объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-80-233

В.Г.Маханьков, Н.В.Махалдиани, О.К.Пашаев

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ И ИЗОТОПИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ХАББАРДА В ДЛИННОВОЛНОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Направлено в "Physics Letters"

1980

За последнее время достигнут значительный прогресс в изучении на классическом уровне интегрируемых [1] и близких к ним[2] систем нелинейных дифференциальных уравнений.

В первом случае Фаддеевым и сотрудниками[3] успешно разрабатывается также строгий квантовый вариант спектрального преобразования.

В данной работе мы обсудим свойства системы нелинейных уравнений

$$-iu_t + u_{xx} + 2(|u|^2 + \epsilon|v|^2)u = 0,$$
$$iv_t + v_{xx} + 2(|u|^2 + \epsilon|v|^2)v = 0, \qquad (1)$$

(ϵ – знаковая функция, $\epsilon = \pm 1$),

к которой сводится модифицированная модель Хаббарда в континуальном приближении (модель Линднер-Федянина[4]). Ниже мы покажем, что (1) может быть записана в форме Лэкса $iL_t = [L, A]$ как для $\epsilon = 1$, так и для $\epsilon = -1$. В первом случае задача на классическом уровне была решена Манаковым[5], на квантовом – Янгом[6] и Кулишом[7]. Мы исследуем также изотопическую структуру модели (1).

1. Чтобы выделить внутреннюю структуру исходной модели в явном виде, введем комплексный двухкомпонентный столбец

$$\Psi = \begin{pmatrix} u^*(x,t) \\ v(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_1(x,t) \\ \Psi_2(x,t) \end{pmatrix}.$$

Дираковски сопряженную величину определим следующим образом:

$$\bar{\Psi} = \Psi^+ \gamma^\circ,$$

где

$$\chi\gamma^\circ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}.$$

Вводя внутреннее произведение $(\bar\Psi\Psi)=|\Psi_1|^2+\epsilon|\Psi_2|^2$, лагранжиан модели можно переписать в виде

$$\mathcal{L}=\frac{i}{2}\left(\bar\Psi\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\frac{\partial\bar\Psi}{\partial t}\Psi\right)-\left(\frac{\partial\bar\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)+(\bar\Psi\Psi)^2 . \qquad (2)$$

Система уравнений (1) записывается при этом в единой стандартной форме уравнения Шредингера с кубической нелинейностью

$$i\Psi_t+\Psi_{xx}+2(\bar\Psi\Psi)\Psi=0. \qquad (3)$$

Нас будет интересовать случай $\epsilon=-1$, причем всегда можно будет восстановить также случай $\epsilon=+1$.

2. В терминах $\bar\Psi$ и Ψ уравнение (3) можно записать в форме Лэкса с помощью операторов

$$L=\begin{pmatrix}1-p & 0 & 0\\ 0 & 1+p & 0\\ 0 & 0 & 1+p\end{pmatrix} i\partial_x+\sqrt{1-p^2}\begin{pmatrix}0 & \bar\Psi\\ \Psi & 0\end{pmatrix}, \qquad (4)$$

$$A=p\,\partial_x^2+\begin{pmatrix}(1+p)\,\bar\Psi\Psi & \sqrt{1-p^2}\cdot i\bar\Psi_x\\ -\sqrt{1-p^2}\, i\Psi_x & -(1-p)\,\Psi\otimes\bar\Psi\end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Это означает существование у оператора L не зависящего от времени спектра λ, $Ly=\lambda y$, $y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$. Собственные функции y удовлетворяют уравнению эволюции $iy = A(y)+f(L)\,y$, где $f(L)$ может быть выбрана из соображений удобства /5/.

3. Из вида лагранжиана следует, что преобразования $\Psi'=R\Psi$, сохраняющие внутреннее произведение $(\bar\Psi\Psi)$, являются преобразованиями симметрии системы. В действительных компонентах внутреннее произведение

$$(\bar\Psi\Psi)=U_0^2+U_3^2-U_1^2-U_2^2=U_\mu^2, \qquad (6)$$
$$\mu=0,1,2,3$$

является квадратом длины вектора U_μ в четырехмерном "псевдоминковском" пространстве с метрическим тензором

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix}.$$

Тогда "псевдолоренцевские" преобразования, сохраняющие длину вектора (6) и длины векторов

$$\Psi_1^*\Psi_1=U_0^2+U_3^2=\Psi_1'^*\Psi_1',$$
$$\Psi_2^*\Psi_2=U_1^2+U_2^2=\Psi_2'^*\Psi_2', \qquad (7)$$

будут преобразованиями симметрии лагранжиана (2). Условия (7) являются следствием $U(1)\otimes U(1)$ симметрии исходной модели.

