сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

+

3415/2-80

28/7-8

P2-80-266

В.Н.Стрельцов

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

(ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА)

1980

Введенные сравнительно недавно обобщенные ϵ-преобразования Лоренца количественно учитывают факт конвенциональности определения одновременности разноместных событий в теории относительности. Выводу и трактовке этих преобразований, углубляющих наши представления о пространственно-временных соотношениях в природе, посвящен целый ряд работ /см., например [1], где можно найти ссылки на эти работы/. Однако не менее важен другой аспект рассматриваемой проблемы: как согласовать с указанными преобразованиями известные уравнения физики, не содержащие явно параметра одновременности ϵ? Вопросам применения ϵ-преобразований и будет посвящено наше следующее рассмотрение.

1. ЭНЕРГИЯ, ИМПУЛЬС

На основе обобщенных /специальных/ преобразований Лоренца можно получить формулы преобразования для любых тензорных величин. В частности, для компонент контравариантного 4-вектора скорости $u^i = dx^i/d\tau$ * будем иметь

$$u^0 = (u^{0\prime} + \frac{v_+}{c_+ c_-} u^{1\prime})\gamma,\ u^1 = [(1 + \frac{v_+}{c_-} - \frac{v_+}{c_+})u^{1\prime} + v_+ u^{0\prime}]\gamma,\ u^2 = u^{2\prime}, \qquad /1/$$

$$u^3 = u^{3\prime},$$

где $\gamma = [(1 - v_+/c_+)(1 + v_+/c_-)]^{-1/2}$, а связь с прежними обозначениями такова: $v_+ = v_1$, $c_+ = c_1$, $c_- = c_2$.

Опираясь на /1/ для составляющих контравариантного 4-импульса $p^i = mu^i$, легко найдем

$$p^0 = (p^{0\prime} + \frac{v_+}{c_+ c_-} p^{1\prime})\gamma,\ p^1 = [(1 + \frac{v_+}{c_-} - \frac{v_+}{c_+})p^{1\prime} + v_+ p^{0\prime}]\gamma, \qquad /2/$$

$$p^2 = p^{2\prime},\quad p^3 = p^{3\prime},.$$

Для покоящейся в К-системе частицы имеем $p^{0\prime} = m$, $p^{\alpha\prime} = 0$ /$\alpha = 1,2,3$/. При этом исходя из условия инвариантности выражения $g_{ik}p^i p^k$ будем иметь

$$m^2 = (p^0)^2 - (\frac{1}{c_+} - \frac{1}{c_-})p^0 p^1 - \frac{1}{c_+ c_-}(p^1)^2 . \qquad /3/$$

---

* $i = 0, 1, 2, 3,\ x^0 = t,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z$.

Объединенный институт ядерных исследований БИБЛИОТЕКА

Решая последнее уравнение относительно p^0, найдем

$$p^0 = \frac{c_- - c_+}{2c_+c_-}p^1 \pm [m^2 + (\frac{c_- - c_+}{2c_+c_-})^2 (p^1)^2 + \frac{1}{c_+c_-}(p^1)^2]^{1/2} \qquad /4/$$

или иначе

$$E = \frac{1}{2}(c_- - c_+)p^1 \pm \{(mc_+c_-)^2 + \frac{1}{4}[p^1(c_+ + c_-)]^2\}^{1/2} =$$
$$= \{(2\epsilon - 1)p^1 c \pm [m^2c^4 + (p^1)^2c^2]^{1/2}\}[4\epsilon(1-\epsilon)]^{-1}, \qquad /5/$$

где

$$E = p^0 c_+ c_- = p^0 c^2 [4\epsilon(1-\epsilon)]^{-1} \quad .$$

В полученной таким образом формуле /5/ первый член под корнем не зависит от p^1 и описывает энергию покоя

$$E' = mc_+ c_- = mc^2[4\epsilon(1-\epsilon)]^{-1} \quad , \qquad /6/$$

заменяя обычное выражение mc^2. При этом, кроме привычного радикала, формула для энергии /5/ содержит дополнительный член. Ограничиваясь, как обычно, положительным значением корня, например, для энергии фотона будем иметь

$$E = p^1 c_- \quad . \qquad /7/$$

В нерелятивистском случае для энергии частицы найдем

$$E \simeq mc_+ c_- + \frac{1}{2}(c_- - c_+)p^1 + \frac{1}{2mc_+c_-}(p^1 \cdot \frac{c_+ + c_-}{2})^2 \quad . \qquad /8/$$

2. УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Воспользовавшись выражением для компонент контравариантного метрического тензора:

$$g^{00} = \frac{1}{c_+c_-} = \frac{4\epsilon(1-\epsilon)}{c^2}, \quad g^{01} = g^{10} = \frac{c_+ - c_-}{2c_+c_-} = \frac{1-2\epsilon}{c},$$
$$g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1, \quad \sqrt{-g} = \frac{1}{2}(\frac{1}{c_+} - \frac{1}{c_-}) = 1, \qquad /9/$$

легко написать, например, уравнение Гамильтона-Якоби. Оно будет иметь вид

$$\frac{1}{c_+c_-}(\frac{\partial S}{\partial t})^2 + (\frac{1}{c_-} - \frac{1}{c_+})\frac{\partial S}{\partial t}\cdot\frac{\partial S}{\partial x^1} - (\frac{\partial S}{\partial x^a})^2 - mc_+c_- = 0. \qquad /10/$$

С другой стороны, к выражению /10/ можно прийти, если в обычном релятивистском уравнении Гамильтона-Якоби произвести замену ковариантной производной:

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \to \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{2\varepsilon - 1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{c_- + c_+}{2c_+ c_-} \cdot \frac{\partial}{\partial t}, \qquad /11/$$

соответствующую процедуре получения обобщенных преобразований Лоренца из обычных формул.

Аналогичным образом для релятивистского волнового уравнения будем иметь следующее выражение:

$$\frac{1}{c_+ c_-} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \left(\frac{1}{c_-} - \frac{1}{c_+}\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t\, \partial x^1} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\alpha^2} + \frac{m^2 c_+ c_-}{\hbar^2} \phi = 0. \qquad /12/$$

Заметим здесь, что коэффициенты при первых членах в уравнениях /10/ и /12/ соответствуют c^{-2}. Поэтому в дальнейшем мы будем определять координату x^0 как

$$x^0 = (c_+ c_-)^{1/2}\, t = c' t. \qquad /13/$$

3. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Опираясь, например, на формулы /1/, с учетом /13/ можно получить преобразования для компонент антисимметричного контравариантного тензора второго ранга F^{ik}, описывающего, в частности, электромагнитное поле. Принимая во внимание, что при этом связь компоненты F^{ik} с напряженностями электрического и магнитного полей определяется с помощью формул

$$F^{01} = E_x, \quad F^{02} = E_y, \quad F^{03} = E_z, \quad F^{23} = H_x, \quad F^{31} = H_y, \quad F^{12} = H_z, \qquad /14/$$

для преобразований $\vec{E}$ и $\vec{H}$ будем иметь [2] /см. также [3] /

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \left(E'_y + \frac{v_+}{c'} H'_z\right)\gamma, \quad E_z = \left(E'_z - \frac{v_+}{c'} H'_y\right)\gamma,$$

$$H_x = H'_x, \quad H_{y,z} = \left[\left(1 + \frac{v_+}{c_-} - \frac{v_+}{c_+}\right) H'_{y,z} \mp \frac{v_+}{c'} E'_{z,y}\right]\gamma. \qquad /15/$$

Преобразования /15/ обеспечивают ковариантность второй пары уравнений Максвелла:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{c'} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c'} \vec{j}, \qquad \mathrm{div}\,\vec{E} = \rho, \qquad /16/$$

которая с помощью тензора электромагнитного поля F^{ik} и 4-вектора плотности тока $j^i(c'\rho, j^a)$ может быть представлена в виде

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = \frac{1}{c'} j^i . \qquad /17/$$

Что касается другой пары уравнений Максвелла, которые мы запишем в виде

$$\mathrm{rot}\,\vec{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c'}\frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t}, \qquad \mathrm{div}\,\vec{\mathcal{H}} = 0, \qquad /18/$$

то требование их ковариантности будет выполнено, если компоненты напряженностей $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{H}}$ будут удовлетворять следующим формулам преобразований:

