4

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

1771/2-80

21/4-80

Р2-80-16

О.К.Пашаев

КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И"СКРЫТАЯ" СИММЕТРИЯ БОЗЕ-ФЕРМИ СИСТЕМЫ

Направлено в "Physica D"

1980

Пашаев О.К. Р2-80-16

Классические решения и "скрытая" симметрия бозе-ферми системы

Рассмотрены необходимые условия существования инстантонов для моделей взаимодействующих скалярного и спинорного полей. Найдены ограничения на полевые конфигурации, при которых модель суперсимметрична. Используя суперсимметричный анзатц, систему нелинейных классических уравнений удается свести к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, которое легко интегрируется. Классическое действие найденных решений оказывается ниже границы Соболева для чисто скалярных решений, а "улучшенный" тензор энергии-импульса обращается в нуль.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1980

Pashaev O.K. P2-80-16

В последнее время определенный интерес вызывают решения классических уравнений конформных теорий поля, имеющие высокую степень симметрии. Интерпретируемые как вакуумное среднее квантованных полей, они позволяют рассматривать эффекты спонтанного нарушения некоторых симметрий /1/. Для чисто бозонных теорий решения такого типа были найдены в скалярных теориях /1/, в теории Янга-Миллса /2/ и гравитации /3/. Возможность учета фермионов на классическом уровне представляет также значительный интерес. Нетривиальные решения с фермионами в линейной σ - модели рассматривались в /4/, а для чисто фермионных моделей - в /5/. Каноническое квантование σ -модели рассматривалось в /6/ и имеет ряд интересных свойств. Так, для сохранения фермионного числа отношение констант связи бозонного и бозон-фермионного взаимодействий должно быть фиксировано, а спектр квантовых флуктуаций не содержит нулевых мод фермионов.

В данной работе исследуются классические решения такого типа теорий. В первой части сформулированы необходимые условия существования инстантонных решений для довольно широкого класса теорий взаимодействующих скалярного и спинорного полей. Показано, что необходимым условием существования инстантонов для перенормируемых взаимодействий является отсутствие массовых членов для обоих полей. Во второй части исследуются ограничения на пространство полевых конфигураций, при которых лагранжиан инвариантен относительно преобразований суперсимметрии. При этом оказывается возможным свести систему классических нелинейных уравнений к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, которое легко интегрируется в элементарных функциях, благодаря отмеченной выше симметрии теории. Найденные решения совпадают со скалярно-спинорным инстантоном /4/.

В третьей части рассмотрены классическое действие и "улучшенный" тензор энергии-импульса для найденных решений. Показано, что действие оказывается ниже границы Соболева, ограничивающей снизу действие для чисто скалярных решений, а улучшенный тензор энергии-импульса обращается в нуль.

Это позволяет интерпретировать такие решения как вакуумные конфигурации, которые, имея меньшее действие, могут оказаться при квантовании более важными, чем чисто скалярные решения.

В заключение приводится краткое обсуждение основных результатов.

1. Необходимые условия существования инстантонов

Рассмотрим модель взаимодействующих действительного скалярного и спинорного полей в евклидовом пространстве произвольной размерности D с лагранжианом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{N}\varphi^N + \psi^+ i\hat{\partial}\psi + g\psi^+\psi\varphi^\ell + \mu\psi^+\psi + \frac{\varkappa}{n}(\psi^+\psi)^n . \qquad /1.1/$$

Объединенный институт ядерных исследований БИБЛИОТЕКА

Вводя обозначения:

$$T_1 = \int \psi^+ i \not\partial \psi \, d^D x \quad , \qquad U_2 = \frac{m^2}{2} \int \varphi^2 \, d^D x \quad ,$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \int (\partial_\mu \varphi)^2 \, d^D x \quad , \qquad U_N = \frac{\lambda}{N} \int \varphi^N \, d^D x \quad ,$$

$$V = g \int \psi^+ \psi \varphi^\ell \, d^D x \, , \qquad W_1 = \mu \int \psi^+ \psi \, d^D x \quad ,$$

$$W_n = \frac{\varkappa}{n} \int (\psi^+ \psi)^n d^D x \quad ,$$

запишем действие для модели /1.1./:

$$S = T_2 + U_2 + U_N + T_1 + V + W_1 + W_n \; .$$

Если $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$ являются решениями классических уравнений, то действие должно быть экстремально на семействе функций [7]:

а/ $\quad \tilde{\varphi}_{(\rho)} = \tilde{\varphi}(\rho x) \, , \quad \tilde{\psi}_{(\rho)} = \tilde{\psi}(\rho x) \, ,$

б/ $\quad \tilde{\varphi}_{(\rho)} = \rho^\alpha \tilde{\varphi}(x) \, , \quad \tilde{\psi}_{(\rho)} = \rho^\beta \tilde{\psi}(x)$

при $\rho = 1$, т.е.

$$\left. \frac{d S_{(\rho)}}{d \rho} \right|_{\rho = 1} = 0 \; .$$

Отсюда получаем три соотношения:

$$(2-D) T_2 + (1-D) T_1 - D (U_2 + U_N + V + W_1 + W_n) = 0, \qquad /1.2/$$

$$T_2 + U_2 + N/2 \; U_N + \ell/2 \; V = 0, \qquad /1.3/$$

$$T_1 + V + W_1 + n W_n = 0. \qquad /1.4/$$

Исключая T_1 и T_2 из уравнення /1.2/, получим необходимое условие существования инстантонов:

$$U_2 = \Big[D/2 \big((D-2)/2D \; N - 1 \big) U_N + D/2 \big((D-1)/D \; n - 1 \big) W_n + 1/2 \big((D-2)/2 \; \ell - 1 \big) V - 1/2 \; W_1 \Big] \geqq 0 \; . \qquad /1.5/$$

Для ренормируемых теорий константы λ, g и $\varkappa$ должны быть безразмерными. Для этого необходимо, чтобы

$$N = 2D/D-2 \quad , \quad \ell = 2/D-2 \quad , \quad n = D/D-1 \quad .$$

Тогда из /1.5/ следует, что

$$U_2 = 0 = W_1 \quad .$$

Таким образом, существование инстантонов в ренормируемых теориях /1.1/ возможно лишь при отсутствии массовых членов.

Мы не будем рассматривать случая $D = 2$ и поэтому положим

$$W_n = 0,$$

так как $n = D/_{D-1}$ будет целым числом только при $D = 2$ или $D \to \infty$. /ж/

Из условия /1.3/ получим

$$N/2 \; U_N + \ell/2 \; V \leqq 0 \; .$$

Отсюда следует, что инстантоны в модели с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{\lambda}{N} \varphi^N + \psi^+ i \not\partial \psi + g \psi^+ \psi \varphi^\ell \qquad /1.6/$$

могут существовать в трех случаях:

а/ $\quad \lambda < 0 \; , \; g > 0 \; ,$

б/ $\quad \lambda > 0 \; , \; g < 0 \; , \qquad /1.7/$

в/ $\quad \lambda < 0 \; , \; g < 0 \; ,$

если

$$\int \varphi^N d^D x > 0 \quad , \quad \int \psi^+ \psi \varphi^\ell d^D x > 0 \quad .$$

Легко видеть, что решения для случаев б/ и в/ можно получить простым преобразованием параметров из а/, и поэтому можно ограничиться изучением случая а/.

2. Суперсимметричный анзатц и инстантоны

Рассмотрим лагранжиан /1.6/ для случая /1.7а/, предварительно заменив $\lambda \to -\lambda$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{\lambda}{N} \varphi^N + \psi^+ i \not\partial \psi + g \psi^+ \psi \varphi^\ell . \qquad /2.1/$$

Соответствующие классические уравнения поля имеют следующий вид:

$$\Box \varphi + \lambda \varphi^{N-1} = \ell g \varphi^{\ell - 1} \psi^+ \psi \; , \qquad /2.2/$$

$$(i \not\partial + g \varphi^\ell) \psi = 0 \quad . \qquad /2.3/$$

/ж/ - решения для чисто фермионной модели при $D = 2$ были получены в работе [5]. Для произвольного D $\tilde{\psi}(x)$ из /2.16/ будет решением при замене $\varkappa = g/(\lambda/g\ell - 2g/N\ell)^{1/(D-1)}$, Чтобы упростить нахождение решения для этой системы, удобно наложить некие ограничения на полевые конфигурации и параметры системы, при которых в уравнениях появляется дополнительная симметрия [8]. Так, если рассмотреть преобразования, смешивающие бозонные и фермионные поля

$$\delta\varphi = \delta\varphi(\varphi, \psi, \psi^+),$$
$$\delta\psi = \delta\psi(\varphi), \qquad /2.4/$$
$$\delta\psi^+ = \delta\psi^+(\varphi),$$

то наложением связей

$$F_i[\varphi, \psi, \psi^+] = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, p \qquad /2.5/$$

можно обратить вариацию лагранжиана в нуль:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi}\delta\varphi(\varphi,\psi,\psi^+) + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi}\delta\psi(\varphi) + \delta\psi^+(\varphi)\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi^+} = 0.$$

Тогда, зная какое-либо частное решение уравнений поля, удовлетворяющее условию /2.5/, можно построить целый класс решений, удовлетворяющих тому же условию.

