объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-80-27

В.Г.Кадышевский, М.Д.Матеев, М.В.Чижов

К ВОПРОСУ О РАЗНОСТИ МАСС МЮОНА И ЭЛЕКТРОНА

Направлено в ТМФ

1980

Кадышевский В.Г., Матеев М.Д.,
Чижов М.В.

Р2-80-27

К вопросу о разности масс мюона и электрона

В рамках квантовой электродинамики, содержащей новый универсальный параметр - фундаментальную длину ℓ, обсуждается возможность возникновения разности масс мюона и электрона. При этом ключевую роль играет боголюбовский механизм спонтанного нарушения симметрии.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1980

Kadyshevsky V.G., Mateev M.D.,
Chizhov M.V.

P2-80-27

On the Muon and Electron Mass Difference

A possibility for the mass splitting of muon and electron is discussed in the framework of QED

I. Введение

Одной из узловых проблем физики лептонов все еще остается выяснение различий в физических свойствах мюона и электрона и объяснение большой разности масс этих частиц. Поиск решений этой проблемы проводился по самым разным направлениям (см., например, /I/).

В настоящей работе мы обсудим новый подход к μe -проблеме, наметившийся в рамках квантовой электродинамики (КЭД) с фундаментальной длиной /2/. В этой схеме свободные фермионные поля, например, e и μ, вначале объединяются в 8-компонентный спинор

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ \mu \end{pmatrix} , \qquad (I.I)$$

отвечающий вырожденному случаю $m_e = m_\mu$. Полный лагранжиан из-за наличия в нем взаимодействия, перепутывающего e и μ, остается инвариантным лишь при дискретном преобразовании

$$\begin{pmatrix} e \\ \mu \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \mu \end{pmatrix} = \sigma_2 \begin{pmatrix} e \\ \mu \end{pmatrix} . \qquad (I.2)$$

Если, используя известный метод Н.Н.Боголюбова /3-5/, спонтанно нарушить эту σ_2 -симметрию, то в результате можно получить решение "сверхпроводящего" типа /6-8/ с расщепленными массами μ и e. При этом вакуумное состояние, соответствующее новому решению, будет обладать меньшей энергией, чем вакуум, соответствовавший вырожденному случаю.

Наше изложение строится следующим образом. В разделе 2 дается краткое резюме КЭД, в которую, помимо $\hbar$ и c, введен еще один универсальный масштаб - фундаментальная длина ℓ. В разделе 3 мы получаем и исследуем "уравнение компенсации", возникающее при спонтанном динамическом нарушении σ_2 -симметрии. Раздел 4 посвящен выводу уравнения компенсации с помощью техники функционального интегрирования.

2. Квантовая электродинамика с фундаментальной длиной

В обычной КЭД, как и в любой стандартной квантовой теории поля, предполагается, что четырехмерные x - и p -пространства, используемые в аппарате теории, суть псевдоевклидовы пространства, лишенные какого-либо внутреннего масштаба. Теория, к рассмотрению которой мы приступаем, основана на более общей геометрической гипотезе *). А именно, в ней предполагается, что импульсное 4-пространство является пространством де Ситтера, реализованном на 5-гиперболоиде

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - M^2 p_4^2 = -M^2 = -\frac{1}{\ell^2} \quad . \qquad (2.\text{I})$$

Новые универсальные постоянные ℓ и M называются фундаментальной длиной и фундаментальной массой, соответственно. Обычная псевдоевклидова геометрия импульсного 4-пространства возникает лишь в плоском пределе $M \to \infty \; (\ell \to 0)$.

В силу (2.I) уравнение массовой поверхности

$$m^2 - p^2 = 0 \qquad (2.2)$$

является следствием любого из уравнений

$$Ch\mu + p_4 = 0 \quad , \qquad (2.3а)$$

$$Ch\mu - p_4 = 0 \quad , \qquad (2.3б)$$

$$\left(Ch\mu \equiv \sqrt{1 + \frac{m^2}{M^2}} \quad , \quad p_4 = g_{44} p^4 = -p^4 \right),$$