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}'_x, \quad \mathcal{E}_{y,z} = [(1 + \frac{v_+}{c_-} - \frac{v_+}{c_+})\mathcal{E}'_{y,z} \pm \frac{v_+}{c'}\mathcal{H}'_{z,y}]\gamma,$$
$$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}'_x, \quad \mathcal{H}_y = (\mathcal{H}'_y - \frac{v_+}{c'}\mathcal{E}'_z)\gamma, \quad \mathcal{H}_z = (\mathcal{H}'_z + \frac{v_+}{c'}\mathcal{E}'_y)\gamma . \qquad /19/$$

Отличие /19/ от /15/ обусловлено тем, что последние выражения описывают преобразования составляющих ковариантного тензора электромагнитного поля F_{ik}. Связь компонент $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ с компонентами F_{ik} определяется формулами

$$F_{10} = \mathcal{E}_x, \; F_{20} = \mathcal{E}_y, \; F_{30} = \mathcal{E}_z, \; F_{23} = \mathcal{H}_x, \; F_{31} = \mathcal{H}_y, \; F_{12} = \mathcal{H}_z . \qquad /20/$$

С учетом /20/ выражения /18/ перепишем также в виде

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^\ell} + \frac{\partial F_{\ell i}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{k\ell}}{\partial x^i} = 0. \qquad /21/$$

Таким образом, мы показали, что уравнения Максвелла, которые, в частности, описывают процессы распространения электромагнитных волн - световых сигналов, инвариантны относительно обобщенных ϵ-преобразований Лоренца. Напомним, что вывод указанных преобразований основывался именно на рассмотрении таких процессов.

4. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА

Рассмотрим уравнение Дирака

$$(i\gamma^0 \frac{\partial}{c\partial t} + i\gamma^a \frac{\partial}{\partial x^a} - \frac{mc}{\hbar})\psi(x) = 0, \qquad /22/$$

где $\psi(x)$ - четырехкомпонентная функция, а

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\gamma^1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix},\gamma^2=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&i&0&0\\-i&0&0&0\end{pmatrix},\gamma^3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}, \qquad /23/$$

Чтобы обеспечить инвариантность этого уравнения относительно обобщенных преобразований Лоренца в соответствии с результатами п.2, необходимо произвести замену /11/ ковариантной производной $\partial/\partial x^1$. Кроме того, в последнем члене надо в соответствии с /6/ c заменить величиной $c'=(c_+c_-)^{1/2}$. В результате будем иметь [4]

$$[\,i(\gamma^0\frac{c_++c_-}{2c'}+\gamma^1\frac{c_--c_+}{2c'})\frac{\partial}{\partial x^0}+i\gamma^a\frac{\partial}{\partial x^a}-\frac{mc'}{\hbar}]\psi(x)=0 \qquad /24/$$

или

$$\{i[\gamma^0+(2\epsilon-1)\gamma^1]\frac{\partial}{c\partial t}+i\gamma^a\frac{\partial}{\partial x^a}-\frac{mc}{\hbar}[4\epsilon(1-\epsilon)]^{-1/2}\}\psi(x)=0. \qquad /24'/$$

С другой стороны, можно сохранить практически прежнюю форму уравнения /22/ *, но для матрицы γ^0 необходимо использовать следующее выражение:

$$\gamma_\epsilon^0=\begin{pmatrix}1&0&0&\delta\\0&1&\delta&0\\0&-\delta&-1&0\\-\delta&0&0&-1\end{pmatrix}, \qquad /25/$$

где $\delta=2\epsilon-1$.

Непосредственно применяя формулы /17/ или /18/ [1] с учетом известных преобразований компонент ψ:

$$\psi'_{1,4}=\gamma_+\psi_{1,4}-\gamma_-\psi_{4,1},\ \psi'_{2,3}=\gamma_+\psi_{2,3}-\gamma_-\psi_{3,2}, \qquad /26/$$

где $\gamma_\pm=[(\gamma\pm1)/2]^{1/2}$, легко убедиться, что видоизмененное таким образом уравнение Дирака в форме /24/ или /24'/ будет действительно инвариантно относительно обобщенных ϵ-преобразований Лоренца.

