frac{\ell(\ell+1)}{p^2}+\frac{g(k^2+m^2)^{\frac{\nu-1}{2}}}{(p^2+m^2)^{\nu/2}(k^2-p^2)}\right\}f_\ell(p,p')=g\delta(p-p'), \qquad /2.3/$$

$$f_\ell(p,p')\underset{p\to 0}{\sim} p^{\ell+1}, \qquad f_\ell(p,p')\underset{p\to\infty}{\sim} p^{-\ell}. \qquad /2.4/$$

Задача о связанных состояниях ($k^2=-\kappa^2<0$) , как известно, сводится к решению однородного интегрального уравнения /2.1/ отбрасыванием члена $V_\ell(p,p')$ и заменой $f_\ell(p,p')$ на $f_\ell(p)$. Так как граничные условия /2.4/ при этом не изменяются, то для нахождения связанных состояний достаточно решить уравнение /2.3/, опуская неоднородный член $g\delta(p-p')$. Перепишем уравнение /2.3/ и граничные условия /2.4/ в безразмерных переменных $x=pm^{-1}$, $f_\ell(p)=f_\ell(x)$ и с безразмерными параметрами $E=\kappa m^{-1}$, $\lambda^2=gm^{-1}(1-E^2)^{\frac{\nu-1}{2}}$:

$$\frac{d^2f_\ell(x)}{dx^2}-\left\{\frac{\ell(\ell+1)}{x^2}-\frac{\lambda^2}{(1+x^2)^{\nu/2}(x^2+E^2)}\right\}f_\ell(x)=0, \qquad /2.5/$$

$$f_\ell(x)\underset{x\to 0}{\sim} x^{\ell+1}, \qquad f_\ell(x)\underset{x\to\infty}{\sim} x^{-\ell}. \qquad /2.6/$$

где $x \in [0, \infty)$, а $E \in [0,1]$, так как энергия связи в системе центра масс равна $W_{CB} = 2m\{\sqrt{1-E^2}-1\}$.

В дальнейшем изложении задача /2.5/-/2.6/ на собственные значения, в случае $\nu = 1,2$, подробно изучается для S-волны, но используемые нами методы пригодны и для исследования высших парциальных волн, что, однако, требует отдельного рассмотрения.

3. МЕТОД ЭТАЛОННОГО УРАВНЕНИЯ /МЭУ/

Основная идея метода эталонного уравнения весьма проста: приблизительно одинаковые дифференциальные уравнения имеют приблизительно одинаковые решения [11,12]. Пусть нам необходимо решить уравнения вида

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \lambda^2 \gamma(x) f(x) = 0. \qquad /3.1/$$

Уравнение

$$\frac{d^2 v(\sigma)}{d\sigma^2} + \lambda^2 \Gamma(\sigma)\, v(\sigma) = 0 \qquad /3.2/$$

называется эталонным по отношению к уравнению /3.1/, если: 1/ решения $v(\sigma)$ известны аналитически /т.е. выражаются через специальные функции/ или численно; 2/ эталонная функция $\Gamma(\sigma)$ зависит от σ приблизительно так же, как $\gamma(x)$ зависит от x.

Таким образом, задача заключается в том, чтобы выразить решение уравнения /3.1/ через известные решения $v(\sigma)$ уравнения /3.2/. Будем искать решение /3.1/ в виде

$$f(x) = \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^{-1/2} v(\sigma). \qquad /3.3/$$

Подставляя /3.3/ в /3.1/ и используя /3.2/, получаем следующее уравнение для $\sigma(x)$:

$$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2 \Gamma(\sigma) = \gamma(x) + \frac{1}{\lambda^2} \Pi(\sigma, x), \qquad /3.4/$$

где "поправочный член" $\Pi(\sigma, x)$ можно выразить через так называемую производную Шварца [14]:

$$\Pi(\sigma,x) = -\frac{1}{2}\langle \sigma ; x\rangle = \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^{1/2} \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\sigma'''}{\sigma'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\sigma''}{\sigma'}\right)^2\right]. \qquad /3.5/$$

Уравнение /3.4/ и определение $\Pi(\sigma,x)$ через производную Шварца являются основой метода эталонного уравнения, позволяющего находить решения исходного уравнения /3.1/ по известным решениям эталонного уравнения /3.2/ в виде асимптотических рядов по параметру λ^{-2}.