Выберем преобразования /2.4/ в суперсимметричной форме:

$$\delta\varphi = i\epsilon^+\psi - i\psi^+\epsilon,$$
$$\delta\psi = (-\partial\!\!\!/\varphi - i\beta\varphi^{N/2})\epsilon, \qquad /2.6/$$
$$\delta\psi^+ = \epsilon^+(-\partial\!\!\!/\varphi + i\beta\varphi^{N/2}),$$

где ϵ, ϵ^+ – дираковские спинорные параметры преобразования /не являющиеся антикоммутирующими величинами/, β подлежит определению.

Вариация лагранжиана при этом будет равна

$$\delta\mathcal{L} = (\beta N/2 - g)\varphi^{\ell}[\epsilon^+(\partial\!\!\!/\varphi)\psi + \psi^+(\partial\!\!\!/\varphi)\epsilon]$$
$$+ (\beta g - \lambda)\varphi^{N-1}[i\epsilon^+\psi - i\psi^+\epsilon] \qquad /2.7/$$
$$+ g\ell\,\psi^+\psi\,\varphi^{\ell-1}[i\epsilon^+\psi - i\psi^+\epsilon].$$

Рассмотрим два случая выбора связей /2.5/.

Случай 1. Допустим, что

$$\beta N/2 = g,$$
$$\beta g = \lambda$$

и, следовательно,

$$\lambda/g^2 = (D-2)/D. \qquad /2.8/$$

Тогда для того, чтобы обратить вариацию лагранжиана /2.7/ в нуль, необходимо наложить условие

$$\psi^+(x)\psi(x) = 0. \qquad /2.9/$$

Это значит, что в данном случае фермионы не могут быть источником бозонного поля. При этом система /2.2/ переходит в

$$\Box\varphi + g^2 2/N\,\varphi^{N-1} = 0, \qquad /2.10а/$$

$$(i\partial\!\!\!/ + g\varphi^{\ell})\psi = 0. \qquad /2.10б/$$

Если $\varphi_0(x) \neq 0$, $\psi_0(x) = 0$ – решения системы /2.10/, то преобразование /2.6/ примет вид

$$\delta\varphi = i\epsilon^+\psi_0 - i\psi_0^+\epsilon = 0,$$
$$\delta\psi = (-\partial\!\!\!/\varphi_0 - ig\,2/N\,\varphi_0^{N/2})\epsilon,$$
$$\delta\psi^+ = \epsilon^+(-\partial\!\!\!/\varphi_0 + ig\,2/N\,\varphi_0^{N/2}),$$

где $(\epsilon^+\epsilon) = 0$,

а новые решения:

$$\tilde\varphi(x) = \varphi_0(x),$$
$$\tilde\psi(x) = \mu(-\partial\!\!\!/\varphi_0 - ig\,2/N\,\varphi_0^{N/2})\epsilon,$$
$$\tilde\psi^+(x) = \epsilon^+\mu(-\partial\!\!\!/\varphi_0 + ig\,2/N\,\varphi_0^{N/2}),$$

где μ – произвольное число.

Таким образом, для полевых конфигураций, удовлетворяющих условию /2.9/, необходимым условием существования суперсимметрии является отношение констант связи /2.8/ [9].

Случай 2. Допустим, что

$$\beta N/2 = g, \qquad /2.11/$$

а на конфигурации полей наложено ограничение:

$$\psi^+(x)\psi(x) = g/\ell\,(\lambda/g^2 - 2/N)\,\varphi(x)^{N-\ell}. \qquad /2.12/$$

Тогда в /2.7/ второй и третий члены взаимно сокращаются и $\delta\mathcal{L} = 0$. Система уравнений /2.2/, /2.3/ при этом опять переходит в /2.10/ и, хотя теперь $\psi^+(x)\psi(x) \neq 0$, оно компенсируется самодействием бозонного поля /т.к. $\beta g \neq \lambda$/ соответственно связи /2.12/.