В рамках спинорного анализа для уравнения Дирака будем иметь, скажем, следующие два выражения /см, например, [6] /:

---

* Заменив в соответствии с /24'/ последний член.

$$D^{\alpha\dot\beta}\eta_{\dot\beta} = \frac{mc'}{\hbar}\xi^{\alpha}, \qquad D^{\dot\alpha\beta}\xi_{\beta} = \frac{mc'}{\hbar}\eta^{\dot\alpha}. \qquad /27/$$

Здесь α, $\dot\alpha$, β, $\dot\beta = 1,2$; ξ и η - непунктирный и пунктирный спиноры, а в соответствии с /11/

$$\left\| \begin{matrix} D^{1\dot 1} & D^{1\dot 2} \\ D^{2\dot 1} & D^{2\dot 2} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \partial_0 + \partial_3 & \delta\partial_0 + \partial_1 + i\partial_2 \\ \delta\partial_0 + \partial_1 - i\partial_2 & \partial_0 - \partial_3 \end{matrix} \right\|, \qquad /28/$$

где $\partial_0 = \partial/c\partial t$, $\partial_a = \partial/\partial x^a$.

Связь ковариантных спиноров ξ_α, $\eta_{\dot\alpha}$ с компонентами волновой функции ψ определяется следующими выражениями:

$$\xi_1 = \psi_1 + \psi_3, \quad \xi_2 = \psi_2 + \psi_4, \qquad \eta_{\dot 1} = i(\psi_4 - \psi_2), \quad \eta_{\dot 2} = i(\psi_1 - \psi_3). \qquad /29/$$

При этом, например, переход от контравариантных составляющих к ковариантным осуществляется с помощью кососимметричного спинтензора $\epsilon_{\alpha\beta}(\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta})$, у которого

$$\epsilon_{12} = 1 \quad (\epsilon_{\dot 1\dot 2} = 1). \qquad /30/$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, на основе обобщенных ϵ-преобразований Лоренца были получены формула для энергии, а также выражения для релятивистского уравнения Гамильтона-Якоби и релятивистского волнового уравнения. Было показано, что уравнения Максвелла инвариантны относительно данных преобразований и получены соответствующие формулы преобразования для напряженностей электромагнитного поля. Мы показали также, что отмеченному требованию инвариантности удовлетворяет видоизмененное уравнение Дирака, переходящее в обычное уравнение Дирака при $\epsilon = 1/2(c_+ = c_-)$.

ДОПОЛНЕНИЕ

О РЕЛЯТИВИСТСКОМ ВРАЩЕНИИ

Хотя обсуждаемые ниже вопросы, строго говоря, выходят за рамки собственно специальной теории относительности, однако, как мы увидим, имеется достаточно тесная связь, а в ряде случаев и определенное сходство с результатами указанной теории.

Так, в известных электромагнитных опытах Роуланда, Рентгена, Эйхенвальда и Вильсона, которые послужили основой для распространения теории Максвелла на поступательно движущиеся тела, использовалось вращательное движение. Эти опыты сыграли важную роль для обоснования специальной теории относительности. В эксперименте [6] по проверке релятивистского замедления времени с помощью мюонов, распадающихся в накопительном кольце, также использовалось вращение. С другой стороны, этот эксперимент рассматривается как проверка "парадокса часов".

В последнее время вопросам релятивистского описания вращательного движения был посвящен ряд работ /см., например, [7-9], где можно найти библиографию по данной теме/. Указанные вопросы и будут предметом нашего последующего рассмотрения.

1. <u>Тангенциальные преобразования</u>. Для описания релятивистского вращения мы будем в качестве первого шага использовать следующие /тангенциальные/ преобразования [10,11а], которые в сферических координатах * имеют вид

$$t = (t' - \omega r'^2 \sin^2 \theta' c^{-2} \phi')\gamma, \quad \phi = (\phi' - \omega t')\gamma,$$
$$r = r' = \text{const.}, \quad \theta = \theta' = \text{const.}, \qquad /Д1/$$

где

$$\gamma = (1 - \omega^2 r'^2 \sin^2 \theta' c^{-2})^{-1/2} .$$

Формулы /Д1/ описывают переход от инерциальной K-системы к неинерциальной K'-системе, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω $(\omega r \le c)$ вокруг оси z', совпадающей с осью z K-системы.

Преобразования /Д1/ обеспечивают форм-инвариантность элементарного интервала $c d\tau$, квадрат которого в сферической системе координат имеет вид

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2). \qquad /Д2/$$

Последний результат напоминает переход от одной инерциальной системы отсчета к другой в рамках специальной теории относительности. Он означает, что во вращающейся системе K' световой сигнал вдоль любой окружности /с центром $r' = 0, \theta' = \pi/2$ / будет распространяться /как и в инерциальной системе K/ со скоростью $c_1' = c$.