Этой цели можно достигнуть двумя различными способами. В методе Лангера и Олвера [9] само эталонное уравнение /3.2/ умножается на асимптотический ряд по параметру λ^{-2}, в то время как в методе Черри [11] в виде асимптотического ряда ищется аргумент $\sigma(x)$ эталонного уравнения. Для построения итерационной схемы метода эталонного уравнения, которая предлагается ниже, второй способ предпочтительнее. В соответствии с этим будем искать решение $\sigma(x)$ уравнения /3.4/ в виде ряда

$$\sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2n}} \sigma_{2n}(x) = \sigma_0(x) + \frac{1}{\lambda^2} \sigma_2(x) + \dots \qquad /3.6/$$

Подставляя далее это разложение в $\Gamma(\sigma)$ и производя переразложение в ряд по степеням λ^{-2}, получим

$$\Gamma(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2n}} \Gamma_{2n}(\sigma) = \Gamma_0(\sigma_0) + \frac{1}{\lambda^2} \Gamma_2(\sigma_0, \sigma_2) + \dots \qquad /3.7/$$

Конкретная зависимость $\Gamma_{2n}(\sigma) = \Gamma_{2n}(\sigma_0, \sigma_2, \dots \sigma_{2n})$ определяется выбором функции $\Gamma(\sigma)$ и, очевидно, не может быть найдена в общем случае. Подставляя далее разложение /3.6/ в выражение для поправочного члена /3.5/, получим

$$\Pi(\sigma,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2n}} \Pi_{2n}(\sigma,x) = \Pi_0(\sigma_0 x) + \frac{1}{\lambda^2} \Pi_2(\sigma_0, \sigma_2, x) + \dots, \qquad /3.8/$$

где коэффициенты разложения $\Pi_{2n}(\sigma_0, \dots \sigma_{2n}, x)$ определяются из следующей системы рекуррентных соотношений:

$$\Pi_0(\sigma_0) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma_0'''}{\sigma_0'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\sigma_0''}{\sigma_0'} \right)^2 \right\}, \qquad /3.9/$$

$$\sum_{\ell=0}^{n} \left\{ 3\sigma_{2\ell}'' \sigma_{2(n-\ell)}'' - 2\sigma_{2\ell}''' \sigma_{2(n-\ell)}' - 4\Pi_{2(n-\ell)}\, a_{2\ell} \right\} = 0, \qquad /3.10/$$

где

$$a_{2\ell}=\sum_{i=0}^{\ell}\sigma'_{2i}\,\sigma'_{2(\ell-i)},\quad n=1,2,3\ldots \qquad /3.11/$$

Используя разложения /3.6/-/3.8/, основное уравнение метода эталонного уравнения /3.4/ можно записать в следующем виде:

$$[a_0(x)\Gamma_0(\sigma_0)-\gamma(x)]+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{2n}}\{\sum_{i=0}^{n}a_{2i}(x)\Gamma_{2(n-i)}(\sigma)-\Pi_{2(n-1)}(\sigma)\}=0. \qquad /3.12/$$

Приравнивая далее коэффициенты при одинаковых степенях λ^{-2}, получаем бесконечную систему нелинейных неоднородных дифференциальных уравнений для функций $\sigma_{2n}(x)$, которую можно решать последовательным путем, т.е. находя из первого уравнения $\sigma_0(x)$, подставляя далее найденное решение во второе уравнение и решая его, получим $\sigma_2(x)$ и т.д. Выпишем несколько первых уравнений системы /3.12/ в явном виде:

$$(\sigma'_0)^2\Gamma_0(\sigma_0)=\gamma(x), \qquad /3.13/$$

$$(\sigma'_0)^2\Gamma_2(\sigma_0\sigma_2)+2\cdot\sigma'_0\sigma'_2\Gamma_0(\sigma_0)=\Pi_0(\sigma_0), \qquad /3.14/$$

$$(\sigma'_0)^2\Gamma_4(\sigma_0,\sigma_2,\sigma_4)+2\sigma'_0\sigma'_2\Gamma_2(\sigma_0,\sigma_2)+[2\sigma'_0\sigma'_4+(\sigma'_2)^2]\Gamma_0(\sigma_0)=\Pi_2(\sigma_0,\sigma_2) \qquad /3.15/$$

Система /3.12/ должна быть дополнена условием совпадения точек перехода /эквивалентные точки/ уравнений /3.1/ и /3.2/, которое играет роль граничного условия.

