сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

12/V-80

2009/2-80

P2-80-20

В.Н.Стрельцов

О РЕЛЯТИВИСТСКИ ВРАЩАЮЩИХСЯ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

1980

P2-80-20

Стрельцов В.Н.

О релятивистски вращающихся системах отсчета

Рассмотрены общие преобразования для дифференциалов координат, описывающие переход к релятивистски вращающейся системе отсчета. Получены выражения для метрического тензора и символов Кристоффеля, релятивистские уравнения вращательного движения, а также специальные преобразования для электромагнитных величин. На основе рассмотрения поведения вращающихся часов и масштабов показано, что скорость света во вращающейся системе отсчета определяется фактически обычной величиной c.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1980

P2-80-20

Strel'tsov V.N.

On Relativistically Rotating Reference Frames

Существует достаточно обширный круг статей, посвященный релятивистскому описанию вращательного движения. Мы отсылаем читателя к двум сравнительно недавним работам [1,2]/см. также [3]/, где можно найти библиографию по данному вопросу.

Ниже в рамках нашего подхода, основанного на введенных прежде тангенциальных преобразованиях [5] и отличающегося от других известных попыток описания релятивистского вращения, мы рассмотрим общий случай перехода к релятивистски вращающимся системам отсчета.

1. СИЛЫ ИНЕРЦИИ

Ранее были рассмотрены релятивистские преобразования для координат [4,5]

$$t = (t' - \omega r^2 c^{-2} \phi')\gamma, \quad \phi = (\phi' - \omega t')\gamma,$$
$$r = r' = \mathrm{const}, \quad z = z' = \mathrm{const}, \qquad /1/$$

где $\gamma = (1 - \omega^2 r^2 c^{-2})^{-1/2}$,

описывающие переход от инерциальной K-системы к неинерциальной K'-системе, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси z', совпадающей с осью z K-системы. По-прежнему для наглядности мы будем представлять себе K'-систему в виде диска /радиуса R/, лежащего в плоскости (x, y), и поэтому, в частности, будем иметь $dz = dz'$, в связи с чем далее координату $z(z')$ будем зачастую опускать.

Преобразования /1/ обеспечивают форм- или лоренц-инвариантность элементарного интервала $c\,d\tau$, квадрат которого в цилиндрической системе координат имеет вид

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 . \qquad /2/$$

Последний результат напоминает фактически переход от одной инерциальной системы отсчета к другой в рамках специальной теории относительности. Существенное отличие, однако, заключается в том, что в данном случае переход к K'-системе связан с появлением сил инерции. Таким образом, если в специальной теории относительности в одной системе отсчета для свободного движения релятивистская сила

$$m\frac{du^i}{d\tau} = 0, \qquad /3/$$

где $u^i = dx^i/d\tau$ – 4-скорость, то и во всех других системах отсчета сила также равна нулю.

Поскольку в рассматриваемом случае это не так, то уравнение свободного движения /3/ в криволинейных координатах должно быть заменено уравнением

$$m\frac{Du^i}{d\tau} = 0, \qquad /4/$$

где Du^i – ковариантный или абсолютный дифференциал или иначе

$$m\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + m\Gamma^i_{k\ell}\frac{dx^k}{d\tau}\cdot\frac{dx^\ell}{d\tau} = 0, \qquad /5/$$

где $\Gamma^i_{k\ell}$ – символы Кристоффеля.

На основании формулы

$$\Gamma^i_{k\ell} = \frac{1}{2}g^{im}(g_{mk,\ell} + g_{m\ell,k} - g_{k\ell,m}), \qquad /6/$$

где $g_{mk,\ell} = \partial g_{mk}/\partial x^\ell$, выражающей $\Gamma^i_{k\ell}$ через метрический тензор g_{ik}, в случае элементарного интервала /2/ будем иметь две отличные от нуля компоненты*:

$$\Gamma^1_{22} = -r \quad \text{и} \quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}. \qquad /7/$$

Отсюда вытекает, что на вращающуюся частицу массы m на самом деле действует центробежная сила

$$m\frac{d^2r}{d\tau^2} = mr\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2. \qquad /8/$$

Что касается кориолисовой силы, то ее релятивистское выражение будет определяться второй величиной Γ^2_{12}:

$$m\frac{d^2\phi}{d\tau^2} = -\frac{2}{r}\cdot\frac{dr}{d\tau}\cdot\frac{d\phi}{d\tau}. \qquad /9/$$

---

*Здесь $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \phi$, $x^3 = z$.

В случае $\tau = t$ /8/ и /9/ переходят, очевидно, в известные нерелятивистские выражения.

2. ОБЩИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Рассмотрим общие преобразования для дифференциалов координат, когда $dr \neq 0$. На основании /1/ при этом будем иметь

$$dt = (dt' - \omega r'^2c^{-2}d\phi' - \omega r'c^{-2}\phi' dr')\gamma + \omega r'c^{-2}(\omega t' - \phi')dr'\gamma^3,$$

$$d\phi = (d\phi' - \omega dt')\gamma + \omega^2 r'c^{-2}(\phi' - \omega t')dr'\gamma^3, \qquad /10/$$

$$dr = dr'.$$

Подставив /10/ в выражение /2/ для квадрата интервала и опуская штрихи, получим

$$c^2d\tau^2 = c^2dt^2 + 2\omega r(\omega t - 2\phi)\gamma^2 dt\,dr +$$

$$+\{-1 + \omega^2r^2c^{-2}[(\omega t - 2\phi)^2 - \omega^2r^2c^{-2}\phi^2]\gamma^4\}dr^2 + \qquad /11/$$

$$+ 2\omega^2r^3c^{-2}\phi\gamma^2 dr\,d\phi - r^2d\phi^2 - dz^2 \;{}^*.$$

Последнее выражение определяет собою ковариантный метрический тензор в общем случае. При этом детерминант, составленный из компонент g_{ik}, дается величиной

$$|g| = |g_{ik}| = -c^2r^2. \qquad /12/$$

На основании известного равенства

$$g_{ik}g^{k\ell} = \delta^\ell_i$$

можно вычислить контравариантный метрический тензор. Его неравные нулю компоненты будут иметь вид $(c = 1)$

$$g^{00} = 1 - \omega^2r^2(\omega t - 2\phi)^2\gamma^4,\; g^{01} = \omega r(\omega t - 2\phi)\gamma^2,\; g^{02} = \omega^3r^2\phi\gamma^4,$$

$$g^{11} = -1,\; g^{12} = -\omega^2r\phi\gamma^2,\; g^{22} = -\frac{1}{r^2} - \omega^4r^2\phi^2\gamma^4,\; g^{33} = -1. \qquad /13/$$

---

* Может показаться, что метрика меняется в результате замены $t \to -t$ и/или/ $\phi \to -\phi$. Однако при этом необходимо учитывать, что угловая скорость также зависит от ϕ и t $(\omega = d\phi/dt)$.

Привлекая снова /6/, получим общие выражения для символов Кристоффеля, которые полностью приведены в приложении. Здесь же мы выпишем только те величины $\Gamma^{i}_{k\ell}$, которые не равны нулю в случае $t = \phi = 0$:

$$\Gamma^{0}_{12} = -\omega r \gamma^{2}, \quad \Gamma^{1}_{00} = -\omega^{2} r \gamma^{2}, \quad \Gamma^{1}_{02} = \omega r \gamma^{2},$$
$$\Gamma^{1}_{22} = -r \gamma^{2}, \quad \Gamma^{2}_{01} = -\frac{\omega}{r} \gamma^{2}, \quad \Gamma^{2}_{12} = \frac{1}{r}. \qquad /14/$$

3. СКОРОСТЬ СВЕТА. ВРАЩАЮЩИЕСЯ ЧАСЫ И МАСШТАБЫ

Ранее было показано, что тангенциальная скорость света в релятивистски вращающейся системе отсчета определяется обычным значением c. Что касается соответствующей радиальной скорости c_r, то для ее определения воспользуемся выражением /11/. Полагая $d\tau^{2} = 0$ и разрешая полученное уравнение при условии $d\phi = 0$, найдем

$$c_r = \pm c[(1 + \omega^{4} r^{4} c^{-4} \phi^{2} \gamma^{4})^{1/2} \mp \omega r c^{-1} (\omega t - 2\phi) \gamma^{2}]^{-1}. \qquad /15/$$

Таким образом, оказывается, что /скажем, для $\omega t < 2\phi$ / в направлении радиуса $c_r < c$, а в обратном направлении $|c_r|$ может принимать значения, большие c. С другой стороны, легко видеть, что в случае $t = \phi = 0$ $|c_r| = c$ как в том, так и в другом направлениях. На первый взгляд, кажется очень странным то, что величина c_r, как и исходный интервал /11/, зависит от времени t и угла ϕ. Здесь, однако, необходимо обратить внимание на следующее. Дело в том, что часы, находящиеся на разных расстояниях от центра диска, имеют разные линейные скорости, а поэтому идут по-разному. Будучи синхронизованными в некоторый момент, они в дальнейшем утрачивают это свойство. Причем рассинхронизация возрастает со временем. Чтобы пояснить это, обратимся к простому примеру. Рассмотрим две /плоские/ инерциальные системы отсчета K и K'. При этом K'-система движется со скоростью $v_x = v$ относительно K, причем ось x' K'-системы параллельно сдвинута относительно оси x на величину $\Delta y = r$. Вдоль координатных осей указанных систем размещен целый ряд синхронизованных стандартным образом часов. Пусть в момент времени $t_1 (r = 0) = -r/c$ по часам, расположенным в начале координат K-системы, в направлении оси $y(y')$ посылается световой сигнал. Через время $\Delta t = r/c$ он достигает некоторых часов K'-системы, расположенных, скажем, в начале ее координат. Пусть при этом для простоты отмеченные часы показывают то же время, что и находящиеся вблизи часы K-системы, т.е. $t'_2(r) = 0$.