Для нахождения преобразования R рассмотрим группу SL(2,C) комплексных унимодулярных матриц второго порядка

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}, \quad \det A=\alpha\delta-\beta\gamma=1. \qquad (8)$$

Любую матрицу второго порядка можно разложить по ортогональной системе матриц σ_μ

$$\sigma_0=I,\ \ \sigma_1=\tau_1,\ \ \sigma_2=\tau_2,\ \ \sigma_3=i\tau_3,$$

где τ_i – стандартные матрицы Паули. Поставим в соответствие каждому вектору U_μ четырехмерного "псевдоминковского" пространства матрицу:

$$\hat U=\sum_{\mu=0}^{3}U_\mu\sigma_\mu=\begin{pmatrix}U_0+iU_3 & U_1-iU_2\\ U_1+iU_2 & U_0-iU_3\end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Обращая (9), можно получить компоненты вектора U_μ по формуле

$$U_\mu=\frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\hat U\sigma_\mu),\quad \mu=0,1,2,$$
$$U_3=-\frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\hat U\sigma_3). \qquad (10)$$

Определитель матрицы (9) равен квадрату длины вектора U_μ

$$\det \hat{U} = U_0^2 + U_3^2 - U_1^2 - U_2^2 = U_\mu^2 \qquad (11)$$

и не должен меняться при преобразованиях R . Так как $R \in SL(2,C)$, это условие выполняется. Действительно, если

$$\hat{U}' = A\hat{U}A^+ , \qquad (12)$$

то

$$\det \hat{U}' = \det \hat{U} ,$$

и тем самым $U_\mu'^2 = U_\mu^2$. Если теперь мы выделим из группы унимодулярных матриц подкласс, удовлетворяющий условиям (7), то получим искомые преобразования. Введем матрицы, соответствующие векторам (7)

$$\hat{U}_+ = U_0 \sigma_0 + U_3 \sigma_3 ,$$
$$\hat{U}_- = U_1 \sigma_1 + U_2 \sigma_2 ,$$

и потребуем, чтобы преобразованные по (12) матрицы имели тот же вид:

$$\hat{U}_+' = U_0' \sigma_0 + U_3' \sigma_3 ,$$
$$\hat{U}_-' = U_1' \sigma_1 + U_2' \sigma_2 .$$

Отсюда сразу получаем, что искомые матрицы преобразования имеют вид:

$$R = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}, \qquad \det R = 1 . \qquad (13)$$

Произведение двух матриц $R_1 R_2$ вида (13) имеет тот же вид. Кроме того, существует обратная матрица

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^* & -\beta \\ -\beta^* & \alpha \end{pmatrix}.$$

Тем самым матрицы R образуют трехпараметрическую группу, являющуюся подгруппой группы SL(2, C) и распадающуюся на прямое произведение:

$$U(1) \otimes SO(1,1) \otimes U(1) \sim SU(1,1). \qquad (14)$$

Можно выбрать следующее параметрическое представление матриц (13)

$$\alpha = \operatorname{ch}\theta \, e^{i\phi} ,$$
$$\beta = \operatorname{sh}\theta \, e^{i\psi} . \qquad (15)$$

Инвариантность относительно группы (14) приводит к сохранению трех токов, два из которых совпадают с уже найденными одним из авторов ранее [7]. Для получения третьего тока рассмотрим инфинитезимальное преобразование с параметрами $\phi = \psi = 0$, $\theta = \epsilon$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующее преобразование полей u^*, v имеет вид

$$u^{*\prime} = u^* + \epsilon v,$$
$$v' = v + \epsilon u^*,$$

а компоненты сохраняющегося тока $\partial_a J_a = 0$, $(a = 0,1)$

$$J_0 = i(u^* v^* - uv) ,$$
$$J_1 = u_x^* v^* + u_x v - u^* v_x^* - u v_x . \qquad (16)$$

Если рассмотреть частное решение системы (1)

$$\begin{cases} u^* = \tilde{u}^* \\ v = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u^* = 0 \\ v = \tilde{v} , \end{cases} \qquad (17)$$

то, используя преобразования R, можно построить целый класс решений той же системы. Но (17) являются решениями однокомпонентного нелинейного уравнения Шредингера, и тем самым весь набор решений последнего можно использовать для построения решений системы (1).

В частности, полагая $\tilde{u}^* = a e^{-i\theta_u} \operatorname{sech} ax$, или $v = b e^{i\theta_v} \operatorname{th} bx$, получим

$$\begin{cases} u = \alpha a e^{i\theta_u} \operatorname{sech} ax \\ v = \beta a e^{-i\theta_u} \operatorname{sech} ax \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u = \beta b e^{-i\theta_v} \operatorname{th} bx \\ v = \alpha b e^{i\theta_v} \operatorname{th} bx \end{cases} \tag{18}$$

и т.д.