В заключение данного раздела приведем несколько эвристических соображений, указывающих на обоснованность предложенного выше итерационного метода решения основного уравнения МЭУ /3.4/:

1. Если $\Gamma(\sigma)$ достаточно удачно воспроизводит аналитические и асимптотические свойства $\gamma(x)$, то $d\sigma/dx$ - медленно меняющаяся функция, и поэтому поправочным членом $\Pi(\sigma,x)$ /3.5/ можно пренебречь в первом приближении, которое совпадает с нулевым приближением по обратным степеням λ^{-2} в разложении /3.6/.

2. Благодаря своей форме /3.5/ поправочный член $\Pi(\sigma,x)$ мало зависит от абсолютной величины $d\sigma/dx$, поэтому им можно пренебречь в случае $(d\sigma/dx)^2 \gg 1$, т.е. если $\gamma/\Gamma \gg 1$.

3. Независимо от того, насколько удачно подобрано эталонное уравнение, поправочный член будет тем меньше, чем больше λ^2, и, таким образом, при достаточно больших λ^2 приближение $\sigma_0(x)$ можно сделать довольно хорошим. Это подтверждает хорошо известный факт, что асимптотические методы /например, JWKB/ дают

более точные результаты для больших значений λ^2. В связи с вышесказанным подчеркнем, однако, что МЭУ в принципе может давать достаточно точные результаты и для малых λ^2, так как при удачном выборе эталонного уравнения можно добиться того, чтобы поправочный член был настолько мал, что $\lambda^{-2} H(\sigma, x) \approx 0$ даже для малых λ^2.

Таким образом, уже решение уравнения /3.13/ для $\sigma_0(x)$ должно быть довольно хорошим приближением для аргумента эталонного уравнения $\sigma(x)$. Из уравнения /3.15/ следует $(\sigma(x) = \sigma_0(x),$ $\Gamma(\sigma) = \Gamma_0(\sigma_0)),$

$$\int_{\sigma}^{\sigma_э} \Gamma^{1/2}(\tau)\, d\tau \approx \int_{x}^{x_э} y^{1/2}(t)\, dt, \qquad /3.16/$$

где $\sigma_э = \sigma_0(x_э) = \sigma(x_э)$, $x_э$ - "эквивалентные точки" функций $\Gamma(\sigma)$ и $y(x)$, например, точки, где обе эти функции имеют сингулярность, равны постоянным или нулю. В этом приближении решение /3.3/ имеет вид

$$f(x) = \left\{ \frac{\Gamma(\sigma(x))}{y(x)} \right\}^{1/4} v(\sigma(x)). \qquad /3.17/$$

Здесь же следует отметить, что если $\Gamma(\sigma)$ хорошо воспроизводит аналитические и асимптотические свойства $y(x)$, то уже в первом нетривиальном приближении $\sigma(x) = \sigma(x) + \ldots$ можно добиться того, чтобы $d\sigma/dx$ была везде конечной $(\sigma'(x) \neq 0, \infty)$. Поэтому явление Стокса не возникает, и нет никакой проблемы с формулами связи, возникающей в обычной JWKB -теории /13/. Стандартный JWKB -метод является частным случаем и отражает лишь знаковое поведение $y(x)$, так как он соответствует выбору $\Gamma(\sigma) = \pm 1$.

4. ПРИМЕНЕНИЕ МЭУ К КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ($\nu = 1$)

Метод эталонного уравнения, сформулированный в предыдущем разделе, применим теперь к квазипотенциальной краевой задаче Штурма-Лиувилля ($\nu = 1$) /2.5/-/2.6/ для S-волны. Выпишем задачу /2.5/-/2.6/ в виде

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \lambda^2 y(x) f(x) = 0, \qquad /4.1/$$

$$y(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{1/2}(x^2+E^2)}, \qquad /4.2/$$

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \qquad f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \mathrm{const}.$$

Основываясь на соображениях предыдущего раздела, выбираем эталонным уравнением по отношению к /4.1/ уравнение вида

$$\frac{d^2 (\sigma)}{d\sigma^2} + \lambda^2 \Gamma(\sigma)\, v(\sigma) = 0, \qquad \Gamma(\sigma) = \frac{1}{(1+\sigma)(\sigma+E)^2}. \qquad /4.3/$$

Очевидно, что такой выбор эталонной функции $\Gamma(\sigma)$ правильно воспроизводит аналитические свойства $y(x)$: точка $\sigma=0$ при $E\neq 0$ является не особой точкой уравнения /4.3/, в то время как при $E=0$ возникает регулярная особенность при $\sigma=0$, точно так же, как это имеет место и для исходного уравнения /4.1/. Далее, уравнения /4.1/ и /4.3/ обладают регулярными особенностями соответственно в точках $x=\infty$ и $\sigma=\infty$. Кроме того, $\Gamma(\sigma)$ как функция от σ правильно воспроизводит асимптотические свойства $y(x)$ как функции от x . Из дальнейшего же изложения будет видно, что асимптотические свойства $\Gamma/\sigma(x)$ как функции x также совпадают с асимптотическими свойствами $y(x)$.