При этом на основании /Д1/ показания вращающихся часов с координатами $r' = R$, $\theta' = \pi/2$, $\phi' = \text{const}$ будут определяться формулой

---

* $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$.

$$\Delta t' = \Delta t(1 - \omega^2 R^2 c^{-2})^{1/2} \quad . \qquad /Д3/$$

Основанный на эффекте Мёссбауэра опыт [12] по измерению смещения частоты γ-квантов вследствие вращения может служить экспериментальным подтверждением формулы /Д3/.

По наблюдениям из К-системы расстояние, покрытое световым сигналом в направлении вращения вдоль окружности радиуса R /скажем, некоторого диска, лежащего в плоскости xy/, составит

$$\underset{\leftarrow}{\ell} = 2\pi R\left(\frac{1+\omega R c^{-1}}{1-\omega R c^{-1}}\right)^{1/2}, \qquad /Д4а/$$

тогда как для обратного направления

$$\underset{\rightarrow}{\ell} = 2\pi R\left(\frac{1-\omega R c^{-1}}{1+\omega R c^{-1}}\right)^{1/2}. \qquad /Д4б/$$

Если в соответствии с определением понятия релятивистской длины [11б] мы будем называть длиной окружности (ℓ) вращающегося диска полусумму отмеченных величин $\underset{\leftarrow}{\ell}$ и $\underset{\rightarrow}{\ell}$, то /в соответствии с формулой "релятивистского удлинения"/ найдем

$$\ell = 2\pi R(1-\omega^2 R^2 c^{-2})^{-1/2}, \qquad /Д5/$$

т.е. длина окружности вращающегося диска будет в γ раз больше длины окружности этого диска в покое.

Вернемся теперь к формулам /Д4а/ и /Д4б/, на основании которых мы можем вычислить соответствующие времена распространения светового сигнала и их разность. Эта разность составит

$$\Delta t = 4\pi R^2 \omega c^{-2} \gamma \qquad /Д6/$$

или

$$\Delta t = 4\omega A c^{-2} \gamma, \qquad /Д6'/$$

где $A = \pi R^2$ - площадь диска.

Последний результат согласуется, очевидно, с экспериментальными данными по смещению интерференционных полос, которое наблюдалось в экспериментах типа опыта Саньяка [13]* с вращающимися интерферометрами.

Следует также отметить, что предложенный недавно эксперимент [15] по проверке процедуры синхронизации в неинерциальной /именно, вращающейся/ системе отсчета на основании форм-инвариантности квадрата интервала /Д2/и, в частности, равенства нулю $g'_{t\phi}$, очевидно, должен дать отрицательный результат.

---

*В этой связи см., например, обзорную статью Поста [14].

Опираясь на выражение /Д1/,можно получить преобразования для любых тензорных величин. В частности, для энергии и момента импульса в цилиндрических координатах /ц.к./ найдем

$$E = (E' - \omega M')\gamma, \qquad M = (M' - \omega r^2 c^{-2} E')\gamma, \qquad /Д7/$$

где $M = rp_\phi = r[mr(d\phi/dr)]$.

2. <u>Преобразования электромагнитных величин</u>. На основании /Д1/ для напряженностей электромагнитного поля в ц.к. будем иметь

$$E_\phi = E'_\phi, \quad E_r = (E'_r + \frac{\omega r}{c} H'_z)\gamma, \quad E_z = (E'_z - \frac{\omega r}{c} H'_r)\gamma,$$

$$H_\phi = H'_\phi, \quad H_r = (H'_r - \frac{\omega r}{c} E'_z)\gamma, \quad H_z = (H'_z + \frac{\omega r}{c} E'_r)\gamma. \qquad /Д8/$$

В случае медленного /галилеевого/ вращения, скажем, постоянного цилиндрического магнита, ориентированного вдоль оси z,на основании второй формулы /Д8/ найдем, что результатом вращения будет возникновение радиального электрического поля:

$$E_r = \frac{\omega r}{c} H'_z \qquad /Д8'/$$

- явление униполярной индукции.