В работе /7/ были найдены и подробно обсуждались три пары нетривиальных решений системы (1):

$$1) \begin{cases} u_1 = a e^{-i\theta_1} \operatorname{sech} \kappa_1 \xi, & \theta_1 = \frac{c}{2} x - \omega\ t, \quad \omega_1 = \frac{c^2}{4} - \kappa_1^2 \\ v_1 = b e^{i\theta_1} \operatorname{sech} \kappa_1 \xi, & \kappa_1^2 = a^2 - b^2 > 0, \quad \xi = x - ct, \end{cases} \tag{19}$$

$$2) \begin{cases} u_2 = a e^{-i\theta_2} \operatorname{th} \kappa_2 \xi, & \theta_2 = \frac{c}{2} x - \omega_2 t, \quad \omega_2 = \frac{c^2}{4} + 2\kappa_2^2 \\ v_2 = b e^{i\theta_2} \operatorname{th} \kappa_2 \xi, & \kappa_2^2 = b^2 - a^2 > 0 \end{cases} \tag{20}$$

$$3) \begin{cases} u_3 = a e^{-i\theta_u} \operatorname{sech} \kappa_3 \xi, & \theta_i = \frac{c}{2} x - \omega_i t, \quad \omega_u = \frac{c^2}{4} - a^2 + b^2 \\ v_2 = b e^{i\theta_v} \operatorname{th} \kappa_3 \xi, & \omega_v = \frac{c^2}{4} + 2b^2, \quad \kappa_3^2 = a^2 + b^2. \end{cases} \tag{21}$$

Нетрудно видеть, что решения (18) являются частным случаем решений (19) и (20) соответственно.

Действительно, $\kappa_1^2 = a^2 - b^2 = \alpha^2 a^2 - \beta^2 a^2 = a^2$ аналогично $\kappa_2^2 = b^2 - a^2 = b^2(\alpha^2 - \beta^2) = b^2$.

Однако смешанные решения вида (21) уже нельзя получить с помощью изопреобразования (13) из решений однокомпонентных уравнений S3 . Это означает, что преобразование (13) позволяет получить, исходя из (18), в отличие, например, от преобразований Беклунда, хотя и весьма богатый, но все же лишь подкласс решений из всего множества решений системы (1). Тем не менее, изопреобразование (13) может привести к весьма нетривиальному результату. Применяя его к (21), легко получим

$$\begin{aligned} u_3' &= \alpha a e^{-i\theta_u} \operatorname{sech} \kappa \xi + \beta b e^{-i\theta_v} \operatorname{th} \kappa \xi, \\ v_3' &= \beta a e^{i\theta_u} \operatorname{sech} \kappa \xi + \alpha b e^{i\theta_v} \operatorname{th} \kappa \xi. \end{aligned} \tag{22}$$

Как ни странно на первый взгляд, это означает, что своеобразная суперпозиция решений также является решением системы нелинейных уравнений, т.е. преобразование (13) как бы линеаризует систему (1).

Вычисляя по (22) "плотность вероятности", например, $|u_3'|^2$, находим

$$|u_3'|^2 = \alpha^2 a^2 \operatorname{sech}^2 \kappa \xi + \beta^2 b^2 \operatorname{th}^2 \kappa \xi + ab\alpha\beta \operatorname{sech} \kappa \xi \operatorname{th} \kappa \xi \cos(\kappa^2 t),$$

осциллирующую во времени функцию, соответствующую решениям бионного типа (т.е. связанным состояниям).

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.Е. и др. Теория солитонов. Метод обратной задачи. "Наука", М., 1980.
2. Makhankov V.G. Phys.Rep. 1978, 35, p.1-128.
3. Фаддеев Л.Д. В сб. "Проблемы квантовой теории поля". ОИЯИ, Р2-12462, Дубна, 1979, с.249-299.
   Faddeev L., Korepin V.Phys.Rep.,1978,42,p.1-87.
4. Lindner U., Fedyanin V. phys.stat.sol.(b), 1978, 89, p.123.
5. Манаков С.В. ЖЭТФ, 1973, 65, с.505.
6. Yang C.Phys.Rev.Lett.,1967, 19, p.1312.
7. Кулиш П.П. Препринт ЛОМИ, Р-3-79, Л., 1979.
8. Маханьков В.Г. ОИЯИ, Е2-80214, Дубна, 1980.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 марта 1980 года.