Решение исходной краевой задачи /4.1/-/4.2/ будем искать с помощью МЭУ в первом приближении, которое, как это уже указывалось в предыдущем разделе, совпадает с нулевым приближением в разложении /3.6/ по обратным степеням λ^{+2} . Выбирая в качестве "эквивалентных точек" $\sigma_э = \sigma_0(x_э) = x_э = \infty$ и подставляя явные выражения $\Gamma(\sigma)$ и $y(x)$ в /3.16/, получим

$$\frac{\sigma(x,E)+1}{(1-E)} = \mathrm{cth}^2 \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{1-E}\,\Phi(x,E) \right\}, \qquad /4.4/$$

где

$$\Phi(x,E) = \int_x^\infty y^{1/2}(t)\,dt = \int_x^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{1/4}(t^2+E^2)^{1/2}}. \qquad /4.5/$$

Из формул /4.4/ и /4.5/ следует, что $\sigma(0,E) = \mathrm{const}$,

$$\sigma(x,E) \underset{x\to\infty}{\sim} x - \frac{1}{3}(1+2E) + \frac{1}{5}\left[\frac{1}{3}(1-E)^2 + \left(\frac{1}{2}+E^2\right)\right]\frac{1}{x} + \ldots \qquad /4.6/$$

в соответствии с поведением $y(x)$ в нуле и на бесконечности. Зная теперь асимптотические свойства $\sigma(x)$, найдем общее решение исходного уравнения /4.1/, выраженное через решение эталонного уравнения /4.3/ по формуле /3.17/. Для этого необходимо выписать решение эталонного уравнения /4.3/ в явном виде. Это можно сделать с помощью следующей замены переменной в уравнении /4.3/:

$$z = -\frac{\sigma + E}{(1-E)} = \mathrm{sh}^{-2}\left\{ \frac{1}{2}\sqrt{1-E}\,\Phi(x,E)\right\}, \qquad z = z(x). \qquad /4.7/$$

Решения уравнения /4.3/ тогда выражаются через гипергеометрические функции:

$$\begin{aligned} v_1(\sigma) &= z^{a} F(a, -a^*; 2a; z), \\ v_2(\sigma) &= z^{a^*} F(a^*, -a; 2a^*; z), \qquad z = z(\sigma), \end{aligned} \qquad /4.8/$$

где

$$a = 1/2 + i\sqrt{\lambda^2/(1-E) - 1/4}.$$

Используя /3.17/ и /4.8/, регулярное в нуле решение исходного уравнения /4.1/ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(x) = \mathrm{const}\left\{\frac{(1+x^2)^{1/2}(x^2+E^2)}{(1+\sigma(x))(\sigma(x)+E)^2}\right\}^{1/4} \times \\ \times\{[z(0)]^{a^*} F(a^*, -a; 2a^*; z(0))[z(x)]^{a} F(a, -a^*; 2a; z(x)) - (a \leftrightarrow a^*)\}, \end{aligned} \qquad /4.9/$$

где $z(x)$ и $z(0)$ определяются формулой /4.7/. Для того, чтобы удовлетворить граничному условию на бесконечности /4.2/, необходимо выполнить аналитическое продолжение гипергеометрических рядов /4.9/ в область больших x, так как $\sigma(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x$ + к. ч. /см. формулу /4.6/ /. Ввиду того, что параметры гипергеометрических функций отличаются на 1, аналитическое продолжение можно осуществить с помощью ряда [14]

$$\begin{aligned} F(-a^*, a; 2a; z(x)) &= F(-a^*, -a^*+1; 2a; z(x)) = \\ &= [z(x)]^{a} B(a)\{D(|a|^2, z(x)) + C(a, z(x))\}, \end{aligned} \qquad /4.10/$$

