сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-80-265

Ш.И.Вашакидзе

КОЛЛЕКТИВНЫЕ КООРДИНАТЫ БОГОЛЮБОВА В ЗАДАЧЕ КВАНТОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

1980

Хорошо известно, что при изучении ряда физических задач в рамках квантовой теории поля возникает необходимость развития приближенных методов, не опирающихся на предположение о слабости взаимодействия.

Такие теоретические проблемы, как проблема невылетания кварков, задача динамического описания систем с большими дефектами масс и протяженных квантовых систем, которые не могут быть решены на основе стандартных методов теории возмущений, ставят перед квантовой теорией поля задачу развития методов сильной связи.

Это обстоятельство привело к развитию новых приближенных методов в квантовой теории поля, с помощью которых появляется возможность проследить некоторые явления физики адронов. В ряде работ развивается метод, основанный на анализе классических решений уравнений поля и учете квантовых эффектов, соответствующих малым возмущениям вблизи этих классических решений. Однако при реализации этой схемы возникает хорошо известная проблема нулевых мод, связанная с тем, что классическое решение характеризуется более низкой симметрией, чем исходная задача.

В настоящей заметке мы обсудим проблему квантования вблизи классических значений поля на основе метода коллективных координат Н.Н.Боголюбова /1/, который позволяет явно учесть свойства инвариантности системы и, таким образом, решить проблему нулевых мод /2-3/.

Рассуждение, которое мы проведем в координатном представлении для системы с трансляционной инвариантностью, аналогично рассуждениям, приведенным в работе /2/ для случая произвольной непрерывной группы симметрии. Однако выбранное нами конфигурационное представление позволяет наглядно проследить характерные особенности преобразования Н.Н.Боголюбова в задаче выделения нулевых мод и проведения квантования вблизи статического локализованного решения.

Для простоты рассмотрим действительное скалярное поле $\varphi(x)$, описываемое трансляционно-инвариантным лагранжианом $\mathcal{L}[\varphi_{(x)}]$. При этом будем предполагать, что действие принимает экстремальное значение при классическом значении поля – $\mathcal{U}(x)$. Как хорошо известно, при рассмотрении квантовых флюктуаций вблизи классического решения, нарушающего трансляционную неинвариантность, обязательно возникают колебания с нулевыми частотами $(\omega_i = 0)$, удовлетворяющие уравнению типа Шредингера

$$H \Psi_k(x) = \omega_k \Psi_k(x), \tag{I}$$

где H определяется из конкретного вида лагранжиана и зависит от $\mathcal{U}(x)$. При этом амплитуды нулевых колебаний связаны с классическим полем соотношением

$$\Psi_i(x) = \alpha^{-1} \nabla_i \mathcal{U}(x), \tag{2}$$

где α – нормировочная константа.

Таким образом видно, что наличие нулевых мод определяется именно трансляционной неинвариантностью классического решения. Это обстоятельство приводит к известным трудностям, связанным с учетом инвариантности системы при построении теории возмущений путем квантования вблизи этих решений.

Эта трудность легко обходится с помощью введения коллективных координат Н.Н.Боголюбова [ж)]. Вводится новая каноническая переменная $Q(t)$, описывающая движение системы в целом, и поле в относительных координатах определяется выражением вида

$$\varphi(\vec{x},t) = U\left(\vec{x} - \vec{Q}(t)\right) + \Phi\left(\vec{x} - \vec{Q}(t), t\right), \tag{3}$$

где $\Phi(x)$ - новые, трансляционно-инвариантные переменные. Равенство (3) рассматривается как каноническое преобразование от старых переменных $\varphi(\vec{x},t)$ к новым - $Q(t)$, $\Phi(\vec{x},t)$. Однако, так как число новых переменных на три больше, мы должны наложить три связи. Выберем эти связи в следующем виде:

$$\int \vec{\nabla} U(\vec{x})\, \Phi(\vec{x},t)\, d\vec{x} = 0. \tag{4}$$

Они имеют простой физический смысл: так как $\vec{\nabla} U(x)$ - амплитуды нулевых мод, то ясно, что уравнение (4) является условием, исключающим из поля нефизические, трансляционные моды. Трансляционные степени свободы теперь описываются с помощью канонической переменной $Q(t)$, которая имеет более наглядный физический смысл и дает возможность точно учесть закон сохранения импульса системы.