Таким образом, время распространения светового сигнала в данном случае будет составлять $\Delta t = t'_2(r) - t_1(0) = r/c$, а скорость светового сигнала $r/\Delta t = c$.

Пусть далее через время t после посылки первого сигнала, т.е. в момент времени $t_3(0) = t - r/c$, точно так же отправляется второй сигнал. Этот сигнал достигает точки с координатами $x = 0$, $y = r$ в момент времени t. Однако соответствующие /расположенные вблизи/ часы K'-системы будут показывать при этом время $t'_4(r) = t/\sqrt{1 - v^{2}/c^{2}}$. Поэтому в этом случае искомый промежуток времени будет составлять

$$\Delta t = t'_4(r) - t_3(0) = \frac{r}{c} + t\gamma - t,$$

а скорость света c_r будет не равна $c (c_r < c)$ и, что самое главное, зависеть от времени t:

$$c_r \simeq c\left(1 + \frac{t v^{2}}{2 r c}\right)^{-1}.$$

Что касается зависимости от угла ϕ, то здесь следует учесть, что в принципе длина дуги или цепочки уложенных вдоль нее масштабов может быть измерена с помощью радиолокационного метода. Однако, поскольку часы, расположенные на разных расстояниях от начала координат $r = 0$, идут по-разному, дуги, соответствующие одинаковым временным интервалам, будут иметь разную длину. Причем это отличие будет тем больше, чем больше измеряемая дуга и величина Δr.

Таким образом, зависимость от t (и ϕ) интервала /11/ или вычисленной скорости света /15/ обусловлена тем, что часы, расположенные на разных расстояниях от центра вращающейся системы отсчета, идут по-разному. Фактически их можно считать синхронизованными только в один момент времени, скажем, $t = 0$. В этом случае /при условии, что $\phi = 0$ также/ скорость света и в K'-системе будет определяться обычной величиной c, а все величины будут описываться выражениями, имеющими наиболее ясный физический смысл.

4. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Используя полученные выше величины $\Gamma^{i}_{k\ell}$ /14/, на основании /5/ для релятивистских уравнений движения во вращающейся системе отсчета будем иметь

$$m \frac{d^{2} r}{d\tau^{2}} = m r \left[\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^{2} - 2\omega \frac{dt}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} + \omega^{2} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{2}\right] \gamma^{2},$$

$$m\frac{d^2\phi}{d\tau^2} = -2\frac{m}{r}\frac{dr}{d\tau}\left(\frac{d\phi}{d\tau} - \omega\frac{dt}{d\tau}\gamma^2\right),$$

$$m\frac{d^2t}{d\tau^2} = 2m\omega r\frac{dr}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau}\gamma^2. \qquad /16/$$

На основе /16/ можно также получить обычные нерелятивистские выражения, полагая, например, $d\phi/d\tau = 0$ и $dt/d\tau$, $\gamma = 1$.

5. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН

Опираясь на специальные преобразования /1/, можно получить формулы, преобразованные для любых тензорных величин. В частности, для напряженностей электромагнитного поля будем иметь

$$E'_\phi = E_\phi,\ E'_r = (E_r - \frac{\omega r}{c}H_z)\gamma,\quad E'_z = (E_z + \frac{\omega r}{c}H_r)\gamma,$$

$$H'_\phi = H_\phi,\ H'_r = (H_r + \frac{\omega r}{c}E_z)\gamma,\quad H'_z = (H_z - \frac{\omega r}{c}E_r)\gamma. \qquad /17/$$

В случае медленного /галилеевского/ вращения, скажем, постоянного цилиндрического магнита, ориентированного вдоль оси z, на основании второй формулы /17/ получим, что результатом вращения будет возникновение радиального электрического поля

$$E_r = \frac{\omega r}{c}H_z. \qquad /17'/$$

Последнее выражение может служить основой естественного объяснения известного явления униполярной индукции. С другой стороны, для плотности зарядов (ρ) и тока (j_ϕ),* текущего, к примеру, по кольцевому проводнику радиуса R, будем иметь

$$\rho_- = (\rho'_- - \omega R^2 c^{-2} j'_\phi)\gamma,\quad j_\phi = (j'_\phi - \omega\rho'_-)\gamma \qquad /18/$$

или, в частности,

$$\rho_- = \rho'_-\gamma,\quad -j_\phi = \omega\rho'_-\gamma. \qquad /18'/$$

*Вызываемого вращающимися электрическими зарядами.