где мы ввели следующие обозначения:

$$B(\alpha) = (-1)^{-\alpha}\,\Gamma(2\alpha)/\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha),$$

$$D(|\alpha|^2, z) = |\alpha|^2 \ln(-z) - z, \qquad /4.11/$$

$$C(\alpha, z) = |\alpha|^2 h_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha^*)_n(-\alpha)_{n+1}}{n!(n+1)!} z^{-n}[\ln(-z)+h_n],$$

$$h_0 = \psi(2) + \psi(1) - 2\psi(\alpha),$$

$$h_n = \psi(n+2) + \psi(n+1) - \psi(n+\alpha) - \psi(\alpha-n). \qquad /4.12/$$

Аналитически продолженное решение тогда имеет вид ($\sigma = \sigma(x)$)

$$f(x) = \mathrm{const}\left\{\frac{(1+x^2)^{1/2}(x^2+E^2)}{(1+\sigma)(\sigma+E)^2}\right\}^{1/2}\times$$

$$\times\{[[z(0)|^{\alpha^*} B(\alpha)F(\alpha^*,-\alpha,2\alpha^*,z(0)) - [z(0)|^{\alpha} B(\alpha^*)F(\alpha,-\alpha^*;2\alpha;z(0))]D(|\alpha|^2,z)+ \qquad /4.13/$$

$$+B(\alpha)C(\alpha,z)[z(0)|^{\alpha^*} F(\alpha^*,-\alpha;2\alpha^*,z(0)) -$$

$$-B(\alpha)C(\alpha^*,z)[z(0)|^{\alpha} F(\alpha,-\alpha^*;2\alpha;z(0))\},$$

откуда следует, что в пределе больших x коэффициент при расходящейся части $D(|\alpha|^2, z)$ должен равняться нулю. Таким образом, получим окончательно спектральное условие:

$$B(\alpha)\left[-\frac{\sigma(0,E)+E}{1-E}\right]^{\alpha^*} F\left(\alpha^*,-\alpha;2\alpha^*;-\frac{\sigma(0,E)+E}{1-E}\right) =$$

$$= B(\alpha^*)\left[-\frac{\sigma(0,E)+E}{1-E}\right]^{\alpha} F\left(\alpha,-\alpha^*;2\alpha;-\frac{\sigma(0,E)+E}{1-E}\right), \qquad /4.14/$$

где $B(\alpha)$, α и $\sigma(0,E)$ определяются соответственно формулами /4.12/ /4.8/ и /4.4/-/4.5/ при $x=0$. Рассмотрим предел слабосвязанных состояний $E^2 \to 0$. Из соотношения /4.5/ следует

$$\Phi(0,E) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}\,F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4};\frac{3}{4};1-E^2\right). \qquad /4.15/$$

В пределе $E^2 \to 0$ гипергеометрический ряд расходится, так как параметры удовлетворяют соотношению $\gamma = \alpha+\beta+\ell$, $\ell = 0$. Поэтому для аналитического продолжения можно воспользоваться следующей формулой [14]:

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4};\frac{3}{4};1-E^2\right) = \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)\Gamma(1/2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{4})_n}{(n!)^2}(h_n - \ln E^2)E^{2n}, \qquad /4.16/$$

где

$$h_n = 2\psi(n+1) - \psi(n+1/2) - \psi(n+1/4).$$

Используя /4.16/, а затем /4.4/ для $\sigma(0,E)$, получим, с точностью до членов порядка E, следующее спектральное условие для слабосвязанных состояний:

$$E_n = \exp\left\{-\frac{n\pi}{\sqrt{\lambda^2-1/4}} + K\right\}, \quad n = 1,2,3\ldots, \qquad /4.17/$$

где $K = (\sqrt{\lambda^2-1/4})^{-1}\arg B(\alpha)$ и не зависит от λ^2. Для того, чтобы закончить исследование предела слабосвязанных состояний, необходимо обсудить поведение приближенного решения /4.9/, полученного методом эталонного уравнения, в регулярной особой точке $x = 0$ при $E = 0$ в уравнении /4.1/. В этом случае из формул /4.4/, /4.8/ следует

$$\alpha = 1/2 + i\sqrt{\lambda^2 - 1/4},$$

$$\Phi(x,0) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x + \text{к.ч.}, \qquad /4.18/$$

$$z(x) = -\sigma(x,0) \underset{x\to 0}{\sim} x + O(x^2).$$

Подставляя формулы /4.18/ в решение /4.9/, получим окончательно

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \text{const}\, x^{1/2} \sin\{\sqrt{\lambda^2-1/4}\,\ln x + \text{const}\}. \qquad /4.19/$$

что полностью совпадает, с точностью до несущественных постоянных, с поведением точного решения уравнения /4.1/ в регулярной особой точке $x = 0$ при $E = 0$.