Действительно, из-за трансляционной инвариантности нашей задачи при преобразовании (3) лагранжиан может зависеть только

[ж)] Рассуждения будем проводить в шредингеровском представлении, где

$$\left[\varphi(\vec{x},t); \varphi(\vec{x}',t')\right]_{t=t'} = \left[\pi(\vec{x},t); \pi(\vec{x}',t')\right]_{t=t'} = 0$$

$$\left[\varphi(\vec{x}); \pi(\vec{x}',t')\right]_{t=t'} = i\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

реализуются с помощью представления оператора импульса в следующем виде:

$$\pi(x) = -i\frac{\partial}{\partial\varphi(x)}.$$

от скорости $\dot{\vec{Q}}(t)$ (для статического случая $\dot{\vec{Q}}(t)=0$ преобразование (3) является обычной трансляцией на $\vec{Q}(t)=\vec{Q}_0$). В каноническом формализме это означает, что гамильтониан системы не зависит от координаты центра системы $\vec{Q}(t)$ и, следовательно, соответствующий канонический импульс является сохраняющейся величиной. Таким образом,мы можем полностью исключить из рассмотрения переменную $\vec{Q}(t)$, заменив соответствующий канонический импульс $-i\partial/\partial\vec{Q}$ на его значение $\vec{P}$ и, так как канонический импульс $-i\partial/\partial\vec{Q}$ совпадает с полным импульсом системы $\hat{\vec{P}}$

$$-i\frac{\partial}{\partial\vec{Q}}=\int\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\vec{Q}}\left[-i\frac{\partial}{\partial\varphi(x)}\right]d\vec{x}=\int d\vec{x}\,\pi(x)\vec{\nabla}\varphi(x)\equiv\hat{\vec{P}},$$

приходим к явному учету закона сохранения импульса.

Таким образом видно, что преобразование Н.Н.Боголюбова к коллективным переменным дает возможность провести квантование вблизи классического решения, явно учитывающее трансляционную инвариантность задачи.

Для определения канонических импульсов поля $\pi(x)$ удобно рассмотреть полный набор решений уравнения Шредингера (I) - $\Psi_k(\vec{x})$. Для простоты будем предполагать, что эти решения вещественны и удовлетворяют условиям полноты и ортонормированности

$$\int\Psi_k(\vec{x})\Psi_{k'}(\vec{x})=\delta_{kk'}\qquad\sum_k\Psi_k(\vec{x})\Psi_k(\vec{x}')=\delta(\vec{x}-\vec{x}'). \tag{5}$$

Тогда уравнение (3) с учетом дополнительного условия (4) легко переписать в базисе этих векторов

$$\varphi(\vec{x})=\mathcal{U}(\vec{x}-\vec{Q})+\sum_{n>3}^{\infty}\Psi_n(\vec{x}-\vec{Q})Q_n, \tag{6}$$

где Q_n ($n>3$) - новые канонические координаты.

С помощью преобразования (6) получаем для канонических импульсов

$$\mathcal{J}(x) \equiv -i\frac{\partial}{\partial\varphi(x)} = \frac{\partial\vec{Q}}{\partial\varphi(x)}\vec{P} + \sum_{n>3}^{\infty}\frac{\partial Q_n}{\partial\varphi(x)}P_n, \tag{7}$$

где $\vec{P}$ и $\vec{P}_n$ – новые импульсы

$$\vec{P} = -i\frac{\partial}{\partial\vec{Q}}, \qquad P_n = -i\frac{\partial}{\partial Q_n}. \tag{8}$$

Для перехода в новое представление правую часть уравнения (7) надо записать в терминах новых канонических импульсов и координат. Поэтому из уравнения (6) с помощью условий ортогональности (5) выразим новые канонические переменные через старые

$$Q_n = \int d\vec{x}\,\Psi_n(\vec{x}-\vec{Q})\varphi(\vec{x}) - \int d\vec{x}\,\Psi_n(\vec{x})\,U(\vec{x}). \tag{9}$$

С помощью этого уравнения легко найти связь между величинами $\partial\vec{Q}/\partial\varphi(x)$ и $\frac{\partial Q_n}{\partial\varphi(x)}$. Действительно, дифференцируя (9) по $\varphi(x)$ и воспользовавшись уравнениями (5), (2), легко получить уравнение

$$\frac{\partial Q_n}{\partial\varphi(x)} = \Psi_n(\vec{x}-\vec{Q}) - \sum_{n'} Q_{n'}\vec{B}_{nn'}\frac{\partial\vec{Q}}{\partial\varphi(x)}, \tag{10}$$

где

$$\vec{B}_{nn'} = \int d\vec{x}\left[\vec{\nabla}\Psi_n(\vec{x})\right]\Psi_{n'}(\vec{x}) = -\vec{B}_{n'n}.$$