переходящих друг в друга при инверсии

$$p_4 \to -p_4 \quad . \qquad (2.4)$$

Поскольку (2.4) есть преобразование симметрии импульсного пространства (2.I), коммутирующее с генераторами группы Лоренца и 4-импульсом p_μ , то естественно ожидать, что эта симметрия должна найти отражение и в структуре уравнений теории. В итоге мы заключаем, что в новом формализме можно рассматривать два уравнения типа Клейна-Гордона и, соответственно, два сорта полей **):

$$2\,(Ch\mu + p_4)\,\Psi_1(p) = 0 \;, \qquad (2.5а)$$

$$2\,(Ch\mu - p_4)\,\Psi_2(p) = 0 \;. \qquad (2.5б)$$

При инверсии (2.4) имеем, очевидно $\Psi_1 \rightleftarrows \Psi_2$. Поскольку уравнению Клейна-Гордона удовлетворяют поля с любым значением

---

*) Эта гипотеза восходит к работам /9/ и /I0/.

**) Множитель 2 в (2.5а) и (2.5б) введен для удобства.

спина, то отмеченное удвоение числа компонент волновых функций носит универсальный характер. В случае дираковского поля это ведет к появлению 8-компонентных спиноров типа (I.I).

В /2/ в теории с импульсным пространством де Ситтера (2.I) был сформулирован принцип локальной калибровочной инвариантности, и на этой основе получен новый лагранжиан для КЭД:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \\ & + \overline{\Psi}(x)\left[\left(i\partial_\mu - eA_\mu(x)\right)\sigma_0 \otimes \gamma^\mu - m\right]\Psi(x) - \\ & - \frac{ie\ell}{4} \cos\theta\, \overline{\Psi}(x)\, \sigma_0 \otimes \gamma^5 \sigma^{\mu\nu}\, \Psi(x)\; F_{\mu\nu}(x) + \\ & + \frac{e\ell}{4} \sin\theta\, \overline{\Psi}(x)\, \sigma_0 \otimes \sigma^{\mu\nu}\, \Psi(x)\; F_{\mu\nu}(x) + \\ & + \frac{e^2\ell^2}{4}\left[\overline{\Psi}(x)\,\sigma_3 \otimes \gamma^\mu\, \Psi(x)\right]\left[\overline{\Psi}(x)\,\sigma_1 \otimes \gamma_\mu\, \Psi(x)\right], \end{aligned} \qquad (2.6)$$

где $\Psi(x)$ – 8-компонентный спинор типа (I.I), ℓ – фундаментальная длина, θ – параметр, определяемый соотношением

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1 + m^2\ell^2} - 1}{m\ell} \quad , \qquad (2.7)$$

а матрицы $\sigma_0 \otimes \gamma^5 \sigma^{\mu\nu}$, $\sigma_3 \otimes \gamma^\mu$ и т.п. суть 8x8 матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \gamma^5\sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \gamma^5\sigma^{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \gamma^\mu & 0 \\ 0 & -\gamma^\mu \end{pmatrix} \qquad \text{и т.п.}$$

Мы видим, что фундаментальная длина входит в (2.6) в выражения для констант связи при "неминимальных" взаимодействиях, одним из которых является четырехфермионное взаимодействие, недиагональное по полям Ψ_1 и Ψ_2 . Если данные поля идентифицировать с полями e и μ , как это сделано в (I.I), то, в принципе, можно ожидать, что рассматриваемое четырехфермионное взаимодействие приведет к расщеплению масс мюона и электрона, так что массовый член в лагранжиане примет вид:

$$m_e \overline{\Psi}_1(x)\,\Psi_1(x) + m_\mu \overline{\Psi}_2(x)\,\Psi_2(x) \;. \qquad (2.8)$$

Заметим, однако, что лагранжиан (2.6) является инвариантным при σ_2 -преобразовании (I.2), а выражение (2.8) этой инвариантностью не обладает. Следовательно, расщепление (2.8) не может быть получено на основе (2.6) с помощью метода, который сохраняет σ_2 -инвариантность (в частности, в теории возмущений).

Адекватный метод решения подобных задач, использующий динамический механизм спонтанного нарушения симметрии, был предложен и развит Н.Н.Боголюбовым в его работах по теории сверхтекучести и сверхпроводимости /3-5/. В квантовой теории поля метод Боголюбова впервые был применен в работах /6-8/ с целью объяснения динамического происхождения масс фермионов. Ниже мы будем использовать аналогичную технику.