Предел сильносвязанных состояний $E^2 = 1$ имеет вид

$$\lambda_n = 2 z_{1n} / B(1/4, 1/2), \qquad /4.20/$$

где z_{1n} - нули функции Бесселя $J_1(z)$; $B(1/4, 1/2)$ - - функция Эйлера. Формула /4.20/ была получена в работе [8]. Заканчивая этот раздел, отметим, что задача Штурма-Лиувилля /4.1/-/4.2/ не имеет стандартного JWKB-решения.

5. ПРИМЕНЕНИЕ МЭУ К МОДИФИЦИРОВАННОЙ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ($\nu = 2$)

Модифицированную квазипотенциальную задачу Штурма-Лиувилля ($\nu = 2$) для S-волны /2.5/-/2.6/ перепишем в следующем виде:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \lambda^2 \gamma(x) f(x) = 0, \quad \gamma(x) = \frac{1}{(1+x^2)(x^2+E^2)}, \qquad /5.1/$$

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \text{const}, \qquad /5.2/$$

В соответствии с МЭУ эталонным уравнением по отношению к уравнению /5.1/ выбираем

$$\frac{d^2 v(\sigma)}{d\sigma^2} + \lambda^2 \Gamma(\sigma)\, v(\sigma) = 0, \quad \Gamma(\sigma) = \frac{1}{(1+\sigma)^2(\sigma+E)^2}. \qquad /5.3/$$

Легко отметить, что такой выбор эталонной функции $\Gamma(\sigma)$ как функции от σ правильно воспроизводит аналитические и асимптотические свойства $\gamma(x)$ как функции x . Из дальнейшего же изложения будет видно, что асимптотические свойства $\Gamma(\sigma(x))$ как функции от x совпадают с асимптотическими свойствами $\gamma(x)$.

Решение эталонного уравнения /5.3/ будем искать в виде

$$v(\sigma) = \sqrt{(1+\sigma)(\sigma+E)}\, \eta(\xi), \qquad /5.4/$$

причем

$$\xi = \frac{1}{(1-E)} \ln \frac{\sigma+E}{\sigma+1}, \quad E \neq 1. \qquad /5.5/$$

Для функции $\eta(\xi)$ получаем тогда уравнение с постоянными коэффициентами. Таким образом, два линейно независимых решения эталонного уравнения /5.3/ имеют вид ($\sigma = \sigma(x)$)

$$v_1(\sigma) = [(1+\sigma)(\sigma+E)]^{1/2} \cos\{\sqrt{\frac{\lambda^2}{(1-E)^2} - \frac{1}{4}} \ln \frac{\sigma+E}{\sigma+1}\},$$

/5.6/

$$v_2(\sigma) = [(1+\sigma)(\sigma+E)]^{1/2} \sin\{\sqrt{\frac{\lambda^2}{(1-E)^2} - \frac{1}{4}} \ln \frac{\sigma+E}{\sigma+1}\}.$$

Для того, чтобы определить зависимость σ от x, используем формулу /3.16/ с условием, что в качестве "эквивалентных" точек берутся точки на бесконечности, т.е. $\sigma_э = \sigma(x_э) = x_э = \infty$. Интегрируя, получим

$$\frac{1}{(1-E)} \ln \frac{\sigma(x)+E}{\sigma(x)+1} = \phi(x,E), \qquad /5.7/$$

где

$$\phi(x,E) = \int_x^\infty \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(t^2+E^2)}} = F(\operatorname{arcctg} x, (1-E^2)^{1/2}), \qquad /5.8/$$

т.е. $\phi(x,E)$ есть эллиптический интеграл первого рода. Вычисляя асимптотику $\sigma(x)$ при $x \to \infty$, получим

$$\sigma(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x - \frac{1}{2}(1+E) + [\frac{1}{4}(1-E)^2 + \frac{1}{3}E]x^{-1} + \dots, \qquad /5.9/$$

а в нуле в соответствии со сказанным выше $\sigma(0,E) = \mathrm{const}$. Регулярное на бесконечности решение исходного уравнения /5.1/ с учетом /3.17/ и /5.6/ имеет вид

$$f(x) = \mathrm{const}[(1+x^2)(x^2+E^2)]^{1/4} \sin\{\sqrt{\frac{\lambda^2}{(1-E)^2} - \frac{1}{4}} \ln \frac{\sigma(x)+E}{\sigma(x)+1}\}. \qquad /5.10/$$

Для того, чтобы регулярное на бесконечности решение /5.10/ удовлетворяло граничному условию в нуле /5.2/, необходимо положить

$$\lambda_n^2 = \frac{1}{4}(1-E)^2 + \frac{n^2\pi^2}{\phi^2(0,E)}, \qquad n = 1,2,3\dots, \qquad /5.11/$$

где $\phi(0,E)=K[(1-E^2)^{1/2}]$ есть полный эллиптический интеграл первого рода и определяется соотношением /5.8/ в точке $x=0$.