С другой стороны, для плотности зарядов (ρ) и тока (j_ϕ)*, текущего, скажем, по кольцевому проводнику радиуса R, будем иметь

$$\rho_- = (\rho'_- - \omega R^2 c^{-2} j'_\phi)\gamma, \qquad j_\phi = (j'_\phi - \omega\rho'_-)\gamma \qquad /Д9/$$

или, в частности,

$$\rho_- = \rho'_-\gamma, \qquad j_\phi = -\omega\rho'_-\gamma. \qquad /Д9'/$$

Из формул /Д9'/, казалось бы, следует, что при изменении тока j_ϕ /скажем, его затухании/ в указанном /изолированном/ проводнике должна изменяться плотность электронов проводимости ($\Delta\rho = \rho_- - \rho'_-$). На это как будто бы указывают соответствующие предварительные опыты[16,17]. Однако, по-видимому, правильнее здесь рассуждать так: в системе отсчета K, связанной с проводником, длина цепочки электронов составляет $\ell = 2\pi R$. С точки зрения /их собственной/ K'-системы, эта длина будет равна $\ell' = 2\pi R\gamma$, поэтому $\rho'_- = N_-/\ell' = \rho_-\gamma^{-1}$, где N_- - полное число электронов.

---

*Вызываемого вращающимися электрическими зарядами.

При стремлении значения скорости электронов к нулю $\gamma \to 1$ и $\rho' \to \rho$, а следовательно, $\rho'_- \to \rho_-$ и $\Delta\rho = 0$, т.е. плотность электронов проводимости не изменяется.

3. Силы инерции. Хотя форм-инвариантность элемента интервала /Д2/ относительно преобразования /Д1/ напоминает лоренц-инвариантность интервала в специальной теории относительности, имеется, однако, существенное отличие между этими случаями. Оно заключается в том, что переход к вращательному движению связан с появлением сил инерции. В специальной теории относительности если в одной системе отсчета релятивистская сила

$$m\frac{du^i}{d\tau} = 0, \qquad /Д10/$$

где $u^i = dx^i/d\tau$ – 4-скорость, то эта сила равна нулю во всех других системах отсчета. Уравнение /Д10/ описывает свободное движение.

Исходя из требования ковариантности уравнение свободного движения /Д10/ в криволинейных координатах следует заменить уравнением

$$m\frac{Du^i}{d\tau} = 0, \qquad /Д11/$$

где Du^i – ковариантный или абсолютный дифференциал, или иначе

$$m\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + m\Gamma^i_{k\ell}\frac{dx^k}{d\tau}\cdot\frac{dx^\ell}{d\tau} = 0, \qquad /Д12/$$

где $\Gamma^i_{k\ell}$ – символы Кристоффеля.

На основании формулы

$$\Gamma^i_{k\ell} = \frac{1}{2}g^{im}(g_{mk,\ell} + g_{m\ell,k} - g_{k\ell,m}), \qquad /Д13/$$

где $g_{mk,\ell} = \partial g_{mk}/\partial x^\ell$, выражающей $\Gamma^i_{k\ell}$ через метрический тензор g_{ik}, в случае элементарного интервала /Д2/ будем иметь следующие отличные от нуля компоненты:

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r, \quad \Gamma^r_{\phi\phi} = -r\sin^2\theta, \quad \Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\phi_{r\phi} = r^{-1},$$
$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \mathrm{ctg}\,\theta. \qquad /Д14/$$

На основании /Д14/ для уравнения вращательного движения найдем

$$m[\ddot r - r(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\phi^2)] = 0,$$
$$m(\ddot\theta + 2r^{-1}\dot r\dot\theta - \sin\theta\cos\theta\,\dot\phi^2) = 0, \qquad /Д15/$$
$$m[\ddot\phi - 2(r^{-1}\dot r + \mathrm{ctg}\,\theta\,\dot\theta)\dot\phi] = 0,$$

где точка означает производную по τ.