3. Уравнение компенсации и расщепление масс m_μ и m_e

Поскольку члены в лагранжиане (2.6), содержащие электромагнитное поле, являются диагональными по Ψ_1 и Ψ_2, они не дают вклада в расщепление масс μ и e. Поэтому ниже мы будем рассматривать (2.6) при $A_\mu(x)=0$:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_I(x) \quad , \tag{3.1}$$

где

$$\mathcal{L}_0(x) = i\,\overline{\Psi}(x)\,\sigma_0\otimes\gamma^\mu\partial_\mu\Psi(x) - m\,\overline{\Psi}(x)\Psi(x) \quad , \tag{3.2}$$

$$\mathcal{L}_I(x) = \frac{e^2\ell^2}{4}\left[\overline{\Psi}(x)\,\sigma_3\otimes\gamma^\mu\Psi(x)\right]\left[\overline{\Psi}(x)\,\sigma_3\otimes\gamma_\mu\Psi(x)\right] . \tag{3.3}$$

Следуя Боголюбову, прежде всего снимем σ_2 -вырождение. С этой целью запишем $\mathcal{L}(x)$ в виде:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0'(x) + \mathcal{L}_I'(x) \quad , \tag{3.4}$$

$$\mathcal{L}_0'(x) = \mathcal{L}_0(x) - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\overline{\Psi}(x)\sigma_1\Psi(x) - \frac{\beta}{\sqrt{2}}\overline{\Psi}(x)\sigma_3\Psi(x) \,, \tag{3.5}$$

а

$$\mathcal{L}_I'(x) = \mathcal{L}_I(x) + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\overline{\Psi}(x)\sigma_1\Psi(x) + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\overline{\Psi}(x)\sigma_3\Psi(x) \,, \tag{3.6}$$

где α и β -произвольные вещественные постоянные. Далее будем рассматривать величину

$$\overline{\Psi}(x)\,\mathcal{M}\,\Psi(x) = m\,\overline{\Psi}(x)\Psi(x) + \overline{\Psi}(x)\left(\frac{\alpha\sigma_1+\beta\sigma_3}{\sqrt{2}}\right)\Psi(x) \tag{3.7}$$

как массовый оператор <u>физических</u> частиц и потребуем, чтобы взаимодействие, описываемое лагранжианом (3.6), при итерациях не давало вклада в собственную энергию фермионного поля:

$$\Sigma(p,\mathcal{M})\Big|_{p_\mu\gamma^\mu=\mathcal{M}} = 0 \quad . \tag{3.8}$$

Соотношение (3.8), называемое уравнением компенсации, в низшем порядке теории возмущений имеет вид:

$$\alpha\sigma_1+\beta\sigma_3 = -\frac{2e^2\ell^2 i}{(2\pi)^4}\int\frac{p^2+m_e m_\mu}{(p^2-m_e^2)(p^2-m_\mu^2)}\,d^4p\,\left(\beta\sigma_1+\alpha\sigma_3\right) , \tag{3.9}$$

где введены обозначения:

$$m_e = m - \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}} \quad ,$$
$$m_\mu = m + \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}} \quad . \tag{3.10}$$

Равенство (3.9) носит формальный характер, т.к. интеграл, стоящий в правой части, расходится при больших импульсах. В этом пункте естественно может возникнуть ряд вопросов. Почему в теории, содержащей фундаментальную длину $\ell=\frac{1}{M}$, интегралы не обрезаются автоматически на импульсах $\sim M$? Существует ли конструктивный способ получения конечных выражений для физических величин? Обсуждение этих вопросов выходит за рамки настоящей статьи. Поэтому в данном случае мы будем действовать чисто "феноменологически" и обрежем интеграл в (3.9) на некотором большом импульсе Λ. Теперь можно утверждать, что уравнение компенсации (3.9) имеет два решения:

I) $\alpha=\beta=0$, что отвечает вырожденному случаю $m_e=m_\mu=m$;