Явный вид ненормированных собственных функций /5.10/, соответствующих собственным значениям /5.11/, можно записать в следующем виде:

$$f_n(x)=\mathrm{const}\,[(1+x^2)(x^2+E^2)]^{1/4}\sin\{n\pi\,\frac{\phi(x,E)}{\phi(0,E)}\}, \qquad /5.12/$$

где $\phi(x,E)$ и $\phi(0,E)$ определяются соответственно соотношениями /5.9/ и /5.8/ в точке $x=0$.

В пределе $E^2=1$ из /5.11/ следует

$$\lambda_n^2=4n^2, \qquad n=1,2,3..., \qquad /5.13/$$

хотя эталонирование проводилось в предположении $E\neq 1$. Соответствующие собственные функции имеют вид

$$f_n(x)=\mathrm{const}\,(1+x^2)^{1/2}\sin\{2n\,\mathrm{arctg}\,x\}. \qquad /5.14/$$

В пределе слабосвязанных состояний $E^2\to 0$ собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля /5.1/-/5.2/ определяются формулами, аналогичными формулам /4.17/ и /4.19/ соответственно, что и следовало ожидать, так как и квазипотенциальное уравнение /4.1/, и модифицированный вариант /5.1/ в этом пределе соответствуют уравнению Шредингера с потенциалом, имеющим вид $V(r)=-g'r^{-2}$ /15,16/.

Краевая задача /5.1/-/5.2/ при $E^2=1$ может быть решена точно. Собственные функции имеют вид /5.14/, а спектр дается следующим выражением:

$$\lambda_n^2=4n^2-1, \qquad n=1,2,3... . \qquad /5.15/$$

Сравнивая /5.15/ с /5.13/, приходим к выводу, что МЭУ-спектр для достаточно больших n является хорошим приближением к точному спектру /5.15/.

Эталонную функцию $\Gamma(\sigma)$ можно выбрать, например, следующим образом:

$$\Gamma(\sigma)=(\sigma^2+E)^{-2}. \qquad /5.16/$$

Собственные МЭУ-функции задачи /5.1/-/5.2/ тогда определяются выражением /5.12/, а соответствующий МЭУ-спектр имеет вид

$$\sqrt{\lambda_n^2 + E} = n\pi/\phi(0,E), \qquad n=1,2,3\dots . \qquad /5.17/$$

В пределе $E^2=1$ собственные функции /5.12/ и спектр /5.17/ полностью совпадают с точными собственными функциями /5.14/ и точным спектром /5.15/, как это и следовало ожидать. Хуже обстоит дело с пределом $E \to 0$. В этом пределе, с точностью до членов порядка E, спектр /5.17/ имеет вид

$$E_n = \exp\{-\frac{n\pi}{\lambda} + \dots\}, \qquad n=1,2,3\dots, \qquad /5.18/$$

а собственные функции в этом пределе ведут себя следующим образом:

$$f_n(x) \underset{x\to 0}{\sim} \text{const}\; x^{1/2} \sin\{\lambda \ln x + \text{const}\}, \qquad /5.19/$$

что явно противоречит поведению исходного решения в регулярной особой точке $x=0$ при $E=0$ /4.19/. Поэтому в решениях /5.18/ и /5.19/ следует сделать замену

$$\lambda_n \to \sqrt{\lambda_n^2 - 1/4}. \qquad /5.20/$$

Эта замена аналогична известной замене Крамерса $\ell(\ell+1) \to (\ell+1/2)^2$, которая делается в JWKB -решениях радиального уравнения Шредингера,и обеспечивает правильное поведение в особой точке $r=0$ и правильную фазу при $r\to\infty$ /6,13/ .