Пусть $\tilde\varphi(x)$ - решение уравнения /2.10а/. Тогда из /2.12/ следует, что решение уравнения /2.10б/ - $\tilde\Psi(\tilde\varphi)\neq 0$. С другой стороны, легко видеть, что

$$\delta\Psi(\tilde\varphi)=(-\not\partial\tilde\varphi-ig\,{}^{2}/_{N}\,\tilde\varphi^{N/2})\epsilon \qquad /2.13/$$

также является решением уравнения /2.10б/ для произвольного ϵ. Предположим теперь, что

$$\tilde\Psi(\tilde\varphi)=\delta\Psi(\tilde\varphi),$$

при этом, как легко видеть из /2.10б/ и /2.13/, $\tilde\varphi(x)$ удовлетворяет /2.10а/.

Подставив /2.13/ в /2.12/, получим уравнение для поля $\tilde\varphi(x)$:

$$\left[(\partial\tilde\varphi)^2+g^2\,{}^{4}/_{N^2}\,\tilde\varphi^N\right]\epsilon^+\epsilon=g/_{\ell}\left(\lambda/_{g^2}-{}^{2}/_{N}\right)\tilde\varphi^{N-\ell}.$$

Заметим, что пространство функций, являющихся решениями уравнения /2.10а/, сужается.

Полагая $\epsilon=\mu\xi$, где ξ - нормированный на единицу дираковский спинор, получим для $\tilde\varphi(x)$ дифференциальное уравнение первого порядка:

$$(\partial\tilde\varphi)^2=a\tilde\varphi^{N-\ell}-b^2\tilde\varphi^N,$$

где $a={}^{g}/_{\ell\mu^2}\left(\lambda/_{g^2}-{}^{2}/_{N}\right),\quad b^2=g^2\,{}^{4}/_{N^2},$

$$N={}^{2D}/_{(D-2)}=2\ell+2. \qquad /2.14/$$

Если ограничиться сферически-симметричными решениями, то задача сводится к одномерному движению в потенциальном поле:

$$V(\tilde\varphi)=a\tilde\varphi^{N-\ell}-b^2\tilde\varphi^N.$$

Чтобы проинтегрировать уравнение

$$\left(\frac{d\tilde\varphi(x)}{dx}\right)^2=a\tilde\varphi^{N-\ell}-b^2\tilde\varphi^N, \qquad /2.15/$$

сделаем замену

$$\tilde\varphi(x)=\left(\sigma(x)\right)^{2/2-N}$$

Получим уравнение $\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2=1,$

где

$$\Phi(x)={}^{2}/_{a\ell}\left(a\sigma(x)-b^2\right)^{1/2},$$

интегрируя которое, находим

$$\tilde\varphi(x)=\left(\frac{D}{2g}\right)^{\frac{D-2}{2}}\left(\frac{2\rho}{\rho^2+(x-x_0)^2}\right)^{\frac{D-2}{2}}, \qquad /2.16/$$

$$\Psi(x)=\left(\frac{D}{2g}\right)^{\frac{D-2}{2}}\left(\frac{2\rho}{\rho^2+(x-x_0)^2}\right)^{D/2}\cdot\frac{\rho+i\gamma_\mu(x-x_0)_\mu}{\sqrt{2\rho}}\times\left(\frac{D-2}{2}\right)\left(\frac{\lambda}{g^2}\frac{D}{D-2}-1\right)^{1/2}\xi,$$

где $\xi^+\xi=1,\ \rho={}^{4g}/_{Na\ell}$.

Так как действие системы инвариантно относительно масштабного преобразования

$$\varphi(x)\to\rho^{\frac{D-2}{2}}\varphi(\rho x),$$

$$\Psi(x)\to\rho^{\frac{D-1}{2}}\Psi(\rho x),$$

то значение параметра ρ в решении /2.16/ может быть произвольным. Заметим, что благодаря зависимости /2.14/ уравнение /2.15/ интегрируется в элементарных функциях.

Решение /2.16/ совпадает с найденным в работе [4]. В частном случае, когда $\lambda/_{g^2}=(D-2)/_D$, $\tilde\Psi=0$, мы приходим к случаю 1 и получаем для $\tilde\varphi(x)$ решение Фубини [1].