Пусть при этом плотность положительных зарядов в указанном проводнике равна плотности электронов проводимости, т.е. $\rho_+ = -\rho_-$. Тогда суммарная плотность составит

$$\rho_1 = \rho_- + \rho_+ = 0,$$

т.е. кольцо будет электронейтральным. На основании первой формулы /18'/, описывающей связь плотностей вращающихся и покоящихся зарядов, можно заключить, что после затухания тока в кольце плотность электронов будет определяться величиной ρ'_-. При этом суммарная плотность уже не будет равна нулю, а составит

$$\rho_2 = \rho'_- + \rho_+ = \rho'_-(1-\gamma) \simeq \rho'_-\frac{1}{2}\frac{\omega^2 r^2}{c^2} = \frac{1}{2}\rho'_-\frac{v^2}{c^2}, \qquad /19/$$

где $v = \omega r$ - дрейфовая скорость электронов. Предварительные результаты подобного опыта /6/, по-видимому, говорят в пользу последнего вывода.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, описание релятивистского вращательного движения требует использования неевклидовой геометрии. При этом в рамках указанной геометрии на основе абсолютного дифференциального исчисления устраняется "фиктивность" сил инерции. Они возникают "естественным путем" в уравнениях движения. Опираясь на введенные ниже тангенциальные преобразования, мы рассмотрели общие преобразования для дифференциалов координат. При этом были получены выражения для метрического тензора и символов Кристоффеля, а на их основе - релятивистские уравнения вращательного движения. В результате рассмотрения поведения вращающихся часов и масштабов показано, что скорость света во вращающейся системе отсчета определяется фактически обычной величиной c. Получены также специальные преобразования для электромагнитных величин.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Общие выражения для символов Кристоффеля

$$\Gamma^0_{00} = \omega^3 r^2\Omega_1\gamma^4,\quad \Gamma^0_{01} = \omega^4 r^3\Omega_1\Omega_2\gamma^6,$$

$$\Gamma^0_{02} = -\omega^2 r^2\Omega_1\gamma^4,\quad \Gamma^0_{11} = \omega\Omega_1\gamma^4(1 - 2\omega^4 r^4\phi^2 + 2\Omega_2 + \phi\gamma^{-2}),$$

$$\Gamma^0_{12} = -\omega r\gamma^2 - \omega^3 r^3\Omega_1(\Omega_2 + \omega^2 r^2\phi)\gamma^6,\quad \Gamma^0_{22} = \omega r^2\Omega_1\gamma^4,$$

$$\Gamma^1_{00} = -\omega^2 r\gamma^2, \quad \Gamma^1_{01} = -\omega^3 r^2 \Omega_2 \gamma^4, \quad \Gamma^1_{02} = \omega r \gamma^2,$$

$$\Gamma^1_{11} = -\omega^4 r^3 (\omega^2 t^2 + \phi^2)\gamma^6, \quad \Gamma^1_{12} = \omega^2 r^2 \Omega_2 \gamma^2, \quad \Gamma^1_{22} = -r\gamma^2,$$

$$\Gamma^2_{00} = -\omega^4 r^2 \phi \gamma^4, \quad \Gamma^2_{01} = -\frac{\omega}{r}\gamma^2 - \omega^5 r^3 \phi \Omega_2 \gamma^6,$$

$$\Gamma^2_{02} = \omega^3 r^2 \phi \gamma^4, \quad \Gamma^2_{11} = -\omega^2 (2\omega t - \phi)\gamma^4 - \omega^6 r^4 \phi \Omega_2^2 \gamma^8,$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{r} + \omega^4 r^3 \phi \Omega_2 \gamma^6, \quad \Gamma^2_{22} = -\omega^2 r^2 \phi \gamma^4,$$

где $\Omega_1 = \omega t - 2\phi, \quad \Omega_2 = \omega t - \phi, \quad c = 1.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Grøn Ø. Amer. J. Phys., 1975, 43, p.869.
2. Browne P.F. J.Phys.A: Math.Gen., 1977, 10, p.727.
3. Ashworth D.G., Davies P.A. J.Phys.A: Math.Gen., 1979, 12, p.1425.
4. Strauss M. Int. J.Theor.Phys., 1974, 11, p.107.
5. Стрельцов В.Н. ОИЯИ, Р2-11385, Дубна, 1978.
6. Гончаров И.Н. ОИЯИ, Р13-6397, Дубна, 1972.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 января 1980 года.