Здесь необходимо отметить, что JWKB -решение задачи Штурма-Лиувилля /5.1/-/5.2/ имеет вид /5.12/, а соответствующий спектр дается выражением

$$\lambda_n = n\pi/\phi(0,E), \qquad n=1,2,3\dots . \qquad /5.21/$$

Таким образом, и в JWKB -решениях необходимо сделать замену Крамерса /5.20/.

Заканчивая данный раздел, отметим, что замена Крамерса /5.20/ обусловлена грубостью JWKB -приближения и МЭУ-приближения с эталонной функцией /5.16/, так как JWKB -приближение, как это отмечалось выше, отражает лишь знаковое поведение исходной функции $y(x)$, а эталонное уравнение с эталонной функцией /5.16/ не полностью воспроизводит все аналитические свойства исходного уравнения /5.1/. С другой стороны, эталонное уравнение /5.3/ полностью воспроизводит все аналитические и асимптотические свойства исходного уравнения, и поэтому в соответствующих МЭУ-решениях замены Крамерса делать не нужно.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение обсудим полученные результаты. Квазипотенциальное уравнение для парциальных амплитуд /2.1/ в случае, когда квазипотенциал в координатном представлении имеет вид $V(r) = -gr^{-1}$, было редуцировано к задаче Штурма-Лиувилля /2.5/-/2.6/ в импульсном представлении. Для решения полученной таким путем краевой задачи был сформулирован в общей форме метод эталонного уравнения, позволяющий находить собственные функции и собственные значения в виде асимптотических рядов по обратным степеням константы связи λ^2. Спектральные МЭУ-условия рассмотренных задач Штурма-Лиувилля /4.14/ и /5.11/ были получены в предположении, что в асимптотическом ряде /3.6/ учитывался только нулевой член $\sigma_0(0,E)$. Хорошую точность МЭУ-спектров, полученных в этом предположении, можно понять, если оценить величину поправочного члена $\Pi(\sigma, x)$ в формулах /3.4/-/3.5/, что проще всего сделать на концах интервала изменения независимой переменной $x \in [0, \infty)$. Итерационная схема МЭУ, развитая в данной работе, легко позволяет вычислить следующие члены в разложении /3.6/ и тем самым улучшить спектральные результаты. С другой стороны, многие дифференциальные уравнения, возникающие в теоретической и математической физике, не поддаются точному эталонированию, т.е. когда эталонное уравнение полностью воспроизводит все особые точки исходного уравнения. С помощью замены Крамерса, если в ней возникает необходимость, уточняются спектральные результаты и соответствующие им собственные функции дифференциальных краевых задач самого общего вида.

Таким образом, метод эталонного уравнения позволяет весьма эффективно строить на основе хорошо изученных решений эталонных уравнений достаточно точные приближения для спектра и собственных функций краевых задач, точные решения которых неизвестны.

Автору приятно выразить свою благодарность А.Н.Тавхелидзе и А.Т.Филиппову за полезные замечания и плодотворные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo.Cim., 1963, 29, p.380.
2. Tavkhelidze N.N. Lectures on Quasipotential Method in Field Theory. Bombay, 1964.
3. Arbuzov B.A., Filippov A.T. Phys.Lett., 1964, 13, p.95.
4. Гогохия В.Ш., Филиппов А.Т. ТМФ, 1974, 21, с.37.

5. Гогохия В.Ш., Мавло Д.П., Филиппов А.Т. ОИЯИ, Р2-9894, Р2-9893, Дубна, 1976.
6. Гогохия В.Ш., Мавло Д.П.,Филиппов А.Т. ТМФ, 1976, 27, с.323.
7. Гогохия В.Ш. Сообщения АН ГССР, 1979, т.93, № 3.
8. Гогохия В.Ш. Сообщения АН ГССР, 1979, т.94, № 1.
9. Langer R.E. Trans.Amer. Hash Soc., 1931, 33, p.23; Olver F.W.J. Philos. Trans.Roy.Soc., 1954, A247, p.307.
10. Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю. Сфероидальные и нуклоновские сфероидные функции. "Наука", М., 1976.
11. Черри Т.М. Математика, 1965, 9:4, с.87.
12. Dingle R.B. App.Sci.Res., 1956, B5, p.345.
13. Пономарев Л.И. Препринт ИТФ-67-53, Киев, 1968.
14. Бейтман Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. "Наука", М., 1965, т.1.
15. Гогохия В.Ш. Сообщения АН ГССР, 1978, т.90, № 2.
16. Case K.M. Phys.Rev., 1950, 80, p.797.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 апреля 1980 года.