3. Тензор энергии-импульса и классическое действие

В предыдущем разделе были найдены инстантонные решения для лагранжиана /1.6/ в случае /1.7а/. Решения для случая /1.7б/ получаются из них заменой $x_\mu\to-x_\mu$. Таким образом, решения для /1.7а,б/ имеют вид

$$\tilde\varphi(x)=\left(\frac{D}{2g}\right)^{\frac{D-2}{2}}\left(\frac{2\rho}{\rho^2+(x-x_0)^2}\right)^{\frac{D-2}{2}}, \qquad /3.1/$$

$$\tilde\Psi(x)=\left(\frac{D}{2g}\right)^{\frac{D-2}{2}}\left(\frac{2\rho}{\rho^2+(x-x_0)^2}\right)^{D/2}\frac{\rho\pm i\gamma_\mu(x-x_0)_\mu}{\sqrt{2\rho}}\cdot\frac{D-2}{2}\times\left(\frac{\lambda}{g^2}\frac{D}{D-2}-1\right)^{1/2}\xi,$$

где ρ - произвольный масштабный множитель, $(X_0)_\mu$ - положение центра инстантона.

Для случая /1.7в/ находим решение:

$$\tilde{\varphi}(x) = \left(\frac{D}{2g}\right)^{\frac{D-2}{2}} \left(\frac{2\rho}{\rho^2 + (x-x_0)^2}\right)^{\frac{D-2}{2}},$$

$$\tilde{\psi}(x) = \left(\frac{D}{2g}\right)^{\frac{D-2}{2}} \left(\frac{2\rho}{\rho^2 + (x-x_0)^2}\right)^{D/2} \frac{\rho - i\gamma_\mu (x-x_0)_\mu}{\sqrt{2\rho}} \cdot \frac{D-2}{2} \times \qquad /3.2/$$

$$\left(\frac{\lambda}{g^2}\frac{D}{D-2} + 1\right)^{1/2} \xi .$$

Заметим, что предельный случай перехода $\tilde{\varphi}(x)$ к решению Фубини, когда $\tilde{\psi}(x) = 0$, возможен только в решениях /3.1/, причем константы связи при этом должны быть завязаны суперсимметричным образом:

$$\lambda/g^2 = (D-2)/D .$$

Классическое действие для решений /3.1./ и /3.2/ равно

$$\tilde{S} = \left(\frac{D}{2g}\right)^{D-2} \frac{D(D-2)}{8} \left(1 \mp \frac{\lambda}{g^2}\right) S_{D+1} \qquad /3.3/$$

соответственно, где $S_{D+1} = \frac{2\pi^{D+1/2}}{\Gamma(D+1/2)}$ - площадь поверхности единичной сферы в $D+1$ -мерном пространстве.

Интересно сравнить это действие со случаем, когда нетривиальные решения имеются только для бозонного поля.

Если $\tilde{\varphi}(x) \neq 0$, $\tilde{\psi}(x) = 0$ являются решением классических уравнений /случай /1.7а,в/ с конечными T_2 и U_N, то, используя неравенство Соболева /10/

$$\left(\frac{N}{\lambda} U_N[\tilde{\varphi}]\right)^{2/N} \leq \frac{8}{D(D-2)} S_{D+1}^{-2/D} T_2[\tilde{\varphi}] \qquad /3.4/$$

совместно с уравнениями /1.3/, /1.4/, получим границу для классического действия:

$$\tilde{S}[\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}=0, \tilde{\psi}^+=0] \geq \frac{\lambda}{D}\left(\frac{D(D-2)}{4\lambda}\right)^{D/2} S_{D+1} . \qquad /3.5/$$

Сферически-симметричные решения [1]

$$\tilde{\varphi}(x) = \left(\frac{D(D-2)}{4\lambda}\right)^{\frac{D-2}{4}} \left(\frac{2\rho}{\rho^2 + (x-x_0)^2}\right)^{\frac{D-2}{2}}, \qquad /3.6/$$

$$\tilde{\psi}(x) = 0$$

имеют действие

$$\tilde{S} = \frac{\lambda}{D}\left(\frac{D(D-2)}{4\lambda}\right)^{D/2} S_{D+1}, \qquad /3.7/$$

которое достигает границы Соболева /3.5/ [11]. Это согласуется с [12], где было показано, что сферически-симметричные решения нелинейного скалярного уравнения дают минимальное действие.

Сравним классическое действие /3.7/ с /3.3/ /со знаком минус, когда имеется предельный переход/.