Подставляя (10) в уравнение (7), получаем

$$-i\frac{\partial}{\partial\varphi(x)} = \sum_n \Psi_n(\vec{x}-\vec{Q})P_n + \frac{\partial\vec{Q}}{\partial\varphi(x)}\left\{\vec{P} - \sum \vec{B}_{nn'}Q_{n'}P_n\right\}. \tag{11}$$

Найдем теперь $\frac{\partial \vec{Q}}{\partial \varphi(\vec{x})}$. Для этого уравнение (6) спроектируем на поверхность нулевых мод

$$\int \varphi(x)\, \Psi_i(\vec{x}-\vec{Q})\, d\vec{x} = \int \Psi_i(\vec{x})\, \mathcal{U}(\vec{x})\, d\vec{x}.$$

Продифференцировав это уравнение по $\varphi(\vec{x})$, получаем

$$\alpha \frac{\partial Q_i}{\partial \varphi(x)} + \Big[\sum_{n>3} A^n_{ij} Q_n\Big] \frac{\partial Q_i}{\partial \varphi(x)} = - \Psi_i(\vec{x}-\vec{Q}), \tag{I2}$$

где

$$A^n_{ij} = \int d\vec{x}\, \Psi_i(\vec{x})\, \nabla_j \Psi_n(\vec{x}) = A^n_{ji}. \tag{I3}$$

Из уравнения (I2) находим

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \varphi(\vec{x})} = -\Big[\alpha + \sum_n A^n Q_n\Big]^{-1}_{ij} \Psi_j(\vec{x}-\vec{Q})$$

и определяем канонический импульс поля, подставляя это выражение в уравнение (II)

$$-i\frac{\partial}{\partial \varphi(x)} = \sum \Psi_n(\vec{x}-\vec{Q}) P_n - \Big[\alpha + \sum_n A^n Q_n\Big]^{-1}_{ij} \Psi_j(\vec{x}-\vec{Q}) \Big\{ \vec{P} - \sum_{n,n'} \vec{B}_{nn'} Q_{n'} P_n \Big\}. \tag{I4}$$

Полученное выражение является конечным пунктом в проблеме квантования вблизи классического решения на основе обобщенных координат Н.Н.Боголюбова.

Для полноты картины рассмотрим условие эрмитовости, которому должны удовлетворять операторы импульса

$$\Big[-i\frac{\partial}{\partial \varphi(x)}\Big]^+ = -i\frac{\partial}{\partial \varphi(x)}. \tag{I5}$$

Справедливость этого условия не является очевидной из полученного выражения (I4), и ее доказательство требует рассмотрения якобиана преобразования

$$J = \frac{\partial(\varphi)}{\partial(Q)} = \left|\det F\right|, \tag{I6}$$

где

$$F_k(x) = \begin{cases} F_i(x) \equiv -\alpha \Psi_i(\vec{x}-\vec{Q}) - \sum\limits_{n\geq 3} Q_n \nabla_i \Psi(\vec{x}-\vec{Q}) & i = 1,2,3. \\ \Psi_n(\vec{x}-\vec{Q}) & n > 3 . \end{cases}$$

Воспользуемся свойством детерминантов

$$\left|\det F\right|^2 = \det g,$$

где матрица

$$g_{ek} = \int d\vec{x}\, F_e(x) F_k(x) = \left|\begin{array}{c|c} \langle F_i F_j \rangle & \langle F_i, \Psi_n \rangle \\ \hline \langle \Psi_m, F_j \rangle & \delta_{mn} \end{array}\right| .$$

Матрицу g_{ek} можно представить в виде произведения

$$g = \left|\begin{array}{c|c} \langle F_i F_j \rangle & 0 \\ \hline 0 & \delta_{mn} \end{array}\right| \left(\hat{I} + \hat{c}\right), \tag{I7}$$

где I – единичная матрица, а матрица $\hat{c}$

$$\hat{c} = \left|\begin{array}{c|c} 0 & \langle F F \rangle^{-1}_{ij} \langle F_j \Psi_n \rangle \\ \hline \langle \Psi_n, F_j \rangle & 0 \end{array}\right| .$$

Воспользовавшись свойствами детерминантов, имеем

$$\det g = \det \left| \begin{array}{c:c} <F_i F_j> & 0 \\ \hdashline 0 & \delta_{mn} \end{array} \right| \det(\hat{I} + \hat{c}),$$

где

$$\det(\hat{I} + \hat{c}) = \exp \operatorname{Tr} \ln(\hat{I} + \hat{c}),$$

и, представляя логарифм в виде ряда

$$\operatorname{Tr} \ln(\hat{I} - \hat{c}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Tr} \hat{c}^{\,n}; \qquad (18)$$