2) $\alpha=\pm\beta>0$,

что, в силу (3.10), дает расщепление масс

$$m_\mu = m+\alpha \quad ,$$
$$m_e = m-\alpha \quad . \tag{3.11}$$

В этом случае (3.9) приобретает вид:

$$1 = \frac{e^2\ell^2}{8\pi^2}\left[\Lambda^2 - \frac{m_\mu^3}{m_\mu - m_e}\,\ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{m_\mu^2}\right) + \frac{m_e^3}{m_\mu - m_e}\,\ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{m_e^2}\right)\right]. \qquad (3.12)$$

Заметим, что мы пришли бы к тем же самым соотношениям (3.II) и (3.I2), если бы вначале привели массовый оператор (3.7) к диагональному виду с помощью преобразования

$$\begin{pmatrix}\Psi_e\\ \Psi_\mu\end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\beta}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}\left(1 - i\,\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\beta}\,\sigma_2\right)\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix}. \qquad (3.13)$$

Ясно, что (3.I3) играет в нашем случае роль канонического преобразования Боголюбова.

Лагранжиан (3.4) может быть без труда записан в терминах физических полей Ψ_μ и Ψ_e .

Проводя рассуждения, аналогичные /6/, легко убедиться в том, что в μe -системе энергия вакуумного состояния в случае расщепленных масс имеет меньшую величину, чем энергия вакуумного состояния в вырожденном случае $m_\mu = m_e = m$

$$E^{(m)}_{\text{вак.}} - E^{(m_\mu, m_e)}_{\text{вак.}} = 2\,\delta^3(0)\int d^3\vec{p}\left(\sqrt{\vec{p}^2+m_\mu^2} + \sqrt{\vec{p}^2+m_e^2} - 2\sqrt{\vec{p}^2+m^2}\right) > 0\,. \qquad (3.14)$$

Это и дает право рассматривать как "физические" поля величины Ψ_e и Ψ_μ , а не Ψ_1 и Ψ_2 .

4. Уравнение компенсации в методе функционального интеграла

Рассмотрим применительно к нашему случаю производящий функционал для функций Грина:

$$Z[\bar\eta,\eta] = N\int D\bar\Psi\, D\Psi\, \exp\left\{i\int d^4x\left(\mathcal{L}(x) + \bar\eta(x)\Psi(x) + \bar\Psi(x)\eta(x)\right)\right\}, \qquad (4.1)$$

где $\mathcal{L}(x)$ определяется в (3.I)–(3.3), $\bar\Psi(x)$ и $\Psi(x)$ – 8-компонентные грассмановы переменные, а $\bar\eta$ и η – внешние источники. Следуя /II/, введем величины:

$$K^{(a_1 b_1;\, a_2 b_2)}_{(\alpha_1\beta_1;\, \alpha_2\beta_2)}(x_1,x_2) = (\gamma_\mu)_{\alpha_1\beta_2}(\gamma^\mu)_{\alpha_2\beta_1}\left[(\sigma_1)_{a_1 b_2}(\sigma_1)_{a_2 b_1} + (\sigma_1)_{a_1 b_2}(\sigma_1)_{a_2 b_1}\right]\delta^4(x_1-x_2) \qquad (4.2)$$

и с их помощью перепишем четырехфермионный член в виде:

$$\int d^4x\, \bar\Psi(x)\,\sigma_1\otimes\gamma_\mu\,\Psi(x)\cdot\bar\Psi(x)\,\sigma_1\otimes\gamma^\mu\,\Psi(x) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int d^4x_1\, d^4x_2\left[\Psi^{b_1}_{\beta_1}(x_1)\,\bar\Psi^{a_1}_{\alpha_1}(x_1)\right] K^{(a_1 b_1;\, a_2 b_2)}_{(\alpha_1\beta_1;\, \alpha_2\beta_2)}(x_1,x_2)\left[\Psi^{b_2}_{\beta_2}(x_2)\,\bar\Psi^{a_2}_{\alpha_2}(x_2)\right] = \qquad (4.3)$$

$$= -\frac{1}{2}\,\Psi_{B_1}\bar\Psi_{A_1}\,K_{A_1B_1A_2B_2}\,\Psi_{B_2}\bar\Psi_{A_2} \equiv -\frac{1}{2}\left(\Psi\bar\Psi, K\Psi\bar\Psi\right).$$

Здесь введено обозначение:

$$A_i = (\alpha_i, a_i, x_i)\,,$$
$$B_i = (\beta_i, b_i, x_i)\,, \quad (i = 1,2). \qquad (4.4)$$