В случае заряженной частицы в электромагнитном поле вместо /Д11/ будем иметь

$$m\frac{Du^i}{d\tau} = \frac{e}{c} F^i_k u^k . \qquad /Д16/$$

В частности, для стационарного вращения ($\dot r = \ddot r = 0$) в плоскости $xy (\theta = \pi/2)$ под действием магнитного поля H_z на основании первого уравнения /Д15/ получим

$$mr\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = \frac{e}{c} F_\phi{}^r u^\phi = \frac{e}{c} r H_z \frac{d\phi}{d\tau} . \qquad /Д17/$$

С учетом того, что $d\tau = (1-\Omega^2 r^2 c^{-2})^{1/2}\, dt$, $\Omega = d\phi/dt$, будем иметь

$$\frac{m}{(1-\Omega^2 r^2 c^{-2})^{1/2}}\,\Omega = \frac{e}{c} H_z . \qquad /Д17'/$$

Последнее выражение, в частности, представляет собой релятивистское уравнение движения в циклотроне либо в магнитном спектрометре. Здесь необходимо подчеркнуть, что обычное объяснение введения радикала в левой части /Д17'/ как следствия релятивистского возрастания массы частицы нельзя признать удовлетворительным. В рамках специальной теории относительности масса частицы является скалярной величиной.

Интересно также отметить, что в рассматриваемом случае оказывается отличной от нуля компонента t^{tt} псевдотензора энергии-импульса t^{ik} /18/:

$$t^{tt} = \frac{c^4}{8\pi k r^2}(-5 - \mathrm{ctg}^2\theta), \qquad /Д18/$$

где k - гравитационная постоянная.

4. Общие преобразования для дифференциалов координат /когда $dr, d\theta \neq 0$/ на основании /Д1/ будут иметь вид

$$dt = dt' - \omega r' \sin^2\theta' c^{-2}(\phi' dr' + r'\mathrm{ctg}\theta' \phi' d\theta' + r' d\phi')]\gamma +$$

$$+ \omega r' \sin^2\theta' c^{-2}(\omega t' - \phi')(dr' + r'\mathrm{ctg}\theta' d\theta')\gamma^3 , \qquad /Д19/$$

$$dr = dr', \quad d\theta = d\theta',$$

$$d\phi = (d\phi' - \omega\, dt')\gamma + \omega^2 r' \sin^2\theta' c^{-2}(\phi' - \omega t')(dr' + r'\mathrm{ctg}\theta' d\theta')\gamma^3 .$$

Используя /Д19/ для компонент метрического тензора в K'-системе /опуская штрихи и полагая $c = 1$, $\omega r \sin\theta = \beta$ /, найдем

$$g_{tt} = 1, \quad g_{tr} = -\beta \sin\theta(\omega t - 2\phi)\gamma^2, \quad g_{t\theta} = r\,\mathrm{ctg}\theta\, g_{tr} .$$

$$g_{t\phi}=0,\quad g_{rr}=-1+\beta^2\sin^2\theta[(\omega t-2\phi)^2-\beta^2\phi^2]\gamma^4,$$

$$g_{r\theta}=r\,\mathrm{ctg}\,\theta(1+g_{rr}),\quad g_{r\phi}=\beta^2 r\sin^2\theta\phi\gamma^2,\qquad /Д20/$$

$$g_{\theta\theta}=-r^2[1-\mathrm{ctg}^2\theta(1+g_{rr})],\quad g_{\phi\phi}=-r^2\sin^2\theta,\quad g_{\theta\phi}=r\,\mathrm{ctg}\,\theta\, g_{r\phi};$$

$$g^{tt}=1-\beta^2(\omega t-2\phi)\gamma^4,\quad g^{tr}=\beta\sin\theta(\omega t-2\phi)\gamma^2,$$

$$g^{t\theta}=r^{-1}\mathrm{ctg}\,\theta\, g^{tr},\quad g^{t\phi}=\omega r^2\phi\gamma^2 g^{tr},\quad g^{rr}=-1,\quad g^{r\theta}=0,$$

$$g^{r\phi}=-\beta^2 r^{-1}\phi\gamma^2,\quad g^{\theta\theta}=-r^{-2},\quad g^{\theta\phi}=\mathrm{ctg}\,\theta\, g^{r\phi},\qquad /Д21/$$

$$g^{\phi\phi}=-r^{-2}\sin^{-2}\theta-\beta^2\omega^2\phi^2\gamma^4.$$

Как было показано выше, тангенциальная скорость света c_t во вращающейся системе отсчета определяется обычным значением c. Что касается соответствующей радиальной скорости c_r, то для ее определения воспользуемся формулами /Д20/. Полагая $dr^2=0$ и разрешая полученное уравнение при условии $d\theta=d\phi=0$, найдем

$$c_r=c[\pm(1+\beta^4\sin^2\theta\phi^2\gamma^4)^{1/2}-\beta\sin\theta(\omega t-2\phi)\gamma^4]^{-1}.\qquad /Д22/$$