Для этого введем

$$x = \lambda/g^2 ,$$

где x изменяется в области $(D-2)/D \leq x \leq 1$.

Верхняя граница определяется условием $\tilde{S} \geq 0$, нижняя - $\psi^+\psi \geq 0$.

Разность действий /3.7/ и /3.3/ равна

$$\Delta\tilde{S} = K f(x),$$

где $K \geq 0$, а

$$f(x) = x^{D/2} - x^{D/2 - 1} + f(0),$$

$$f(0) = \frac{2}{D-2}\left(\frac{D-2}{D}\right)^{D/2} .$$

Функция $f(x)$ имеет в точке $x_0 = (D-2)/D$ минимум, равный нулю. В области $x_0 \leq x \leq 1$ она неотрицательна, и тем самым действие с нетривиальными решениями для фермионов /3.3/ оказывается ниже границы Соболева для чисто скалярных решений. То же самое легко видеть из того, что если $\tilde{\varphi}(x) \neq 0$, $\tilde{\psi}(x) = 0$,

$$\tilde{S} = T_2 - U_N = \left(\frac{N}{2} - 1\right) U_N ,$$

в то время как в случае $\tilde{\varphi}(x) \neq 0$, $\tilde{\psi}(x) \neq 0$

$$\tilde{S} = T_2 - U_N = \left(\frac{g^2}{\lambda} - 1\right) U_N .$$

В заключение вычислим тензор энергии-импульса для решений /3.1/. В конформных теориях наиболее вероятным кандидатом на роль тензора энергии-импульса является улучшенный тензор энергии-импульса [13], так как он связан простым соотношением с дилатационным током j_μ^D:

$$j_\mu^D = x^\nu \theta_{\mu\nu}$$

и имеет менее сингулярные матричные элементы, чем тензор Белинфанте. Он обладает свойствами

$$\partial_\mu \theta_{\mu\nu} = 0 , \qquad \theta^{\mu\mu} = 0 .$$

Для D -мерной конформной теории

$$\Theta_{\mu\nu} = \Theta^{Б}_{\mu\nu} + \frac{1}{D-2}\,\partial_\lambda \partial_\rho X^{\lambda\rho\mu\nu}, \qquad /3.8/$$

где суперпотенциал $X_{\lambda\rho\mu\nu}$ определяется как /x/:

$$X_{\lambda\rho\mu\nu} = \delta_{\lambda\rho}\,\sigma^{(+)}_{\mu\nu} - \delta_{\lambda\mu}\,\sigma^{(+)}_{\rho\nu} - \delta_{\lambda\nu}\,\sigma^{(+)}_{\mu\rho} + \delta_{\mu\nu}\,\sigma^{(+)}_{\lambda\rho}$$
$$- \frac{1}{D-1}\,\delta_{\lambda\rho}\,\delta_{\mu\nu}\,\sigma^{(+)}_{\tau\tau} + \frac{1}{D-1}\,\delta_{\lambda\mu}\,\delta_{\rho\nu}\,\sigma^{(+)}_{\tau\tau}, \qquad /3.9/$$

а $\Theta^{Б}_{\mu\nu}$ - симметричный тензор Белинфанте.

Здесь $\sigma^{(+)}_{\mu\nu}$ - симметричная часть тензора $\sigma_{\mu\nu}$, связанного с вириалом поля φ_α соотношением

$$V^{\mu} = \pi^{\alpha}_{\nu}\left(\delta_{\mu\nu}\, d_\alpha - \Sigma^{\alpha}_{\mu\nu}\right)\varphi_\alpha \equiv \partial_\nu\, \sigma^{\mu\nu},$$

d_α - каноническая размерность поля φ_α,

π^{α}_{ν} - соответствующий канонический импульс.

На первый взгляд, выражение /3.8/ сингулярно при $D = 2$, однако легко видеть, что суперпотенциал отличен от нуля только для скалярных полей, а для последних

$$\Theta_{\mu\nu} = \Theta^{Б}_{\mu\nu} - \frac{D-2}{4(D-1)}\left(\partial_\mu \partial_\nu - \delta_{\mu\nu}\Box\right)\varphi^2. \qquad /3.10/$$

При $D = 2$ вклад от суперпотенциала равен нулю и $\Theta_{\mu\nu} = \Theta^{Б}_{\mu\nu}$.