получаем, что в сумму (I8) члены с нечетным n не входят, так как из-за определения $\hat{c}$

$$\operatorname{Tr} \; c^{2k+1} = 0,$$

а для четных n

$$\operatorname{Tr} \hat{c}^{\,2} = 2 \operatorname{Tr} \hat{a},$$

где a_{ij} - матрица размерности 3x3

$$a_{ij} = \sum_{i', n} <F\,F>^{-1}_{ii'} <F_{i'} \Psi_n><\Psi_n F_i>.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Tr} \ln(\hat{I} + \hat{c}) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} \operatorname{Tr} \hat{c}^{\,2k} = -\sum \frac{1}{k} \operatorname{Tr} a^{k} =$$

$$= \operatorname{Tr} \ln(\hat{I} + \hat{a}).$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (I7), получаем

$$|\det F|^2 = \det|<F_i F_j>|\det(\hat{I} + \hat{a}) =$$
$$= \det\left|<F_i F_j> - \sum_n <F_i \Psi_n><\Psi_n F_j>\right|. \qquad (19)$$

Воспользовавшись теперь условием полноты (5), уравнению (19) придаем вид

$$|\det F|^2 = \det\left|\sum_{j'} <F_i \Psi_{j'}><\Psi_{j'} F_j>\right| = \left[\det(F_i \Psi_j)\right]^2,$$

откуда находим явный вид якобиана

$$|\det F| = \det <F_i \Psi_j>, \qquad (20)$$

где

$$<F_i \Psi_j> = -\alpha\delta_{ij} + \sum Q_n <\Psi_n \nabla_j \Psi_i> = -\left[\alpha + \sum A^n Q_n\right]_{ij}.$$

Введя обозначение

$$b_{ij} = \left(\alpha + \sum_n A^n Q_n\right)_{ij},$$

легко показать, что для эрмитовости оператора импульса (15) должно удовлетворяться уравнение

$$\sum \Psi_n(\vec{x} - \vec{Q})\, b^{-1}_{\alpha\beta} A^n_{\beta\alpha} + b^{-1}_{ij}\nabla_i \Psi_j(\vec{x} - \vec{Q}) +$$
$$+ \sum \vec{B}^i_{nn'} Q_n b^{-1}_{i\alpha} A^{n'}_{\alpha\beta} b^{-1}_{\beta j} \Psi_j(\vec{x} - \vec{Q}) - b^{-1}_{ij}\Psi_j(\vec{x} - \vec{Q}) \sum B^j_{nn'} Q_n b^{-1}_{\alpha\beta} A^{n'}_{\beta\alpha} = 0. \qquad (21)$$

Если теперь воспользоваться условием полноты для Ψ_n, получим

$$\sum_{j} \Psi^{i}_{n}(\vec{x})\, \mathcal{A}^{n}_{\beta i} = -\frac{1}{x} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta}\, \mathcal{U}(\vec{x})$$

$$\sum_{j} B^{i}_{nn'} \mathcal{A}^{n'}_{\alpha\beta} = \frac{1}{x} \int d\vec{x}\, \Psi^{i}_{n}(\vec{x}) \nabla_{i} \nabla_{\beta} \nabla_{\alpha} \mathcal{U},$$

с помощью которых легко доказать справедливость уравнения (21). Таким образом, оператор (14) является эрмитовым и, следовательно, приводит к эрмитовому гамильтониану лишь при учете якобиана преобразования.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность В.А.Матвееву за постановку задачи и ценные замечания, Н.Н.Боголюбову и А.Н.Тавхелидзе за интерес к работе и полезные обсуждения. Я признателен С.И.Златеву за плодотворные дискуссии.

Литература

1. Н.Н.Боголюбов. УМЖ 1950, 2, с.3; Избр. труды, "Наукова думка", Киев, 1970, т.2;

   Солодовникова Е.П., Тавхелидзе А.Н., Хрусталев О.А. ТМФ 1972, 10, с. 162; 1972, 12, с. 164.

2. Khrustalev O.A., Razumov A.V., Taranov A.Ya. Preprint IHEP 78-65, Serpukhov 1977.

3. Jackiw R. Rev.Mod.Phys., 1977, 49, p. 681;
   L.Faddeev., Korepin V. Phys.Rep. C

4. А.В.Разумов, ТМФ 30, 18 (1977).

   А.В.Разумов, О.А.Хрусталев. ТМФ 29, 300 (1977).

Рукопись поступила в издательский отдел
4 апреля 1980 года.