На первый взгляд, кажется странным то, что c_r /как и компоненты метрического тензора/ зависят от времени t, а также от угла ϕ. Дело, однако, заключается в том, что часы, находящиеся на разных расстояниях от оси вращения в К-системе, имеют разные линейные скорости, а поэтому идут по-разному. Будучи синхронизованными однажды, они в дальнейшем утрачивают это свойство. Причем рассинхронизация возрастает со временем. Этот факт и учитывают формулы /Д19/-/Д22/. Что касается зависимости от углов, то здесь следует учесть, что в принципе длины дуг могут быть измерены с помощью радиолокационного метода, т.е. опять-таки с привлечением часов. Поэтому, например, дуги, измеренные на разных расстояниях от оси вращения и соответствующие одинаковым временным интервалам, будут иметь разную длину*.

---

*Более детально эти вопросы разбираются в /19/.

Таким образом, часы K' -системы можно фактически считать синхронизованными только в один момент времени, скажем, $t=0$. В этом случае /при условии, что ϕ также равно нулю/ скорость света во вращающейся системе отсчета будет определяться обычным значением c, а все величины будут описываться выражениями, имеющими наиболее простой вид.

С учетом сказанного на основании /Д20/ и /Д21/ можно получить формулы для $\Gamma'^{i}_{k\ell}$ в K'-системе. В результате для "свободных" релятивистских уравнений движения во вращающейся системе отсчета будем иметь

$$
\begin{aligned}
m\ddot{r} &= m[r\sin^2\theta(\dot{\phi}+\omega\dot{t})\gamma^2+r\dot{\theta}^2],\\
m\ddot{\theta} &= m[\sin\theta\cos\theta(\dot{\phi}+\omega\dot{t})\gamma^2-2r^{-1}\dot{r}\dot{\theta}],\\
m\ddot{\phi} &= -2mr^{-1}(\dot{\phi}-\omega\gamma^2\dot{t})(\dot{r}+r\,\mathrm{ctg}\theta\,\dot{\theta}),\\
m\ddot{t} &= 2m\omega r\sin^2\theta(\dot{r}+r\,\mathrm{ctg}\theta\,\dot{\theta})\dot{\phi}\gamma^2.
\end{aligned}
\qquad /Д23/
$$

Первые три из полученных уравнений описывают центробежную и кориолисову силы инерции, действующие на частицу /тело/ во вращающейся системе отсчета. Последнее уравнение определяет изменение энергии при вращательном движении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрельцов В.Н. ОИЯИ, Р2-12699, Дубна, 1979.
2. Стрельцов В.Н. ОИЯИ, Р2-7328, Дубна, 1973.
3. Giannoni C. Phil.Sci., 1978, 45, p.17.
4. Стрельцов В.Н. ОИЯИ, Р2-11552, Дубна, 1978.
5. Рашевский П.К. Римaнова геометрия и тензорный анализ. ГИТТЛ, М., 1953.
6. Bailey J. et al. Nature, 1977, 268, p.301.
7. Grøn Ø. Amer. J. Phys., 1975, 43, p.869.
8. Browne P.F. J.Phys.A: Math.Gen., 1977, 10, p.727.
9. Ashworth D.G., Davies P.A. J.Phys.A: Math.Gen., 1979, 12, p.1425.
10. Strauss M. Int. J.Theor.Phys., 1974, 11, p.107.

11а. Стрельцов В.Н. ОИЯИ, Р2-11385, Дубна, 1978;

11б. Стрельцов В.Н. ОИЯИ, Р2-10912, Дубна, 1977.

12. Hay H. et al. Phys.Rev.Lett., 1960, 4, p.165.
13. Sagnac G. Comp.Rend., 1913, 157, pp.708, 1410.
14. Post E.J. Rev.Mod.Phys., 1967, 39, p.475.
15. Cohen J.M., Moses H.E. Phys.Rev.Lett., 1977, 39, p.1641.
16. Гончаров И.Н. ОИЯИ, Р13-6397, Дубна, 1972.

17. Edwards W.F. et al. Phys.Rev. D., 1976, 14, p.922.
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. ГИФМЛ, М., 1960, с.353.
19. Стрельцов В.Н. ОИЯИ, Р2-80-20, Дубна, 1980.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 апреля 1980 года.