Для лагранжиана /2.1/ улучшенный тензор энергии-импульса имеет вид

$$\Theta_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi - \delta_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{\lambda}{N}\varphi^N\right] - \frac{D-2}{4(D-1)}\left(\partial_\mu\partial_\nu - \delta_{\mu\nu}\Box\right)\varphi^2$$
$$+ \frac{i}{4}\left(\psi^+\gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial}_\nu \psi + \psi^+\gamma_\nu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi\right) = \Theta^{B}_{\mu\nu} + \Theta^{F}_{\mu\nu}. \qquad /3.11/$$

Подставляя решение /3.1/ в /3.11/, получим

$$\Theta^{B}_{\mu\nu} = -\Theta^{F}_{\mu\nu} = \left(\frac{D}{2g}\right)^{D-2}\frac{(D-2)^2}{8}\left(\frac{2\rho}{\rho^2 + x^2}\right)^{D}\left(\frac{\lambda}{g^2}\,\frac{D}{D-2} - 1\right)\delta_{\mu\nu}, \qquad /3.12/$$

и, следовательно,

$$\Theta_{\mu\nu} = 0 .$$

/x/ - в работе /5/ для двумерной модели выписано выражение для суперпотенциала 4- мерной теории и лишь благодаря равенству нулю вириала спинорного поля получен правильный ответ $\Theta_{\mu\nu} = \Theta^{Б}_{\mu\nu}$.

В предельном случае, когда $\lambda/g^2 = (D-2)/D$ и $\tilde{\varphi} \neq 0$, $\tilde{\psi} = 0$, из /3.12/ опять получаем, что $\Theta_{\mu\nu} = \Theta^{B}_{\mu\nu} = 0$ для любого D.

В заключение кратко изложим основные результаты. Рассмотрение необходимых условий существования инстантонов для ренормируемых моделей, взаимодействующих скалярного и спинорного полей, привело нас к лагранжиану, не содержащему размерных параметров, и поэтому масштабно инвариантному. При наложении ограничений на полевые конфигурации лагранжиан становится инвариантным относительно преобразований суперсимметрии, смешивающей бозонные и фермионные поля. Используя суперсимметричный анзатц, система классических нелинейных уравнений сведена к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка. Благодаря наличию отмеченной выше симметрии, полученное уравнение интегрируется в элементарных функциях. Результат совпадает со скалярно-спинорным инстантоном, найденным в /4/. Улучшенный тензор энергии-импульса при этом обращается в нуль. Это позволяет интерпретировать найденные решения как вакуумные средние квантованных полей. Сравнение классического действия со случаем, когда имеются только скалярные решения, показывает, что эти вакуумные траектории могут оказаться более важными при квантовании, так как имеют меньшее действие, чем скалярное решение Фубини, а последнее является нижней границей всех скалярных решений.

Автор благодарит В.Г.Маханькова, В.Я.Файнберга и Н.В.Махалдиани за плодотворные дискуссии и многочисленные замечания.

Литература

1. Fubini S. Nuovo Cimento, 1976, 34A, p. 521.
2. Belavin A. at al. Phys.Lett., 1975, 59B, p.85.
3. Eguchi T., Freund P.G. Phys.Rev.Lett., 1976, 37, p.1251.
4. Inagaki H. Phys. Lett., 1977, 69B, p.448.
5. Akdeniz K.G., Smailagic A. Nuovo Cimento, 1979, 51A, p.345.
6. Inagaki H. ICTP, IC /77/32, Trieste, 1977.

7. Derrick G.H. J.Math.Phys., 1964, 5, p.1252;
Makhankov V.G. Phys.Lett., 1977, 61A, p.431;
Krasnikov K. Phys.Lett., 1978, 72B, p.455;
Dimopoulos S., Eguchi T. Phys.Lett., 1977, 66B, p.480.

8. Rossi P. Phys.Lett., 1977, 71B, N 1.

9. De Alfaro V., Furlan G. Nuovo Cimento, 1976, 34A, p.555.

10. Бесов О.В., Ильин В., Никольский С. Интегральные представления функций. "Наука", М., 1975.

11. Itzykson C., Parisi G., Zuber J.B. Phys.Rev.Lett.,1977, 38,p.306.

12. Coleman S., Glaser V., Martin A. CERN, TH 2364, Geneva, 1977.

13. Callan C.G., Coleman S., Jackiw R. Ann.Phys., 1970, 59, p.42.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 января 1980 г.