Полученную форму четверного взаимодействия (4.3) можно линеаризовать, вводя следующим образом вспомогательное поле $b_{AB}(x)$:

$$\exp\left\{-\frac{i}{2}\,\frac{e^2\ell^2}{4}\left(\Psi\bar\Psi, K\Psi\bar\Psi\right)\right\} =$$
$$= C\int Db\,\exp\left\{i\left[\frac{1}{2}\,\frac{4}{e^2\ell^2}\left(b, K^{-1}b\right) + \bar\Psi b\Psi\right]\right\}. \qquad (4.5)$$

После подстановки (4.5) в (4.I) и интегрирования по переменным $\bar\Psi$ и Ψ, будем иметь:

$$Z(\bar\eta,\eta) = N'\int Db\,\exp\left[i\,S(b)\right]\,Z[\bar\eta,\eta,b]\,, \qquad (4.6)$$

где

$$S(b) = \frac{2}{e^2\ell^2}\,b\,K^{-1}b - i\,Sp\left(\ln G^{-1}\right), \qquad (4.7)$$

$$Z[\bar\eta,\eta,b] = \exp\left(-i\bar\eta G\eta\right), \qquad (4.8)$$

$$G^{-1}(x,y) = \left[i\hat\partial_x - m + b(x)\right]\delta^4(x-y)\,. \qquad (4.9)$$

Теперь перейдем к нахождению "классического" уравнения движения поля $b(x)$, рассматривая функционал $S(b)$ в подынтегральном выражении (4.6) как функцию действия для этого поля. Легко видеть, что искомое уравнение движения имеет вид:

$$\frac{\delta S(b)}{\delta b} = \frac{4}{e^2 \ell^2} K^{-1} b - i G = 0 \quad . \tag{4.10}$$

Отсюда находим, что $b(x)$ есть постоянная величина, удовлетворяющая уравнению компенсации (3.9).

Сделав в интеграле (4.6) замену

$$\frac{e^2\ell^2}{4} b_{AB}(x) = b_{AB} + \frac{e^2\ell^2}{4} \phi_{AB}(x) \quad , \tag{4.11}$$

мы можем развивать теорию возмущений по переменной $\phi(x)$ и вычислять поправки к функции Грина фермионов. Если $b \neq 0$,то в силу предыдущего это означает, что $m_\mu \neq m_e$. Следовательно, рассматриваемое разложение по теории возмущений будет задано в окрестности физического вакуума.

Авторы искренне благодарны Н.Н.Боголюбову за интерес к работе и плодотворные обсуждения, а также А.Д.Донкову, В.А.Матвееву, Р.М.Мир-Касимову, А.Н.Тавхелидзе, Р.Н.Фаустову, Д.В.Ширкову и Д.Эберту за интересные и полезные дискуссии.

Литература

I. Труды семинара по μe -проблеме , Москва, Наука, 1974.
2. Kadyshevsky V.G., Fermilab-Pub-78/70-THY September 1978;
3. Боголюбов Н.Н. Известия АН СССР, физика, 1947, II, №I, с. 77.
4. Боголюбов Н.Н. ЖЭТФ, 1958, 34, №I, с. 58.
5. Боголюбов Н.Н. Квазисредние в задачах статистической механики, Препринт ОИЯИ, Д-781, Дубна (1961).
6. Nambu Y., Jona-Lasinio G. Phys.Rev., 1961, 122, p. 345.
7. Вакс В.Г., Ларкин А.И. ЖЭТФ, 1961, 40, с. 282.
8. Арбузов Б.А., Тавхелидзе А.Н., Фаустов Р.Н. ДАН СССР, 1961, 139, № 2, с. 345.
9. Snyder H. Phys.Rev., 1947, 71, p. 38; 1947, 72, p. 68.
10. Гольфанд Ю.А. ЖЭТФ, 1959, 37, с. 504.
11. Эберт Д., Первушин В.Н. Препринт ОИЯИ, Е2-10020, Дубна, 1976; Первушин В.Н., Райнхардт Х., Эберт Д. ЭЧАЯ, 1979, 10, вып. 5, с. 1114.

Рукопись поступила в издательский отдел
II января 1980 года.